

**EPREUVE DE MECANIQUE DES SYSTEMES
ET DES MILIEUX DEFORMABLES
ELEMENTS DE CORRIGE**

1) Choix des liaisons garantissant l'isostaticité de la transmission de mouvement

Ñ Q-1-1)

Si la liaison L_{23} est une pivot, le système est hyperstatique. En étudiant la chaîne continue fermée, constituée des pièces 1, 2, 3, 4 et 1, nous pouvons écrire la loi globale :

$$6p - N_s = ds - h_s \begin{cases} p \text{ (nombre de pièces moins le bâti)} = 3 \\ N_s = 5 + 5 + 5 + 5 = 21 \quad (L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{41}) \end{cases}$$

On souhaite un degré de mobilité, ds est donc égal à 1. On en déduit qu'avec cette solution, le degré d'hyperstatisme est $h_s = 3$

Il faut donc introduire 3 mobilités mais lesquelles ? Réalisons l'étude cinématique de cette chaîne.

$$[2/1] \begin{cases} \dot{\psi} \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_A = \vec{0} \end{cases} \quad [3/2] \begin{cases} \dot{\phi} \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_D = \vec{0} \end{cases} \quad [4/3] \begin{cases} \dot{\beta} \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_B = \vec{0} \end{cases} \quad [4/1] \begin{cases} (\dot{\alpha} - \dot{\delta}) \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_C = \vec{0} \end{cases}$$

En écrivant la composition des vitesses $[4/1] = [4/3] + [3/2] + [2/1]$, $[4/1]$ étant supposé connu,

nous pouvons en déduire les conséquences scalaires concernant la somme projetée sur la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\left. \begin{aligned} \vec{s} \cdot \vec{x} : 0 = 0 \quad (1) \\ \vec{s} \cdot \vec{y} : 0 = 0 \quad (2) \\ \vec{s} \cdot \vec{z} : (\dot{\alpha} - \dot{\delta}) = \dot{\beta} + \dot{\phi} + \dot{\psi} \quad (3) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (1) \text{ et } (2) \text{ localisent deux degrés d'hyperstativité, il faut donc} \\ \text{introduire déjà deux mobilités : } \dot{\gamma}_x \text{ et } \dot{\gamma}_y \end{array}$$

En choisissant le point D pour écrire la composition des vitesses linéaires :

$\vec{V}_{D(4/1)} = \vec{V}_{D(4/3)} + \vec{V}_{D(3/2)} + \vec{V}_{D(2/1)}$, soit $\overrightarrow{DC} \wedge (\dot{\alpha} - \dot{\delta}) \cdot \vec{z} = \overrightarrow{DB} \wedge \dot{\beta} \cdot \vec{z} + \overrightarrow{DA} \wedge \dot{\psi} \cdot \vec{z}$. En projetant cette dernière équation suivant \vec{z} , nous obtenons $0 = 0$ (équation évanescence) et localisons ainsi le dernier degré d'hyperstativité. Il faut donc ajouter une translation \dot{z} .

Le torseur cinématique de la liaison 3-2 conduisant à une résolution isostatique s'écrit alors :

$$[3/2] \begin{cases} \dot{\gamma}_x \cdot \vec{x} + \dot{\gamma}_y \cdot \vec{y} + \dot{\phi} \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_D = \dot{z} \cdot \vec{z} \end{cases} \text{ torseur cinématique caractéristique d'une liaison annulaire d'axe D. } \vec{z}$$

Ñ Q-1-2)

solution sans mobilité interne acceptée :

Les liaisons étant placées en série, leurs mobilités sont cumulatives, les seules possibilités deviennent alors en utilisant des liaisons avec contacts surfaciques :

$$[3/2] \begin{cases} \dot{\gamma}_x \cdot \vec{x} + \dot{\gamma}_y \cdot \vec{y} + \dot{\phi} \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_D = \vec{0} \end{cases} \quad [4/3] \begin{cases} \dot{\beta} \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_B = \dot{z} \cdot \vec{z} \end{cases}$$

rotule de centre D
pivot glissant d'axe B. \vec{z}

ou la solution symétrique :

$$[3/2] \begin{cases} \dot{\phi} \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_D = \dot{z} \cdot \vec{z} \end{cases} \quad [4/3] \begin{cases} \dot{\gamma}_x \cdot \vec{x} + \dot{\gamma}_y \cdot \vec{y} + \dot{\beta} \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_B = \vec{0} \end{cases}$$

pivot glissant d'axe D. \vec{z}
rotule de centre B

ou sphérique à doigt de centre D et d'axe \bar{z} associée à une rotule de centre B avec toujours sa solution symétrique.

solution avec mobilité interne acceptée :

Deux rotules respectivement placées en B et D, avec mobilité interne : rotation de 3 autour de \overrightarrow{BD} .

\tilde{N} Q-1-3) Les sous-ensembles étant indépendants, le système restera toujours isostatique.

\tilde{N} Q-1-4)

Il faut que la normale $E \cdot \bar{n}$ ne coupe pas l'axe $O\bar{z}_0$. Le mécanisme est alors constitué, dans sa version mono-bras, de 5 pièces plus le bâti. Il possède deux mobilités, l'une principale pouvant être caractérisée par δ , l'autre secondaire ou interne correspondant à la rotation du galet 5 par rapport à 4 suivant \bar{z}_0 . (Remarque : cette mobilité disparaît dans la liaison réelle avec roulement sans glissement du galet sur la came).

La version mono-bras reste donc isostatique :

$$6p - N_s = ds - hs \begin{cases} p \text{ (nombre de pièces moins le bâti)} = 5 \\ N_s = 5 + 2 + 5 + 5 + 5 + 1 + 5 = 28 \quad (L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{41} + L_{45} + L_{51} + L_{10}) \end{cases}$$

$ds = 1$ (mobilité principale souhaitée) + 1 (mobilité interne), on en déduit qu'avec cette solution $hs = 0$

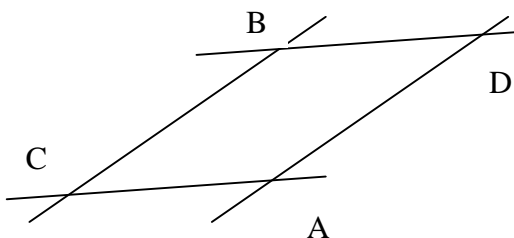
\tilde{N} Q-1-5)

A partir de l'équation (3) : $(\dot{\alpha} - \dot{\delta}) = \dot{\beta} + \dot{\phi} + \dot{\psi}$, sachant que l'on veut $\bar{x}_2 = \bar{x}_4$ soit $(\dot{\alpha} - \dot{\delta}) = \dot{\psi}$ nous en déduisons que $\dot{\beta} + \dot{\phi} = 0$ or $\overrightarrow{DC} \wedge (\dot{\alpha} - \dot{\delta}) \cdot \bar{z} = \overrightarrow{DB} \wedge \dot{\beta} \cdot \bar{z} + \overrightarrow{DA} \wedge \dot{\phi} \cdot \bar{z} + \dot{z} \cdot \bar{z}$ qui en se projetant sur \bar{z} conduit à $\dot{z} = 0$.

En multipliant scalairement par \overrightarrow{DB} , on obtient $\overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{DC} \wedge (\dot{\alpha} - \dot{\delta}) \cdot \bar{z}) = \overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{DA} \wedge \dot{\psi} \cdot \bar{z})$. En tenant compte de $(\dot{\alpha} - \dot{\delta}) = \dot{\psi}$ et par permutation circulaire, on aboutit à :

$$\bar{z} \cdot (\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}) = \bar{z} \cdot (\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DA}) \text{ soit } (\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \vec{0}.$$

D'où $\overrightarrow{DB} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC}$, or comme $\bar{x}_2 = \bar{x}_4$, la seule figure géométrique possible est un parallélogramme ADBC.



2) Prédétermination du profil de la came de correction angulaire des galets et de la géométrie du galet associé

\tilde{N} Q-2-1)

Pour les trois phases : $\dot{\delta}_0 \cdot t = \omega \cdot t = \delta + \frac{\pi}{6}$, soit $\delta = 2 \cdot t - \frac{\pi}{6}$, d'où $t = \frac{1}{2} \cdot (\delta + \frac{\pi}{6})$

Phase a $t \geq 0$

$$\ddot{\alpha} = cte = \ddot{\alpha}_0$$

$$\dot{\alpha} = \ddot{\alpha}_0 \cdot t + \dot{\alpha}_0$$

$$\alpha = \ddot{\alpha}_0 \cdot \frac{t^2}{2} + \dot{\alpha}_0 \cdot t + \alpha_0 \text{ avec } \dot{\alpha}_0 = 0 \text{ et } \alpha_0 = 0$$

Calcul de $\ddot{\alpha}_0$: pour $\delta=0$ (fin de la phase), $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $t = \frac{\pi}{6\omega}$

$$\alpha\left(\frac{\pi}{6\omega}\right) = \frac{\pi}{2} = \frac{\ddot{\alpha}_0}{2} \cdot \frac{\pi^2}{36\omega^2} \quad \text{d'où} \quad \ddot{\alpha}_0 = \frac{36\omega^2}{\pi}$$

$$\text{Soit } \alpha = \frac{18}{\pi} \omega^2 t^2 = \frac{18}{\pi} \left(\delta + \frac{\pi}{6}\right)^2 \quad \text{pour } t \in \left[0, \frac{\pi}{6\omega}\right] \quad \text{ou } \delta \in \left[-\frac{\pi}{6}, 0\right]$$

Phase a

Phase b $t \geq \frac{\pi}{6\omega}$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{36\omega^2}{\pi}$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{36\omega^2}{\pi} \left(t - \frac{\pi}{6\omega}\right) + \dot{\alpha}_f$$

$$\alpha = -\frac{18\omega^2}{\pi} \left(t - \frac{\pi}{6\omega}\right)^2 + \dot{\alpha}_f \left(t - \frac{\pi}{6\omega}\right) + \alpha_f$$

Phase b

$$\text{Soit } \alpha = -\frac{18\omega^2}{\pi} \left(t - \frac{\pi}{6\omega}\right)^2 + 6\omega \left(t - \frac{\pi}{6\omega}\right) + \frac{\pi}{2} = -\frac{18}{\pi} \delta^2 + 6\delta + \frac{\pi}{2} \quad \text{pour } t \in \left[\frac{\pi}{6\omega}, \frac{\pi}{3\omega}\right] \quad \text{ou } \delta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$$

vérification : pour $t = \frac{\pi}{3\omega}$, on retrouve bien que $\alpha = \pi$

Phase c : $\alpha = \pi$

Q-2-2)

$$\vec{OE} = \begin{cases} x = c \cdot \cos(\delta) + e \cdot \cos(\alpha) \\ y = c \cdot \sin(\delta) + e \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$$

Phase a

$$\begin{cases} x = c \cdot \cos(\delta) + e \cdot \cos\left[\frac{18}{\pi} \left(\delta + \frac{\pi}{6}\right)^2\right] \\ y = c \cdot \sin(\delta) + e \cdot \sin\left[\frac{18}{\pi} \left(\delta + \frac{\pi}{6}\right)^2\right] \end{cases}$$

Phase b

$$\begin{cases} x = c \cdot \cos(\delta) + e \cdot \cos\left(-\frac{18}{\pi} \delta^2 + 6\delta + \frac{\pi}{2}\right) \\ y = c \cdot \sin(\delta) + e \cdot \sin\left(-\frac{18}{\pi} \delta^2 + 6\delta + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Phase c

$$\begin{cases} x = c \cdot \cos(\delta) - e \\ y = c \cdot \sin(\delta) \end{cases}$$

$$(x + e)^2 + y^2 = c^2$$

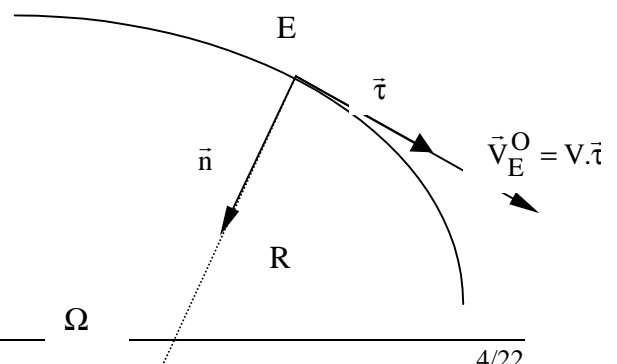
$$\text{cercle} \left(\begin{matrix} -e \\ 0 \end{matrix}; R = c \right)$$

Q-2-3)

$$\vec{V}_E^O = \left(\frac{dx}{d\delta} \cdot \dot{\delta} + \frac{dy}{d\delta} \cdot \dot{\delta}\right) \cdot \vec{\tau} = \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \cdot \vec{\tau} \quad \text{on pose } V = \frac{ds}{dt}$$

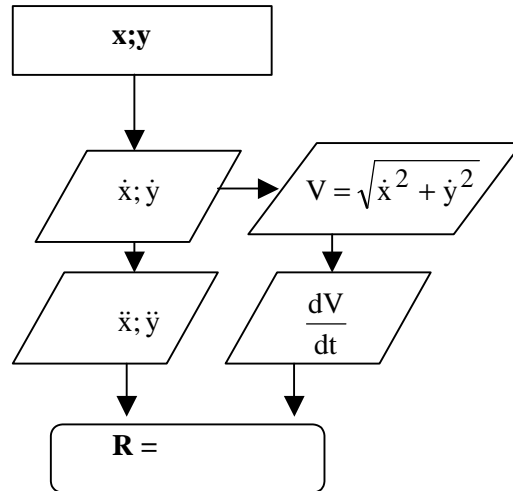
$$\vec{a}_E^O = \left(\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \dot{\delta} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \dot{\delta}\right) \cdot \vec{\tau} + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$= \frac{dV}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{V^2}{R} \cdot \vec{n}$$



$$\Rightarrow \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \frac{V^4}{R^2}$$

$$R_{\text{arithmétique}} = \frac{V^2}{\sqrt{[\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 - \left(\frac{dV}{dt}\right)^2]}} \text{ ou } R_{\text{algébrique}} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$



Ñ Q-2-4)

Pour qu'il n'y ait pas interférence, il faut que $R_{\text{galet}} < R_{\text{mini}}$

Le rayon mini est donné par un module de courbure maximale environ égal à 70 m^{-1} , soit $R_{\text{galet}} < 14,2 \text{ mm}$

3) Étude dynamique de l'ensemble carrousel-bras. Détermination de la pression de contact galet-came

Ñ Q-3-1)

Si on ne cherche à déterminer que le couple moteur, il est possible de tenter une mise en équation pour un paramétrage compatible avec toutes les liaisons du mécanisme, contact came/galet inclus, en isolant 1+2+3+4+5, de façon à ne pas introduire d'inconnues statiques (les coefficients énergétiques associés aux efforts des liaisons seront nuls, celles-ci étant parfaites). Il ne reste alors qu'un paramètre : δ , donc il ne faudra pas considérer $\dot{\delta}$ constant lors de la mise en équation. L'équation obtenue reliera C à δ (et ses dérivées), et si le mouvement est connu (vitesse de rotation constante par exemple), C pourra être calculé.

D'autres mises en équation équivalente sont possibles :

- On peut prendre en considération lors de la mise en équation la condition $\dot{\delta}$ constant. Le paramètre retenu est alors "t" (équation appelée parfois de « Jennie Ramonel »). La résolution sera plus rapide, mais le couple ne sera calculable que sous cette condition.

- Le mécanisme n'ayant qu'une mobilité, le théorème de l'énergie cinétique aurait aussi permis de calculer C.

En pratique, le paramètre α ne devra figurer ni dans l'énergie cinétique, ni dans le second membre de l'équation de Lagrange recherchée. Son explicitation en fonction du temps n'étant pas simple, la mise en équation ne le sera pas non plus.

Ñ Q-3-2)

Pour déterminer N, il est nécessaire de faire travailler le contact ponctuel, et donc de faire une mise en équation non compatible avec cette liaison. Le plus simple est d'ignorer la relation imposée par ce contact ponctuel (qui relie α à δ). On doit toujours isoler 1+2+3+4+5. Il reste alors 2 paramètres : δ et α . $\dot{\delta}$ ne sera toujours pas

considéré constant lors de la mise en équation. On obtient ainsi 2 équations de Lagrange, faisant intervenir δ , α (et leurs dérivées), N et C. La prise en compte à posteriori de la relation reliant δ et α (équation de liaison associée au contact ponctuel) et de la condition de fonctionnement (vitesse de rotation constante) permet de calculer N et C.

Il est toujours possible de considérer lors de la mise en équation la condition $\dot{\delta}$ constant. Les paramètres retenus sont alors "t" et α , et seul le couple à fournir pour imposer une vitesse de rotation constante à 1 pourra être calculé..

Écriture des équations :

Les *coefficients énergétiques associés aux efforts intérieurs* sont nuls : les pivots 1-2, 1-4, 3-4 et 4-5 et la linéaire annulaire sont parfaites et le paramétrage compatible.

Coefficients énergétiques associés aux efforts extérieurs :

Pivot 0-1 : les coefficients sont nuls car la liaison est parfaite, le paramétrage compatible et 0 galiléen.

Pesanteur : les coefficients sont nuls car le potentiel de pesanteur est constant.

• Moteur : $Q_\alpha(\text{mot} \rightarrow 1, Rg) = 0$ et $Q_\delta(\text{mot} \rightarrow 1, Rg) = C$

• Contact came/galet : $[0 \rightarrow 5] = \begin{cases} N\bar{n} \\ \bar{0} \end{cases}_E$; $\bar{V}(E, 5/Rg) = c\dot{\delta}\bar{y}_1 + e\alpha\bar{y}_2$

soit : $Q_\alpha(\text{came} \rightarrow 5, Rg) = N e \bar{n} \cdot \bar{y}_2$ et $Q_\delta(\text{came} \rightarrow 5, Rg) = N c \bar{n} \cdot \bar{y}_1$

• Pistolet : $[\text{Pistolet} \rightarrow 2] = \begin{cases} P\bar{x} \\ \bar{0} \end{cases}_P$; $\bar{V}(P, 2/Rg) = a\dot{\delta}\bar{y}_1 + x_p\alpha\bar{y}_2$

soit : $Q_\alpha(\text{pistolet} \rightarrow 2, Rg) = P x_p j_p$ et $Q_\delta(\text{pistolet} \rightarrow 2, Rg) = P a i_p \sin(\alpha-\delta) + P a j_p \cos(\alpha-\delta)$

Energie cinétique de d :

$$2 T(\Sigma/Rg) = [C_1 + M_2 a^2 + C_3 + M_3 a c] \dot{\delta}^2 + [C_2 + M_3 d^2] \dot{\alpha}^2 + [2M_2 a l_2 + M_3 d(a+c)] \dot{\delta} \dot{\alpha} \cos(\alpha-\delta)$$

Équation de Lagrange relative à r :

$$[C_1 + M_2 a^2 + C_3 + M_3 a c] \ddot{\delta} + [M_2 a l_2 + M_3 d \frac{a+c}{2}] [\ddot{\alpha} \cos(\alpha-\delta) - \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha-\delta)] = C + P a i_p \sin(\alpha-\delta) + P a j_p \cos(\alpha-\delta) + N c \bar{n} \cdot \bar{y}_1$$

Équation de Lagrange relative à u :

$$[C_2 + M_3 d^2] \ddot{\alpha} + [M_2 a l_2 + M_3 d \frac{a+c}{2}] [\ddot{\delta} \cos(\alpha-\delta) + \dot{\delta}^2 \sin(\alpha-\delta)] = P x_p j_p + N e \bar{n} \cdot \bar{y}_2$$

Ñ **Q-3-3)**

L'équation de Lagrange relative à δ correspond directement à l'équation de moment pour 1+2+3+4+5, en O, en projection sur \bar{z}_0 . Aucune autre projection d'une équation de moment ou de résultante ne permet d'obtenir directement la seconde équation, et ce quelque soit le système isolé. L'équation de Lagrange relative à α correspond à une combinaison linéaire de l'équation de moment pour 2, en A, en projection sur \bar{z}_0 et de l'équation de résultante pour 3 en projection sur \bar{y}_2 .

Ñ **Q-3-4)**

N est maximum dans la phase a (ou a'), pour δ voisin de 160° .

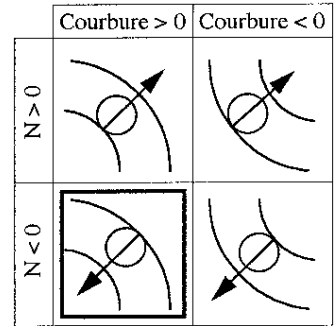
$$\begin{aligned} \text{Dans cette phase, on a : } \dot{\delta} &= 0 & \dot{\delta} &= \dot{\delta}_0 & \delta &= \dot{\delta}_0 t - \delta/6 \\ \ddot{\alpha} &= \frac{36}{\pi} \dot{\delta}_0^2 & \ddot{\alpha} &= \frac{36}{\pi} \dot{\delta}_0^2 t & \alpha &= \frac{18}{\pi} \dot{\delta}_0^2 t^2 \end{aligned}$$

N est donné par l'équation de Lagrange relative à α et vaut -13 kN.

N Q-3-5)

Dans la zone où la pression de contact est maximum (δ voisin de 160°), la courbure est positive (7 m^{-1}) et N est négatif (-13 kN). Le contact est donc du type « concave/convexe ».

$$p_{\text{maxi}} = 0,42 \sqrt{\frac{|N|}{1} E \left| \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right|} = 1350 \text{ MPa, ce qui est compatible avec les caractéristiques du matériau.}$$



N Q-3-6)

Le torseur des actions de 2 sur 1 est de la forme suivante : $[2 \rightarrow 1]_A = \begin{cases} X_{21}\bar{x}_1 + Y_{21}\bar{y}_1 + Z_{21}\bar{z}_0 \\ L_{21}\bar{x}_1 + M_{21}\bar{y}_1 \end{cases}$

Il faut donc écrire 5 équations pour déterminer ses 5 composantes.

2 n'étant relié qu'à 1 et 3, il est possible d'écrire 4 équations sans qu'aucune des 2 inconnues de la linéaire annulaire n'intervienne : l'équation de moment en D (3 projections à choisir) et la projection de la résultante sur \bar{z}_0 .

2+3 n'étant relié qu'à 1 et 4, il est possible d'écrire 1 équation sans qu'aucune des 5 inconnues de la pivot 3-4 n'intervienne : l'équation de moment en B en projection sur \bar{z}_0 .

N Q-3-7)

Pour faire intervenir les inconnues statiques de la liaison pivot 1-2, il faut faire une mise en équation non compatible avec cette liaison. Ne pas tenir compte de cette liaison revient à paramétrer le mécanisme par δ (mouvement dans la pivot 0-1), α (mouvement dans la pivot 1-4), β (mouvement dans la pivot 4-3) et $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, z$ (mouvement dans la linéaire annulaire 2-3). Ce paramétrage est bien compatible avec toutes les liaisons excepté le contact ponctuel et la pivot 1-2. Il est alors possible d'écrire 7 équations de Lagrange, faisant intervenir 14 inconnues : les 7 paramètres de position (et leurs dérivées), N, C et les 5 inconnues statiques de la pivot 1-2. Il reste alors à écrire les équations de liaison, une pour le contact ponctuel (relation entre δ et α) et 5 pour la pivot (3 équations pour la coïncidence des points A_1 et A_2 et 2 équations pour la coïncidence des axes \bar{z}_0 et \bar{z}_3). La dernière équation est donnée par la condition de rotation du carrousel à vitesse constante.

N Q-3-8)

Dans la phase de peinture, on a :

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} &= 0 & \dot{\delta} &= \dot{\delta}_0 & \delta &= \dot{\delta}_0 t - \delta/6 \\ \ddot{\alpha} &= 0 & \dot{\alpha} &= 0 & \alpha &= 0 \text{ ou } \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\delta}(D,2/Rg) &= \vec{M}(D,2 \rightarrow 2) = M_2 g(l_2-d) \bar{y}_2 \dots \text{ pesanteur} \rightarrow 2 \\ & - (L_{21} + fY_{21}) \bar{x}_1 - (M_{21} - fX_{21}) \bar{y}_1 - dZ_{21} \bar{y}_2 + d(Y_{21} \cos(\alpha-\delta) - X_{21} \sin(\alpha-\delta)) \bar{z}_0 \dots 1 \rightarrow 2 \\ & + Pj_p(z_p+f) \bar{x}_2 + Pj_p(x_p-d) \bar{z}_0 - P[k_p(x_p-d) + i_p(z_p+f)] \bar{y}_2 \dots \text{ pistolet} \rightarrow 2 \end{aligned}$$

$$\vec{\delta}(D,2/Rg) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(D,2/Rg) \right]_{Rg} + M_2 \vec{V}(D,2/Rg) \wedge \vec{V}(G_2,2/Rg) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(D,2/Rg) \right]_{Rg}$$

$$\vec{\sigma}(D,2/Rg) = \vec{I}(D,2) \vec{\Omega}(2/Rg) + M_2 \vec{DG}_2 \wedge \vec{V}(D,2/Rg) = M_2 [(l_2-d) \bar{x}_2 - (f+h_2) \bar{z}_0] \wedge \dot{\delta} \bar{y}_1$$

Projections sur \bar{x}_1, \bar{y}_1 et \bar{z}_0 :

$$0 = -(L_{21} + fY_{21}) + Pj_p(z_p+f) \cos(\alpha-\delta) - [M_2 g(l_2-d) - Pk_p(x_p-d) + Pi_p(z_p+f) - dZ_{21}] \sin(\alpha-\delta) \quad (1)$$

$$aM_2(f+h_2) \dot{\delta}^2 = -(M_{21} + fX_{21}) + Pj_p(z_p+f) \sin(\alpha-\delta) + [M_2 g(l_2-d) - Pk_p(x_p-d) + Pi_p(z_p+f) - dZ_{21}] \cos(\alpha-\delta) \quad (2)$$

$$-aM_2(l_2-d) \dot{\delta}^2 \cos(\alpha-\delta) = d[Y_{21} \cos(\alpha-\delta) - X_{21} \sin(\alpha-\delta)] + Pj_p(x_p-d) \quad (3)$$

$$M_2 \vec{\Gamma}(G_2/Rg) \cdot \vec{z}_0 = \vec{F}(\vec{2} \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_0 \quad \dots \text{ soit } M_2 g - P_k p + Z_{21} = 0 \quad (4)$$

$$\vec{\delta}(B,2+3/Rg) \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}(B, \overline{2+3} \rightarrow 2+3) \cdot \vec{z}_0 = -dX_{21} \sin(\alpha-\delta) + dY_{21} \cos(\alpha-\delta) - (a-c)Y_{21} \quad \dots \quad 1 \rightarrow 2+3$$

$$+ P_j p (x_p - d) + P_i p (a-c) \sin(\alpha-\delta) + P_j p (a-c) \cos(\alpha-\delta) \quad \dots \text{ pistolet} \rightarrow 2+3$$

$$\vec{\delta}(B,2/Rg) \cdot \vec{z}_0 = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(B,2/Rg) \cdot \vec{z}_0 \right]_{Rg} + M_2 [\vec{V}(B,2/Rg) \wedge \vec{V}(G_2,2/Rg)] \cdot \vec{z}_0 = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(B,2/Rg) \cdot \vec{z}_0 \right]_{Rg}$$

$$\vec{\sigma}(B,2/Rg) = \vec{I}(G_2,2) \vec{\Omega}(2/Rg) + M_2 \vec{B} \vec{G}_2 \wedge \vec{V}(G_2,2/Rg) = M_2 [(a-c) \vec{x}_1 + (l_2 - d) \vec{x}_2 - (b+h_2) \vec{z}_0] \wedge \delta \vec{y}_1$$

$$\vec{\delta}(B,3/Rg) \cdot \vec{z}_0 = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(B,3/Rg) \cdot \vec{z}_0 \right]_{Rg} + M_3 [\vec{V}(B,3/Rg) \wedge \vec{V}(G_3,3/Rg)] \cdot \vec{z}_0 = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(B,3/Rg) \cdot \vec{z}_0 \right]_{Rg}$$

$$\vec{\sigma}(B,3/Rg) = \vec{I}(B,3) \vec{\Omega}(3/Rg) + M_3 \vec{B} \vec{G}_3 \wedge \vec{V}(B,3/Rg) = [C_3 + M_3 c \frac{a-c}{2}] \delta \vec{z}_0$$

$$M_2 a (l_2 - d) \delta^2 \sin(\alpha-\delta) = P_j p (x_p - d) + [P_i p (a-c) - dX_{21}] \sin(\alpha-\delta) + [P_j p (a-c) + dY_{21}] \cos(\alpha-\delta) - (a-c)Y_{21} \quad (5)$$

L'équation (4) donne directement Z_{21} .

La différence (3)-(5) donne Y_{21} . En reportant dans (3) ou (5), on détermine X_{21} .

X_{21} , Y_{21} et Z_{21} étant déterminés, (1) donne L_{21} et (2) donne M_{21} .

4) Étude approfondie de la résistance et des déformations d'un bras principal

Détermination du torseur des efforts de cohésion

N° Q-4-1)

On appelle 1^- et 1^+ , les deux parties de 1, générées par la coupure à l'abscisse s et notées dans le sens des s croissants.

En isolant la partie 1^+ , on peut écrire : $[2 \rightarrow 1^+] + [\varpi \rightarrow 1^+] + [1^- \rightarrow 1^+] = [A_{1^+}^g]$

$$\vec{OG} = (p+c) \vec{x}_1 + \left(\frac{L+s}{2} \right) \vec{i} \quad \text{d'où en tenant compte que } \delta = \text{constante} : \vec{a}_G^g = -[(p+c) + \frac{(L+s)}{2} \cos \Phi] \delta^2 \vec{x}_1$$

La première conséquence vectorielle concerne l'égalité entre les résultantes vectorielles, soit :

$$X_{21} \vec{x}_1 + Y_{21} \vec{y}_1 + Z_{21} \vec{z}_1 - \lambda(L-s)g \vec{z}_0 - N \vec{i} - T_k \vec{k} - T_{y1} \vec{y}_1 = -\lambda(L-s) \left[(p+c) + \frac{(L+s)}{2} \cos \Phi \right] \delta^2 \vec{x}_1$$

D'où les trois premières conséquences scalaires :

$$N = X_{21} \cos \Phi - Z_{21} \sin \Phi + \lambda(L-s)g \sin \Phi + \lambda(L-s) \left[(p+c) + \frac{(L+s)}{2} \cos \Phi \right] \delta^2 \cos \Phi$$

$$T_k = X_{21} \sin \Phi + Z_{21} \cos \Phi - \lambda(L-s)g \cos \Phi + \lambda(L-s) \left[(p+c) + \frac{(L+s)}{2} \cos \Phi \right] \delta^2 \sin \Phi$$

$$T_{y1} = Y_{21}$$

La deuxième conséquence vectorielle concerne l'égalité entre les moments exprimés en P, soit :

$$L_{21} \vec{x}_1 + M_{21} \vec{y}_1 + \vec{PG} \wedge -\lambda(L-s)g \vec{z}_0 - M_t \vec{i} - M_f k \vec{k} - M_f y_1 \vec{y}_1 = \vec{\delta}_G^g + \vec{PG} \wedge [-\lambda(L-s) \left[(p+c) + \frac{(L+s)}{2} \cos \Phi \right] \delta^2 \vec{x}_1]$$

$$\bar{\sigma}_G^g = \begin{bmatrix} I(s) & 0 & 0 \\ 0 & J(s) & 0 \\ 0 & 0 & K(s) \end{bmatrix}_{\vec{i}, \vec{y}_1, \vec{k}} \begin{bmatrix} -\dot{\delta} \cdot \sin \Phi \\ 0 \\ \dot{\delta} \cdot \cos \Phi \end{bmatrix} = -I \cdot \dot{\delta} \cdot \sin \Phi \cdot \vec{i} + K \dot{\delta} \cdot \cos \Phi \cdot \vec{k} \quad \begin{array}{l} \frac{d\vec{i}}{dt} = \dot{\delta} \cdot \cos \Phi \cdot \vec{y}_1 \\ \frac{d\vec{k}}{dt} = \dot{\delta} \cdot \sin \Phi \cdot \vec{y}_1 \end{array} \quad \text{d'où :}$$

$$\bar{\sigma}_G^g = (K - I) \cdot \dot{\delta}^2 \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi \cdot \vec{y}_1 \quad \text{Le terme de transport en P peut s'écrire sachant que } \overrightarrow{PG} = \frac{(L-s)}{2} \cdot \vec{i} :$$

$$\overrightarrow{PG} \wedge [-\lambda \cdot (L-s) \cdot (p+c) + \frac{(L+s)}{2} \cdot \cos \Phi] \cdot \dot{\delta}^2 \cdot \vec{x}_1 = \lambda \cdot \frac{(L-s)^2}{2} \cdot \sin \Phi [(p+c) + \frac{(L+s)}{2} \cdot \cos \Phi] \cdot \dot{\delta}^2 \cdot \vec{y}_1$$

d'où :

$$L_{21} \cdot \vec{x}_1 + M_{21} \cdot \vec{y}_1 + \overrightarrow{PG} \wedge -\lambda \cdot (L-s) \cdot g \cdot \vec{z}_0 - M_t \cdot \vec{i} - M_f \cdot \vec{k} - M_{f_{y_1}} \cdot \vec{y}_1 = (K - I) \cdot \dot{\delta}^2 \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi \cdot \vec{y}_1 + \lambda \cdot \frac{(L-s)^2}{2} \cdot \sin \Phi [(p+c) + \frac{(L+s)}{2} \cdot \cos \Phi] \cdot \dot{\delta}^2 \cdot \vec{y}_1$$

soit :

$$M_t = L_{21} \cdot \cos \Phi$$

$$M_{f_{y_1}} = M_{21} + \lambda \cdot \frac{(L-s)^2}{2} \cdot g \cdot \cos \Phi - (K - I) \cdot \dot{\delta}^2 \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi - \lambda \cdot \frac{(L-s)^2}{2} \cdot \sin \Phi [(p+c) + \frac{(L+s)}{2} \cdot \cos \Phi] \cdot \dot{\delta}^2 - (L-s) \cdot [X_{21} \cdot \sin \Phi + Z_{21} \cdot \cos \Phi]$$

$$M_{f_k} = (L-s) \cdot Y_{21} + L_{21} \cdot \sin \Phi$$

Simplification des actions extérieures transmises par la biellette 2 au bras principal 1

Ñ Q-4-2)

Appliquons le théorème de la variation de quantité de mouvement pour obtenir la force F exercée sur le bras lors de l'éjection de l'air et de la peinture qui interfèrent après pour donner naissance à des micro sphères de peinture.

$$F = \tilde{n}_p \cdot Q_{vp} \cdot V_p + \tilde{n}_a \cdot Q_{va} \cdot V_a$$

Où Q_v et V sont les débits volume et vitesses axiales relatifs à la peinture et à l'air indicés p et a.

L'air pouvant être assimilé à un gaz parfait, sa variation de masse volumique \tilde{n}_a sera telle que :

$$\tilde{n}_a = \tilde{n}_{a0} \cdot T_0/T \quad T \text{ étant évidemment exprimé en K}$$

$$\tilde{n}_a = 1,296 \cdot 273/293 = 1,208 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

La vitesse d'éjection de la peinture est conditionnée par la buse de diamètre $d = 0,5 \text{ mm}$.

$$V_p = Q_v / (\delta d^2/4)$$

$$V_p = 500 \cdot 10^{-9}/60 / (\delta \cdot 0,5^2 \cdot 10^{-6}/4) = 0,04 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Toutes les autres grandeurs sont données. Il en résulte que la force F exercée sur un bras de peinture par l'éjection vaut :

$$F = 960 \cdot 500 \cdot 10^{-9}/60 \cdot 0,04 + 1,208 \cdot 5/3600 \cdot 0,7 \quad \Rightarrow \quad F = 1,17 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Cette force est totalement négligeable.

Vérification du dimensionnement du bras principal 1

Ñ Q-4-3)

$$K = \int_V (i^2 + y_1^2) \cdot dm \quad \text{avec } dm = \rho \cdot dV = \frac{\lambda}{S} \cdot dV \quad \text{De même : } I = \int_V (k^2 + y_1^2) \cdot dm$$

$$\left. \begin{aligned} \int_V (i^2) \cdot dm &= \rho \cdot S \int_L i^2 \cdot di = \lambda \left[\frac{i^3}{3} \right]_{\frac{L-s}{2}}^{\frac{L-s}{2}} = \lambda \frac{(L-s)^3}{12} \\ \int_V (y_1^2) \cdot dm &= \rho \cdot L \int_S y_1^2 \cdot dS = \rho \cdot L \cdot I_{Gk} \\ \int_V (k^2) \cdot dm &= \rho \cdot L \int_S k^2 \cdot dS = \rho \cdot L \cdot I_{Gy1} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{d'où } K = \lambda \frac{(L-s)^3}{12} + \frac{\lambda L}{S} \cdot I_{Gk} \\ \text{et } I = \frac{\lambda L}{S} \cdot (I_{Gk} + I_{Gy1}) \end{array}$$

$$\text{Soit } K - I = \lambda \frac{(L-s)^3}{12} - \frac{\lambda L}{S} \cdot I_{Gy1}$$

En $s = 0$,

$$Mf_{y1} = M_{21} + \lambda \cdot \frac{L^2}{2} \cdot g \cdot \cos\Phi - (K - I) \cdot \delta^2 \cdot \sin\Phi \cdot \cos\Phi - \lambda \cdot \frac{L^2}{2} \cdot \sin\Phi \cdot [(p+c) + \frac{L}{2} \cdot \cos\Phi] \cdot \delta^2 - L \cdot [X_{21} \cdot \sin\Phi + Z_{21} \cdot \cos\Phi]$$

$$\text{avec } K - I = \lambda \frac{L^3}{12} - \frac{\lambda L}{S} \cdot I_{Gy1} = \frac{6,3 \cdot 0,55^3}{12} - \frac{6,3 \cdot 0,55}{808 \cdot 10^{-6}} \cdot 15,1 \cdot 10^{-8} = 8,67 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$Mf_{y1} = +6,3 \cdot \frac{0,55^2}{2} \cdot 9,81 \cdot \cos 16^\circ - (8,67 \cdot 10^{-2}) \cdot 4 \cdot \sin 16^\circ \cdot \cos 16^\circ - 6,3 \cdot \frac{0,55^2}{2} \cdot \sin 16^\circ [0,285 + \frac{0,55}{2} \cdot \cos 16^\circ] \cdot 4 - 0,55 \cdot [16,2 \cdot \sin 16^\circ - 50 \cdot \cos 16^\circ]$$

$$Mf_{y1} = 8,986 - 9,188 \cdot 10^{-2} - 0,577 + 23,97 = 32,3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La décomposition numérique, respectant l'ordre littéral, permet d'apprécier l'influence des différents termes.

Ñ Q-4-4)

$$\sigma_i = \frac{Mf_{y1}}{I_{Gy1}} \cdot k \quad \text{soit avec } k_{\text{maxi}} : \sigma_i = \frac{32,7}{15,1 \cdot 10^8} \cdot 17 \cdot 10^{-3} = 3,63 \text{ MPa}$$

aucun soucis à se faire, comparé à la limite élastique à l'extension de 240 MPa

Ñ Q-4-5)

Le cas de flexion simple rencontré ici nous autorise à utiliser : $Mf_{y1}(s) = E \cdot I_{Gy1} \cdot k''$

$$E \cdot I \cdot k'' = +\lambda \cdot \frac{(L-s)^2}{2} \cdot g \cdot \cos\Phi - \left[\lambda \frac{(L-s)^3}{12} - \frac{\lambda L}{S} \cdot I_{Gy1} \right] \cdot \delta^2 \cdot \sin\Phi \cdot \cos\Phi - \lambda \cdot \frac{(L-s)^2}{2} \cdot \sin\Phi \cdot [(p+c) + \frac{(L+s)}{2} \cdot \cos\Phi] \cdot \delta^2 - (L-s) \cdot [X_{21} \cdot \sin\Phi + Z_{21} \cdot \cos\Phi]$$

$$E \cdot I \cdot k' = -\lambda \cdot \frac{(s-L)^3}{6} \cdot g \cdot \cos\Phi + \left[\lambda \frac{(s-L)^4}{48} + \frac{\lambda L}{S} \cdot I_{Gy1} \cdot s \right] \cdot \delta^2 \cdot \sin\Phi \cdot \cos\Phi + \lambda \cdot \frac{(s-L)^3}{6} \cdot \sin\Phi \cdot [(p+c) \cdot \delta^2 - \frac{\lambda}{8} \cdot \sin 2\Phi \cdot (\frac{s^4}{4} - \frac{s^3 \cdot L}{3} - \frac{s^2 \cdot L^2}{2} + L^3 \cdot s)] \cdot \delta^2 + \frac{(s-L)^2}{2} \cdot [X_{21} \cdot \sin\Phi + Z_{21} \cdot \cos\Phi] + C_1$$

en $s = 0$, $k' = 0$, le calcul de la constante d'intégration est donc possible.

$$0 = -\lambda \cdot \frac{L^3}{6} g \cdot \cos \Phi + \lambda \frac{L^4}{48} \cdot \dot{\delta}^2 \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi + \lambda \cdot \frac{L^3}{6} \cdot \sin \Phi (p + c) \cdot \dot{\delta}^2 + \frac{L^2}{2} \cdot [X_{21} \cdot \sin \Phi + Z_{21} \cdot \cos \Phi] + C_1$$

en $s = L$:

$$E.I.k'(L) = \left(\frac{\lambda L^2}{S} \cdot I_{Gy1} - \lambda \frac{L^4}{48} \right) \cdot \dot{\delta}^2 \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi - \frac{\lambda}{8} \cdot \sin 2\Phi \cdot \left(\frac{L^4}{4} - \frac{L^4}{3} - \frac{L^4}{2} + L^4 \right) \cdot \dot{\delta}^2 + \lambda \cdot \frac{L^3}{6} g \cdot \cos \Phi - \lambda \cdot \frac{L^3}{6} \cdot \sin \Phi (p + c) \cdot \dot{\delta}^2 - \frac{L^2}{2} \cdot [X_{21} \cdot \sin \Phi + Z_{21} \cdot \cos \Phi]$$

$$3,0210^4 k'(L) = \left(\frac{63,055^2}{80810^6} \cdot 151 \cdot 10^{-8} - 63 \frac{0,55^4}{48} \right) \cdot 4 \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi - \frac{63}{8} \cdot \sin 3\Phi \cdot \frac{5,055^4}{12} \cdot 4 + 63 \cdot \frac{0,55^3}{6} \cdot 9,8 \cdot \cos \Phi - 63 \cdot \frac{0,55^3}{6} \cdot \sin \Phi \cdot (0,2854 - \frac{0,55^2}{2}) \cdot [62 \cdot \sin \Phi - 50c$$

$$3,02 \cdot 10^4 \cdot k'(L) = -1,235 \cdot 10^{-2} - 6,3 \cdot 10^{-2} + 1,647 - 5,49 \cdot 10^{-2} + 6,594 = 8,176 \text{ soit } k'(L) = 2,7 \cdot 10^{-4}$$

La décomposition numérique, respectant l'ordre littéral, permet d'apprécier l'influence des différents termes.

$$E.I.k(s) = -\lambda \cdot \frac{(s-L)^4}{24} g \cdot \cos \Phi + \left[\lambda \frac{(s-L)^5}{5,48} + \frac{\lambda L}{2,S} \cdot I_{Gy1} \cdot s^2 \right] \cdot \dot{\delta}^2 \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi + \lambda \cdot \frac{(s-L)^4}{24} \cdot \sin \Phi (p + c) \cdot \dot{\delta}^2 - \frac{\lambda}{8} \cdot \sin 2\Phi \cdot \left(\frac{s^5}{20} - \frac{s^4 \cdot L}{12} - \frac{s^3 \cdot L^2}{6} + \frac{L^3 \cdot s^2}{2} \right) \cdot \dot{\delta}^2 + \frac{(s-L)^3}{6} \cdot [X_{21} \cdot \sin \Phi + Z_{21} \cdot \cos \Phi] + C_1 s + C_2$$

en $s = 0$, $k(0) = 0$

$$0 = -\lambda \cdot \frac{L^4}{24} g \cdot \cos \Phi + \left[-\lambda \frac{L^5}{5,48} \right] \cdot \dot{\delta}^2 \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi + \lambda \cdot \frac{L^4}{24} \cdot \sin \Phi (p + c) \cdot \dot{\delta}^2 - \frac{L^3}{6} \cdot [X_{21} \cdot \sin \Phi + Z_{21} \cdot \cos \Phi] + C_2$$

$$E.I.k(L) = + \frac{\lambda L^3}{2,S} \cdot I_{Gy1} \cdot \dot{\delta}^2 \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi - \frac{\lambda}{8} \cdot \sin 2\Phi \cdot \left(\frac{3 \cdot L^5}{10} \right) \cdot \dot{\delta}^2 + C_1 \cdot L + C_2$$

avec $C_2 = +\lambda \cdot \frac{L^4}{24} g \cdot \cos \Phi + \lambda \frac{L^5}{5,48} \cdot \dot{\delta}^2 \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi - \lambda \cdot \frac{L^4}{24} \cdot \sin \Phi (p + c) \cdot \dot{\delta}^2 + \frac{L^3}{6} \cdot [X_{21} \cdot \sin \Phi + Z_{21} \cdot \cos \Phi]$

et

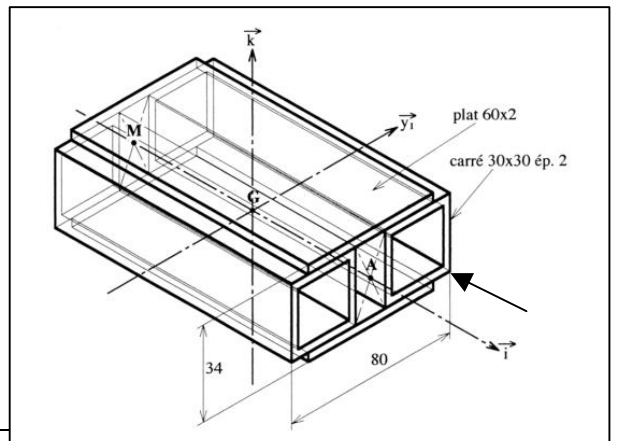
$$C_1 = \lambda \cdot \frac{L^3}{6} g \cdot \cos \Phi - \lambda \frac{L^4}{48} \cdot \dot{\delta}^2 \cdot \sin \Phi \cdot \cos \Phi - \lambda \cdot \frac{L^3}{6} \cdot \sin \Phi (p + c) \cdot \dot{\delta}^2 - \frac{L^2}{2} \cdot [X_{21} \cdot \sin \Phi + Z_{21} \cdot \cos \Phi]$$

Soit numériquement $C_2 = -0,98$ et $C_1 = 8,17$ d'où : $k(L) \approx 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
 Les conséquences concernant le déplacement et la rotation de la section en bout de bras seront donc très minimes lors de la phase de peinture.

Ñ Q-4-6)

Si L_{21} est non nul alors de la torsion apparaît introduisant une rotation ω_i de la poutre. De plus, un moment de flexion autour de \vec{k} apparaît introduisant une rotation ω_k et un déplacement U_{y1} . Pour la contrainte, cisaillement et traction se superposent

donnant une contrainte équivalente $\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$.



Le calcul de cette contrainte maximale équivalente est possible mais nous pouvons noter que τ n'est pas aisé à déterminer car la poutre n'est pas de section circulaire. De plus σ est la superposition de deux composantes du moment fléchissant.

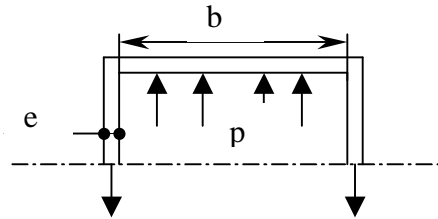
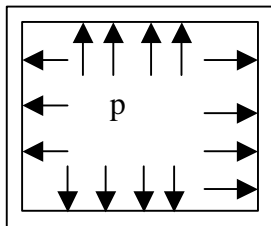
La contrainte sera maximale à l'encastrement dans un "coin" de la section (voir flèche sur la figure précédente).

Ñ Q-4-7)

$$2e.\sigma = b.P \Rightarrow \sigma = \frac{b.P}{2.e} = \frac{26.0,8.10^6}{2.2} = 5,2 \text{ MPa}$$

Une pression de 0,8 MPa génère des tensions dans les parois de la poutre de l'ordre de 5,2 MPa. On peut donc les négliger dans le dimensionnement de la poutre.

De plus cette pression déforme "en bloc" la poutre sans provoquer de flexion ou torsion supplémentaire. Aucun effet néfaste supplémentaire est à prévoir sur le mouvement du pistolet.



Ñ Q-5-1)

Nombre de Reynolds $R_e = \frac{V.D}{\gamma}$

$V = 1\text{m/s}$

$D = 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

$\gamma = 0.15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ soit $R_e = 3,33$

Ñ Q-5-2)

$\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{V}$ Or \vec{V} présente une symétrie de révolution $\vec{V} \begin{cases} V_r \\ V_\varphi \\ V_\theta = 0 \end{cases}$

et la symétrie impose $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

Donc : $\text{rot } \vec{V} \begin{cases} \frac{1}{r \sin \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \\ \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} = 0 \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r V_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right) = \Omega(r, \varphi) \end{cases}$ On en conclut que : $\vec{\Omega} = \Omega(r, \varphi) \vec{e}_\theta$

Ñ Q-5-3)

Le régime de Stokes permet d'écrire que :

$$\overrightarrow{\text{grad}} (P - P_0) = \mu \overline{\Delta} \vec{V} \quad (2) \quad \text{et } \text{div} \vec{V} = 0 \quad (1)$$

En reprenant les formules vectorielles de l'annexe 3, il vient :

$$\overline{\Delta} \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{V}) - \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) \quad (3)$$

Le premier terme est nul car $\text{div} \vec{V} = 0$

Appliquons la divergence de l'expression (2)

$$\text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} (P - P_0)) = \text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} P) = \Delta P \quad \text{par définition}$$

Au deuxième membre

$$\text{div} (\mu \overline{\Delta} \vec{V}) = -\mu \text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})) = -\mu \text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\Omega})$$

Par définition cette expression est nulle, donc :

$$\Delta P = 0$$

L'équation (3) permet d'écrire

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = -\mu \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\Omega}$$

Appliquons le rotationnel aux deux membres $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{grad}} P) = -\mu \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\Omega})$

Par définition le premier membre est nul. Le second s'exprime par

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\Omega}) &= \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{\Omega}) - \overline{\Delta} \vec{\Omega} \\ \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{\Omega}) &= \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})) \end{aligned}$$

Par définition le deuxième membre est nul, donc : $\overline{\Delta} \vec{\Omega} = \vec{0}$

Ñ Q-5-4)

Nous venons de voir que $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\Omega}) = \vec{0}$

Exprimons le dans le repère r, φ, θ , en utilisant l'annexe 1.

$$\vec{\Omega} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\Omega} \begin{vmatrix} \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial (\Omega \sin \varphi)}{\partial \varphi} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial (r \Omega)}{\partial r} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{\Omega}) \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial(r\Omega)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial(\Omega \sin \varphi)}{\partial \varphi} \right) \right] = 0 \end{cases}$$

On recherche à exprimer Ω sous la forme $\Omega = f(r).g(\varphi)$.

La composante suivante \vec{e}_θ de $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{\Omega})$ s'exprime par : $\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\partial(rfg)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial(fg \sin \varphi)}{\partial \varphi} \right) \right] = 0$

Soit en notant par f' et f'' les dérivées de f par rapport à r et g' et g'' les dérivées de g , par rapport à φ

$$\frac{\partial}{\partial r} (-fg - rf'g) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r \sin \varphi} (fg \cos \varphi + fg' \sin \varphi) \right) = 0$$

$$-2f'g - rf''g - f \left(\frac{1}{r} g'' + \frac{1}{r \tan \varphi} g' - \frac{\Omega}{r} \frac{1 + \tan^2 \varphi}{\tan^2 \varphi} \right) = 0$$

Soit en multipliant par $\frac{r}{fg}$

$$\frac{(r^2 f'' + 2rf')}{f} + \frac{g'' + \frac{1}{\tan \varphi} \left[g' - g \frac{1 + \tan^2 \varphi}{\tan \varphi} \right]}{g} = 0$$

Expression en f et g séparés devant obligatoirement être telle que :

$$r^2 f'' + 2rf' = Af(4) \text{ avec } A \text{ constante à définir}$$

$$g'' + \frac{1}{\tan \varphi} \left[g' - g \frac{1 + \tan^2 \varphi}{\tan \varphi} \right] = -Ag \quad (5)$$

Si $g = \sin \varphi$ on a dans (5)

$$-\sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \left[\cos \varphi (1 + \tan^2 \varphi) \right] = A \sin \varphi$$

$$-\sin \varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} \left[-\frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right] = -2 \sin \varphi = -A \sin \varphi$$

Expression possible conduisant à $A = 2$

Vérification du formalisme de f dans (4)

$$f = \frac{\lambda_1}{r^2} + \lambda_2 r$$

$$r^2 \cdot \left(\frac{6\lambda_1}{r^4} \right) + 2r \left(\frac{-2\lambda_1}{r^3} + \lambda_2 \right) = 2 \left(\frac{\lambda_1}{r^2} + \lambda_2 r \right)$$

$$\frac{2\lambda_1}{r^2} + 2r\lambda_2 = 2 \left(\frac{\lambda_1}{r^2} + \lambda_2 r \right)$$

Egalité vérifiée qui permet d'écrire que : $\bar{\Omega} = \left(\frac{\lambda_1}{r^2} + \lambda_2 r \right) \sin \varphi \bar{e}_\phi$ quand $r \rightarrow \infty$ $\Omega \rightarrow 0$ donc $\lambda_2 = 0$

Ñ Q-5-5)

L'équation (2) s'écrit

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P - P_o) = \mu \bar{\Delta} \bar{V} = -\mu \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \bar{V} = -\mu \overrightarrow{\text{rot}} \bar{\Omega}$$

Or :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \bar{\Omega} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial(\Omega \sin \varphi)}{r \sin \varphi} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Omega) & \\ 0 & \end{vmatrix}$$

Donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P - P_o = -\mu \begin{vmatrix} \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\lambda_1}{r^2} \sin^2 \varphi \right) = \frac{\lambda_1}{r^3} \cdot 2 \cos \varphi \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\lambda_1}{r} \cdot \sin \varphi \right) = \frac{\lambda_1}{r^3} \sin \varphi \\ 0 \end{vmatrix}$$

Soit $\frac{\partial}{\partial r} (P - P_o) = -2\mu \cos \varphi \frac{\lambda_1}{r^3}$ (6)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (P - P_o) = -\mu \sin \varphi \frac{\lambda_1}{r^3}$$
 (7)

$$P - P_o = \mu \cos \varphi \frac{\lambda_1}{r^2} + h(r)$$

En dérivant par rapport à r et en égalant avec (6) il vient

$$-2\mu \cos \varphi \frac{\lambda_1}{r^3} + h'(r) = -2\mu \cos \varphi \frac{\lambda_1}{r^3}$$

$$h'(r) = 0 \quad \text{donc } h(r) = \text{cte}$$

$$\text{Comme } \lambda_1 = \frac{3DV_0}{4}$$

$$P = P_0 + 3\mu \frac{D \cos \varphi}{4r^2} V_0 + \text{cte}$$

$$\text{Pour } r \rightarrow \infty \quad P = P_0 \Rightarrow \text{cte} = 0$$

$$P = P_0 + \frac{3\mu D \cos \varphi}{4r^2} V_0$$

Ñ Q-5-6)

Le résultat précédent montre que l'écoulement d'un fluide à vitesse V_0 autour d'une sphère exerce sur celle-ci des efforts de pression et de viscosité. La contrainte de cisaillement est par ailleurs fournie en annexe 2.

$$\tau_{\varphi r}(r, \varphi) = \mu \left(\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial r} - \frac{V_{\varphi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right)$$

En tout point de la sphère les forces de pression et de viscosité s'expriment donc par (en se référant aux rotations de la figure ci-contre)

$$d\vec{F}^P = -P(a, \varphi) ds \cdot \vec{n}$$

$$d\vec{F}^v = -\tau_{\varphi r}(a, \varphi) ds \cdot \vec{e}_{\varphi}$$

En projetant sur \vec{ox}

$$\vec{ox} \cdot \vec{n} = \cos \varphi.$$

$$ds = a^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$$

$$F_x^P = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} - \left(P_0 + \frac{3}{2} \mu V_0 \frac{\cos \varphi}{a} \right) \cos \varphi a^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$$

$$F_x^P = 2\pi \int_0^{\pi} P_0 a^2 \sin \varphi d\varphi \sin \varphi - 2\pi \int_0^{\pi} \frac{3}{2} \mu a V_0 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi$$

$$\left[2\pi a^2 P_0 \frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\pi} + 2\pi \int_{+1}^{-1} \frac{3}{2} \mu a V_0 \cos \varphi d \cos \varphi$$

$$F_x^P = 0 - 2\pi \mu V_0 a$$

En ce qui concerne le cisaillement

$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{x} = -\sin \varphi$$

$$dF_x^v = +\mu \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right) \sin \varphi a^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$$

Rappelons que (question 5.5)

$$V_r = V_0 \left(\frac{3a}{2r} - \frac{a^3}{2r^3} \right) \cos \varphi$$

$$V_\varphi = -V_0 \left(\frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{4r^3} \right) \sin \varphi$$

d'où en calculant la force pour $r = a$

$$F_x^v = - \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \mu \left(\frac{3a}{4r^2} + \frac{3a^3}{4r^4} + \frac{3a}{4r^2} + \frac{a^3}{4r^4} - \frac{3a}{2r^2} + \frac{a^3}{2r^4} \right)_{r=a} a^2 \sin^2 \varphi V_0 \sin \varphi d\varphi$$

$$\begin{aligned} F_x^v &= -3\pi\mu V_0 a \int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi \\ &= -3\pi\mu V_0 a \int_1^{-1} (\cos^2 - 1) d \cos \varphi \end{aligned}$$

$$F_x^v = -3\pi\mu V_0 a \times \frac{4}{3} = -4\pi\mu V_0 a$$

La traînée totale (opposée à la direction d'avancement) vaut donc

$$\boxed{F = F_x^p + F_x^v = -6\pi\mu V_0 a}$$

Application numérique

$$\mu = \nu \cdot \rho$$

Pour l'air, ν est donné à la température d'éjection de 20 °C et ρ à 0 °C.

L'air se comportant comme un gaz parfait :

$$\rho = \rho_0 \frac{T_0}{T}$$

$$\text{Soit } F = 6 \cdot \pi \cdot 0,15 \cdot 10^{-4} \cdot 1,296 \cdot \frac{273}{293} \cdot 25 \cdot 10^{-6}$$

$$F = 8,5 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

Ñ Q-5-7)

Le nombre de Reynolds relatif à l'écoulement autour d'une sphère de peinture a été calculé en 5.1 ($Re_p = 3.3$).

L'annexe 4 nous fournit les paramètres de la corrélation à retenir :

$$\begin{aligned} \text{Nu}_D &= k \text{Re}_D^n \\ k &= 0.891 \\ n &= 0.33 \end{aligned} \Rightarrow \text{Nu}_D = 1.32$$

Le coefficient d'échange convectif est donc de :

$$\begin{aligned} h &= \frac{\text{Nu}_D \cdot \lambda_a}{D} \\ h &= \frac{1.32 \times 0.025}{50 \cdot 10^{-6}} = 660 \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-1} \end{aligned}$$

et le nombre de Biot :

$$B_i = \frac{hD}{\lambda_{\text{peinture}}} = \frac{660 \times 50 \cdot 10^{-6}}{0.4} = 0,08 < 0.1$$

Ñ Q-5-8)

L'hypothèse $B_i < 0.1$ étant vérifiée on peut considérer que la température de la sphère est la même en tout point.

L'équation de l'énergie en régime transitoire s'écrit donc :

$$\rho c V \frac{dT}{dt} = hs(T_a - T)$$

où

S et V sont les surface et volume de la sphère ρ et c la masse volumique et la chaleur massique de la peinture.

D'où l'évolution de la température de la peinture

$$\frac{dT}{T - T_a} = - \frac{h4\pi a^2}{\rho c \frac{4}{3}\pi a^3} dt$$

Soit

$$\boxed{\frac{T - T_a}{T_o - T_a} = e^{-\frac{h3}{\rho c a} t}}$$

Application numérique : recherche de temps t pour obtenir $T = 21 \text{ }^\circ\text{C}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{40} &= e^{-\frac{3 \times 660}{2 \cdot 10^6 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} t} \\ t &= 0.186 \text{ s} \end{aligned}$$

(la vitesse totale de la peinture étant de 1,7 m/s la distance parcourue sera au maximum de l'ordre de 30 cm avant que d'être à température ambiante).

Ñ Q-5-9)

L'écoulement de la température se fait en canalisation cylindrique. Le nombre de Reynolds relatif au diamètre D de la canalisation $Re_D = \frac{VD}{\nu}$ conduit, pour une valeur inférieure à 2000, à un écoulement laminaire.

Donc

$$\frac{VD}{\nu} < 2000$$

$$\frac{VD}{\nu} < 2000$$

$$\frac{V \frac{\pi D^2}{4}}{\frac{\pi D}{4} \nu} = \frac{4 Q_v}{\pi D \nu} < 2000$$

avec Q_v débit volume de peinture

$$D > \frac{4 \rho Q_v}{2000 \cdot \pi \cdot \mu}$$

Le cas extrême est donné pour un débit volume maximum ($20 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$) donné par la pompe et une viscosité minimale ($27.5 \cdot 10^{-3}$ à 65°C)

$$D > \frac{4 \times 20 \cdot 10^{-6} \times 960}{2000 \cdot \pi \cdot 27,5 \cdot 10^{-3}} = 0.44 \text{ mm}$$

Pour répondre au problème des pertes de charge, le diamètre des différents morceaux du circuit sera toujours supérieur à cette valeur.

L'écoulement sera laminaire en tout point du circuit.

Ñ Q-5-10)

En écoulement laminaire les pertes de charge linéiques sont telles que

$$\Delta P = f \frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2} \quad \text{avec} \quad f = \frac{64}{Re}$$

$$\Delta P = \frac{64 \cdot \mu}{\rho V D} \frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2}$$

soit $Q_v = V \cdot \frac{\pi D^2}{4}$ le débit volume

$$\Delta P = \frac{64 \times \frac{\pi D}{4}}{Q_v} \cdot \mu \frac{L}{D} \frac{Q_v^2}{2 \frac{\pi^2 D^4}{16}}$$

$$\Delta P = \frac{128\mu L}{\pi D^4} Q_v \quad \text{L'expression est de la forme } k Q_v, \text{ proportionnelle à } Q_v.$$

Ñ Q-5-11)

Le débit de la pompe est tel que

$$Q_v = 20 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \quad \text{pour } \Delta P < 30 \text{ bars}$$

et

$$Q_v = 20 \left[1 - \frac{(\Delta P - 30)}{5} \right] \quad \text{pour } 30 < \Delta P < 35 \text{ bars.}$$

soit

$$\Delta P = 35 - \frac{Q_v}{4} \quad \text{si } P \text{ est en bar et } Q_v \text{ en cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$0 < Q_v < 20 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

Examinons les conditions de fonctionnement.

En 2 (pot de peinture) la pression est la pression atmosphérique

En 5 (entrée pistolet) la pression de fonctionnement doit être supérieure à 10 bars (condition de pulvérisation).

Lorsque le pistolet débite au maximum ($500 \text{ cm}^3 \text{ mm}^{-1} = 8.33 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$) la pompe doit travailler sous une pression raisonnable inférieure à 30 bars donc avec un débit de $20 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$.

Ces conditions conduisent à :

Branche 2-0	débit : $8.33 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ Perte de charge $\ll 1$ bar sinon la pompe cavite et ne peut aspirer la peinture
Branche 0-00	débit : $20 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ Perte de charge $\ll 1$ bar pour les mêmes raisons
Branche 5-6-7-0	débit : $11.66 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ Perte de charge > 10 bars pour assurer une pulvérisation correcte
Branche 00-5	débit : $20 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ Perte de charge réduite mais sans contrainte particulière ($\Delta P_{00-5} + \Delta P_{5-00} \leq 30 \text{ bars}$)

Ces conditions conduisent à (en négligeant les variations d'altitude et de variations d'énergie cinétique) :

$$\Delta P_{2-0} = \frac{128\mu L}{\pi D^4} Q_v$$

$$= \frac{128.120 \cdot 10^{-3}}{\pi D^4} \cdot 1.8,33 \cdot 10^{-6} = \frac{4 \cdot 10^{-5}}{D^4} \text{ (en Pa)}$$

$$\Delta P_{2-0} = 0,31 \text{ bar pour } D = 6 \text{ mm}$$

$$0,17 \text{ bar pour } D = 7 \text{ mm}$$

$$0,1 \text{ bar pour } D = 8 \text{ mm}$$

On voit donc qu'il faut $D_{2-0} \approx 7$ à 8 mm pour éviter tout problème.

De même :

$$\Delta P_{0-00} = \frac{128 \mu \cdot 0.5}{\pi D^4} \cdot 20 \cdot 10^{-6} = \frac{2.8 \cdot 10^{-5}}{D^4}$$

avec
$$\mu_{0.00} = \frac{8.33 \times 120 \cdot 10^{-3} + 11.66 \times 30.5 \cdot 10^{-3}}{20} = 68 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

$$\begin{aligned} \Delta P_{0.00} &= 0.44 \text{ bar pour } D = 5 \text{ mm} \\ &0.21 \text{ bar pour } D = 6 \text{ mm} \\ &0.11 \text{ bar pour } D = 7 \text{ mm} \end{aligned}$$

On pourra convenir d'un diamètre de canalisation 2-0-00 de 7 mm.

Pour la canalisation de retour 5-0, il nous faut $\Delta P_{5-0} > 10$ bars

Pertes de charge linéiques :

$$\Delta P_1 = \frac{128 \cdot 30,5 \cdot 10^{-3} \cdot 5}{\pi D^4} \cdot 11,66 \cdot 10^{-6} = \frac{7,2 \cdot 10^{-5}}{D^4}$$

Pertes de charge singulières auxquelles on peut affecter la moitié de la perte totale.

$$\Delta P_s = 15 \rho \frac{V^2}{2} = 15 \rho \frac{V^2 S^2}{2 S^2} = \frac{15 \cdot \rho Q_v^2}{2 \frac{\pi^2 D^4}{16}} = \frac{0,16 \cdot 10^{-5}}{D^4}$$

(Ces pertes sont négligeables devant l'aspect linéique)

$$\Delta P_{5-0} = \frac{7.4 \cdot 10^{-5}}{D^4} \left| \begin{array}{l} 18,9 \text{ bars pour } D = 2,5 \text{ mm} \\ 12 \text{ bars pour } D = 2,8 \text{ mm} \\ 9,1 \text{ bars pour } D = 3 \text{ mm} \end{array} \right.$$

On voit que le problème est très contraint et qu'une canalisation normalisée de 3mm est insuffisante pour maintenir 10 bars utiles au pistolet. On sera tenté de choisir un dimension normalisée de 2,5 mm de diamètre.

Canalisation 00-5

Elle se décompose en trois tronçons parcourus par $20 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ et de viscosité évolutive.

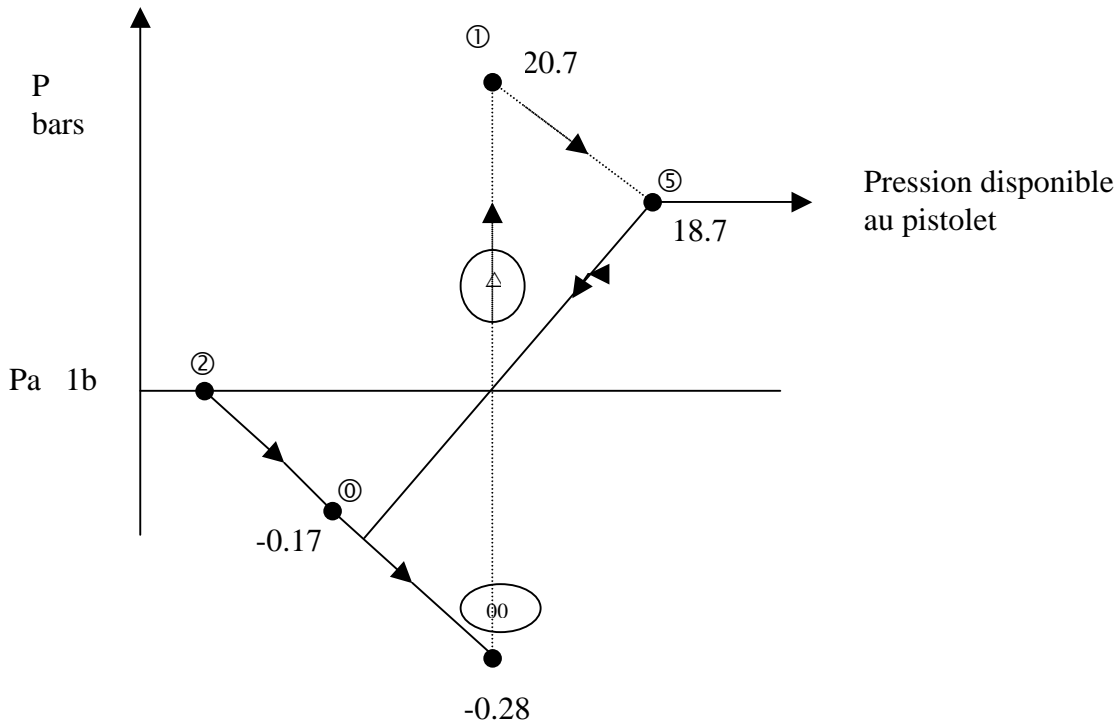
$$\Delta P_1 = \frac{128 \cdot 10^{-9}}{\pi D^4} [20(1 \times 38 + 1 \times 27,5 + 3 \times 28,5)] = \frac{12 \cdot 10^{-5}}{D^4}$$

$$\Delta P_s = \frac{0.16 \cdot 10^{-5}}{D^4} \quad (\text{négligeable})$$

$$\Delta P_{00-5} = \frac{12,2 \cdot 10^{-5}}{D^4} \left| \begin{array}{l} 2 \text{ bars pour } D = 5 \text{ mm} \\ 4.8 \text{ bars pour } D = 4 \text{ mm} \end{array} \right.$$

On peut se fixer un diamètre de 5 mm pour minimiser les pertes de charge sur ce tronçon.

En fonctionnement le graphe des pressions dans le circuit est le suivant :



Toutes les fonctions sont assurées et la pompe à 20.7 bars débite bien $20 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$

Arrêt de fonctionnement

Il s'agit de vérifier si la pompe ne fonctionne pas en limite de possibilité ($P = 35 \text{ bars}$) entraînant par la même une usure forcée $\Delta P_{\text{pompe}} = \Delta P_{\text{perte de charge}}$ (avec ΔP_{pompe} à rechercher vraisemblablement entre 30 et 35 bars).

Soit en P_a :

$$\Delta P = 35 \cdot 10^5 - \frac{Q_v}{410^{-11}} = \frac{128}{\pi} Q_v \left[\sum_{00}^5 \frac{\mu L}{D_1^4} + \frac{\mu L_{5-0}}{D_2^4} + \frac{\mu L_{0-00}}{D_3^4} \right] + \frac{120\rho Q_v}{\pi^2} \left[\frac{1}{D_1^4} + \frac{1}{D_2^4} \right]$$

On est conduit à l'équation de 2^{ème} degré en Q_v

$$3.1810^{14} Q_v^2 + 1.9410^{11} Q_v = 3510^5$$

qui admet $17.5 \cdot 10^{-6}$ soit $17.5 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ comme solution.

La pompe travaille en limite de ses possibilités sans trop pénétrer dans la zone critique 30-35 bars (30.6 bars).