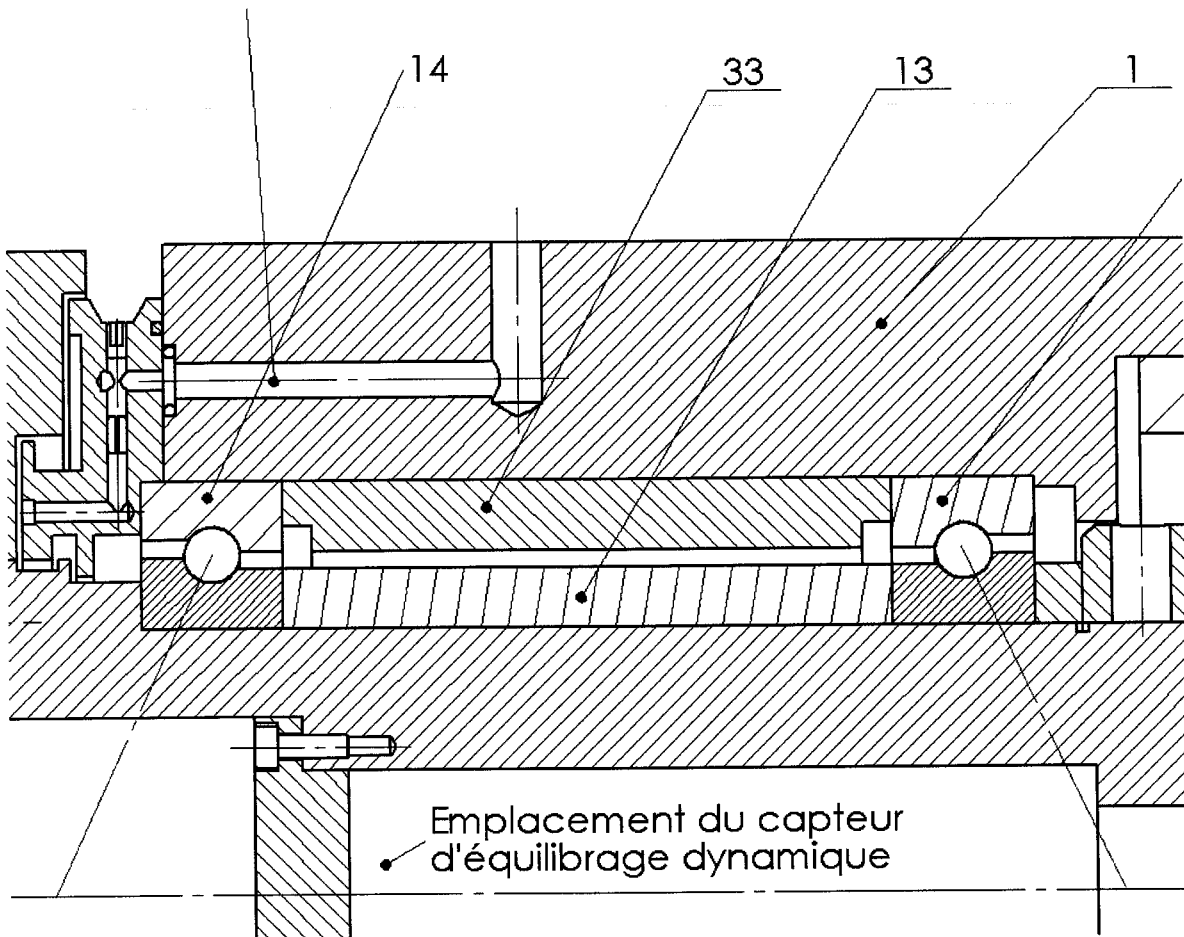


Eléments de correction : partie 2



Q2.1 Etude de la loi de comportement locale

Montrer que la loi de comportement locale au niveau d'un élément roulant peut se mettre sous la forme :

La relation issue de la théorie de Hertz peut s'écrire au niveau bille-bague intérieure et bille-bague extérieure.

$$Q_e = K_e \delta_e^p \text{ et } Q_i = K_i \delta_i^p$$

δ_e et δ_i représentent les déplacements du centre de la bille par rapport au centre de courbure de la bague intérieure et extérieure.

En isolant la bille et en **négligeant les effets d'inerties** devant la charge transmise par l'élément roulant on obtient $Q_n = Q_i = Q_e$

Le déplacement total entre les deux centres de poussée sous charge est la somme des déplacements δ_e et δ_i .

$$\delta_n = \delta_e + \delta_i = \left(\frac{Q_e}{K_e}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{Q_i}{K_i}\right)^{\frac{1}{p}} = (Q_n)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{1}{K_e}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{K_i}\right)^{\frac{1}{p}} \right]$$

Le comportement entre les deux bagues est décrit par la relation :

$$Q_n = K_n \delta_n^p$$

Avec l'expression du coefficient K_n de la loi de comportement :

$$\left(\frac{1}{K_n}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{K_e}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{K_i}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposer sous forme d'organigramme le calcul du coefficient K_n de la loi de comportement.

Calcul du coefficient K_n à partir de la loi de Hertz

$$\delta = \delta^* \left[\frac{3Q}{2\Sigma\rho} \left(\frac{(1.\mu_1^2)}{E_1} + \frac{(1.\mu_2^2)}{E_2} \right) \right]^{\frac{2}{3}} \frac{\Sigma\rho}{2}$$

Pour un angle de contact α donné

1. Données : $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, r_i, r_e, D$
2. Calculs intermédiaires : $f_i ; f_e ; \gamma$
3. Calculs des sommes et différences de courbure : $\Sigma\rho_i ; \Sigma\rho_e ; F(\rho)_i ; F(\rho)_e$
4. Calcul de δ_i^* et δ_e^* en fonction de $F(\rho)_i$ et $F(\rho)_e$
5. $K_i = \frac{2,15 \cdot 10^5 \cdot (\delta_i^*)^{-1,5}}{\sqrt{\Sigma\rho_i}}$ et $K_{ei} = \frac{2,15 \cdot 10^5 \cdot (\delta_e^*)^{-1,5}}{\sqrt{\Sigma\rho_e}}$ puis calcul de K_n .

☞ Q22 Etude du comportement du roulement sous charge axiale

Montrer que la loi de comportement axiale du roulement peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{F_a}{ZK_n(BD)^{1,5}} = \sin(\alpha) \left(\frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha)} - 1 \right)^{1,5}$$

En isolant la bague intérieure, le principe fondamental de la statique donne :

$$Q_n = \frac{F_a}{Z \cdot \sin(\alpha)}$$

Loi de comportement locale du roulement :

$$Q_n = K_n \delta_n^p \text{ avec } p = 3/2$$

Fermeture géométrique $C_e C_i C_i^*$

$$C_e C_i^* \cdot \cos(\alpha) = C_e C_i \cdot \cos(\alpha_0) = BD \cdot \cos(\alpha_0)$$

Par définition $\delta_n = C_e C_i^* - C_e C_i$, donc

$$\delta_n = B.D. \left(\frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha)} - 1 \right)$$

D'où la relation cherchée

$$\frac{F_a}{ZK_n (BD)^{1.5}} = \sin(\alpha) \left(\frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha)} - 1 \right)^{1.5}$$

Montrer que le déplacement axial du roulement peut se mettre sous la forme suivante :

$$\delta_a = \frac{BD \sin(\alpha - \alpha_0)}{\cos(\alpha)}$$

Fermeture géométrique $C_e C_i C_i^*$

$$C_e C_i^* \cdot \sin(\alpha) = C_e C_i \cdot \sin(\alpha_0) + \delta_a = BD \cdot \sin(\alpha_0) + \delta_a$$

$$B.D. \left(\frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha)} \right) \cdot \sin(\alpha) = BD \cdot \sin(\alpha_0) + \delta_a$$

$$\delta_a = B.D. \frac{\sin(\alpha - \alpha_0)}{\cos(\alpha)}$$

☞ Q23 Calcul de l'angle de contact sous charge

Proposer un algorithme de résolution de l'équation 2.5

$$\frac{F_a}{ZD^2 K} = \sin(\alpha) \left(\frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha)} - 1 \right)^{1.5}$$

en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson pour trouver le zéro de la fonction $f(x) = 0$
 $x = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \frac{\frac{F_a}{ZD^2 K} - \sin(\alpha) \left(\frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha_{n-1})} - 1 \right)^{1.5}}{\cos(\alpha) \left(\frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha_{n-1})} - 1 \right)^{1.5} + 1.5 \tan^2(\alpha_{n-1}) \left(\frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha_{n-1})} - 1 \right)^{0.5} \cdot \cos(\alpha_0)}$$

Des candidats ont proposé des méthodes de dichotomie, qui convenaient aussi bien.

Pour un chargement axial, $F_a = 600N$ et la géométrie interne du roulement définie sur le document 2-2, calculer

Epreuve de conception de systèmes : éléments de correction

- L'angle de contact sous charge α ;
- Le déplacement axial δ_a de la BI/BE.

Application numérique:

Il convenait de garder un nombre de chiffres significatifs assez grand pour ne pas propager d'erreurs dans les calculs.

Fa	600	N
Z	30	
D	9.525	mm
K	50	MPa
ri	4.776	mm
re	4.776	mm
fi	0.5014	
fe	0.5014	
B	0.0028	

	équilibre	alpha
0	4.4089E-03	25.0000
1	-2.0658E-03	30.7296
2	-3.3150E-04	29.8494
3	-3.4072E-05	29.6812
4	-3.0234E-06	29.6633
5	-2.6354E-07	29.6617

soit un déplacement axial de $\delta_a = 0.0025$ mm et un angle de contact de $\alpha_a = 29,7^\circ$

☞ Q24 Etude de l'installation de la précharge

En utilisant les relations et notations de la partie 2.a calculer l'angle de contact α_p de chaque roulement et le déplacement δ_p à installer pour réaliser cette précharge (pour un roulement).

Expliquer en quelques lignes la procédure à suivre pour installer cette précharge.

Il suffisait de reprendre les résultats de la question précédente. En installant une précharge de 600N dans le montage, les roulements vont avoir un angle de contact $\alpha_p = 29.7^\circ$, le déplacement de chaque bague extérieure par rapport à sa bague intérieure sera de $\delta_p = 2,5\mu\text{m}$.

Les candidats qui n'ont pas réussi à traiter la question 2.3 pouvaient utiliser le document DR1 qui donnait un ordre de grandeur de la précharge géométrique à installer.

Pour installer cette précharge le constructeur propose des paires de roulements appairées avec une précharge faible, moyenne ou forte, les roulements sont montés entre deux entretoises. Les faces planes des bagues extérieures sont rectifiées de manière à créer un décalage de $2.5 \mu\text{m}$ par rapport aux faces planes des bagues intérieures. La difficulté vient que le montage de roulements doit avoir cette précharge en régime thermique permanent de la broche. Pour cela deux solutions peuvent être utilisées :

- rectifier à la même longueur les deux entretoises et choisir une précontrainte forte, la dilatation différentielle des entretoises ramène la précontrainte à peu près à la valeur moyenne.
- rectifier les deux entretoises séparément pour faire apparaître une différence de longueur d'entretoise à froid redonnant des longueurs identiques à chaud. Dans les deux cas la maîtrise du comportement thermique de la broche est requise.

☞ Q2.5 Calcul de la raideur axiale de la broche

Epreuve de conception de systèmes : éléments de correction

Écrire le système d'équations à résoudre pour déterminer le déplacement axial δ_a de l'arbre.

Mise en place de la précontrainte

$$\text{Eq1 : } \frac{F_p}{ZD^2K} = \sin(\alpha_p) \cdot \left(\frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha_p)} - 1 \right)^{1.5} \quad \text{et Eq2 : } \delta_p = \frac{BD \sin(\alpha_p - \alpha_0)}{\cos(\alpha_p)}$$

Équilibre axial de l'arbre

$$\text{Eq3 : } F_a = F_1 - F_2$$

Relation de comportement du roulement 1

$$\text{Eq4 : } \frac{F_1}{ZD^2K} = \sin(\alpha_1) \cdot \left(\frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha_1)} - 1 \right)^{1.5} \quad \text{et Eq5 : } \delta_1 = \frac{BD \sin(\alpha_1 - \alpha_0)}{\cos(\alpha_1)}$$

Relation de comportement du roulement 2

$$\text{Eq6 : } \frac{F_2}{ZD^2K} = \sin(\alpha_2) \cdot \left(\frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha_2)} - 1 \right)^{1.5} \quad \text{et Eq7 : } \delta_2 = \frac{BD \sin(\alpha_2 - \alpha_0)}{\cos(\alpha_2)}$$

Relation de compatibilité des déplacements

$$\text{Eq8 : } \delta_1 = \delta_p + \delta_a, \quad \text{Eq9 : } \delta_2 = \delta_p - \delta_a,$$

Nous obtenons un système de 9 équations non linéaires à 9 inconnues ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_p; \delta_1, \delta_2, \delta_a, \delta_p, F_1, F_2$) fonctions de F_p (la précharge installée) et F_a (l'effort axial de référence).

$$\text{En combinant 3,4,6 : } \frac{F_a}{ZD^2K} = \sin(\alpha_1) \cdot \left(\frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha_1)} - 1 \right)^{1.5} - \sin(\alpha_2) \cdot \left(\frac{\cos(\alpha_0)}{\cos(\alpha_2)} - 1 \right)^{1.5}$$

$$\text{En combinant 5,7,8,9 : } \frac{2 \cdot \delta_p}{D \cdot B} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_0)}{\cos(\alpha_1)} + \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_0)}{\cos(\alpha_2)}$$

Il ne reste plus qu'un système de deux équations non linéaires à deux inconnues en α_1 et α_2 fonction de la précharge et de la charge axiale.

Pour tracer la courbe de raideur axiale de la broche il faut :

1. Se fixer une valeur de δ_a
2. Calculer $\delta_1 = \delta_p + \delta_a$ et $\delta_2 = \delta_p - \delta_a$
3. Calculer α_1 et α_2 à partir des équations 5 et 7 et de δ_1 et δ_2
4. Calculer F_1 et F_2 à partir des équations 4 et 6 et de α_1 et α_2
5. Puis calculer $F_a = F_1 - F_2$

Calculer le déplacement axial de la broche sous une charge purement axiale de référence de valeur $F_a = 1000N$.

Epreuve de conception de systèmes : éléments de correction

F_p	600	N
δ_p	0.0025	mm
α_p	29.66	degrés

F_a	1000	N
δ_a	0.0012	mm

F_1	1202	N
δ_1	0.0037	mm
α_1	31.73	degrés

F_2	202	N
δ_2	0.0013	mm
α_2	27.50	degrés

Sur le document *DR1* à rendre dans cette partie, tracer la courbe de raideur axiale de l'axe $F_a = f(\delta_a)$, la courbe sera construite en trois points et les quantités $F_1, F_2, F_a, F_p, \delta_1, \delta_2, \delta_a, \delta_p$ seront repérées clairement sur le graphique.

La résolution graphique permettait au candidat de trouver l'ordre de grandeur de la raideur axiale de la broche sans avoir résolue la partie ci-dessus.

☞ Q2.6 Influence du troisième roulement sur la rigidité radiale statique et dynamique

On désire étudier en avant projet l'influence du roulement de queue (rep 24) sur la rigidité statique et dynamique de la broche. Proposer une modélisation (hypothèses, type d'éléments, chargement, conditions aux limites, etc...) en vue d'une étude statique ou dynamique de la broche.

On ne demandait qu'une méthode, à titre d'exemple la démarche suivante pouvait être proposée.

En avant projet un logiciel de RDM permet déjà d'obtenir des résultats intéressants, (élément de poutre en 2D).

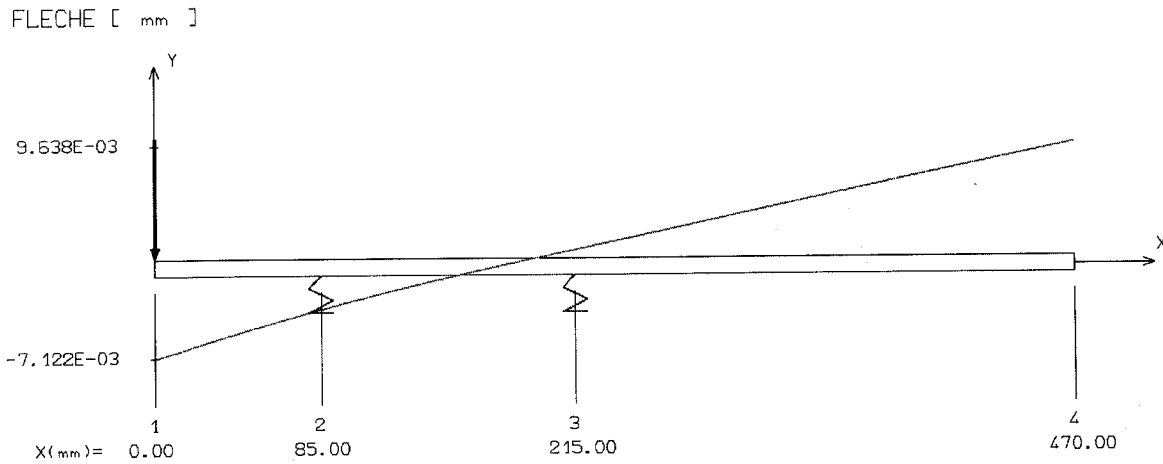
Pour l'étude statique, les roulements peuvent être modélisés par des appuis élastiques (linéaires) de raideur radiale donnée. Il faudrait reprendre l'étude précédente en comportement radial, ou consulter la documentation du constructeur qui donne une estimation de la raideur radiale du roulement à partir de sa raideur axiale

La rigidité radiale pour un montage de 4 roulements disposés en tandem "O" est de :

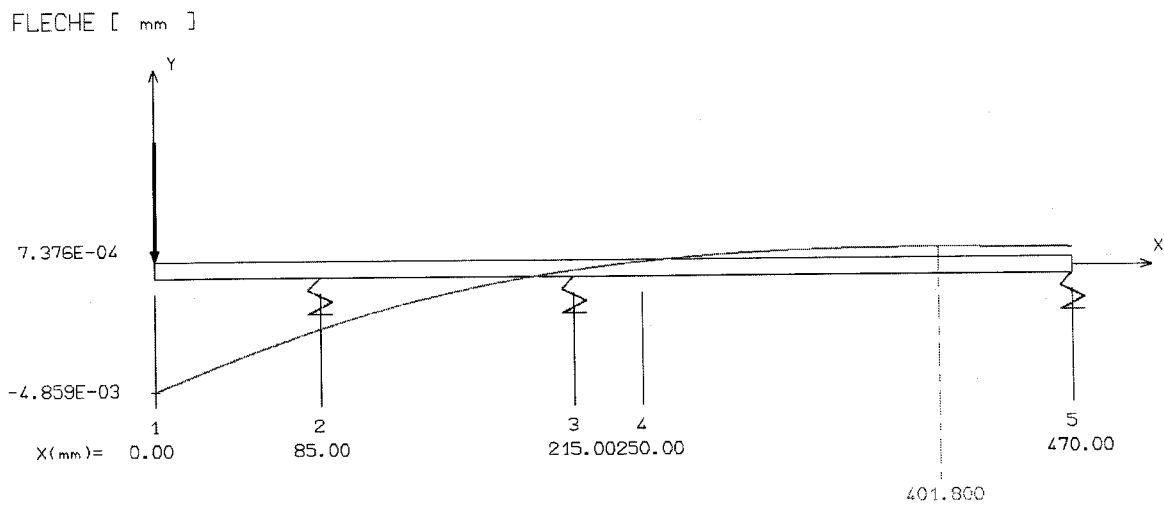
$$\text{disposition groupe de 4 rouls} \quad S_{ri} = 2.S_r = 4.S_a.$$

La broche peut être modélisée par une poutre constituée de différents éléments pour prendre en compte les variations d'inertie.

Pour l'étude statique



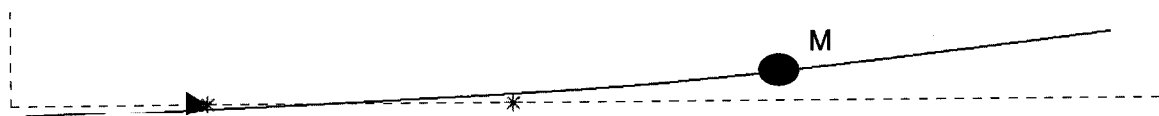
Etude statique, Poutre sur deux appuis : Chargement 1000N, raideur tangente radiale des roulement $K_2 = K_3$



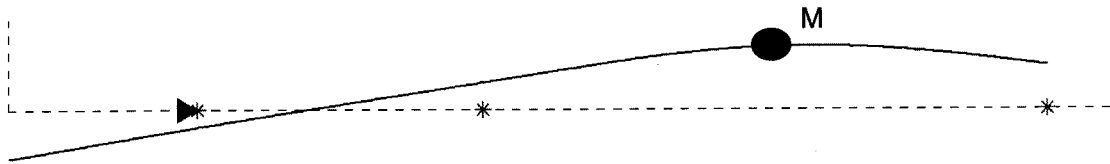
Etude statique, Poutre sur trois appuis : Charg 1000N, raideur tangente radiale des roulements $K_2 = K_3$ et K_5

Le gain sur la flèche est de 30%, il y a une influence du troisième roulement, mais ce n'est pas le paramètre sur lequel on joue si on veut optimiser la rigidité radiale au droit de la meule.

Pour l'étude dynamique



Etude dynamique, premier mode propre en flexion, poutre sur deux appuis : Rotor masse M, raideur tangente radiale des roulements $K_2 = K_3$, fréquence 460 Hz



Etude dynamique, premier mode propre en flexion, poutre sur trois appuis :
Rotor masse M , raideur tangente radiale des roulements $K_2 = K_3$ et K_5 , fréquence 1030 Hz

A l'inverse, on double la première fréquence propre en flexion. Bien entendu ces résultats ne sont que des ordres de grandeurs qui doivent être affinés par des codes de calculs éléments finis lors de la phase vérification optimisation du comportement de la broche.

☞ Q27 Modèle de comportement du roulement

Le modèle mis en place dans la question 2.1 est-il toujours acceptable ? Justifier, application numérique à l'appui.

Pour mettre en place le modèle de la question 2.1, l'hypothèse de base posée est que les effets d'inertie sont négligeables. Quand la vitesse de rotation passe de 7500 tr/min à 15000 tr/min cette hypothèse est à revoir. Parmi les autres phénomènes mis en jeu, on pourrait aussi citer la déformation des bagues, la dissipation thermique, la lubrification, etc...

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3, \quad M = \rho \cdot V, \quad F_i = M \cdot R_{\text{moy}} \cdot \omega^2$$

AN : $R = 4.7625 \text{ mm}$, $V = 452 \text{ mm}^3$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $M = 3.52 \text{ g}$, $N = 15000 \text{ tr/mn}$,
 $R_{\text{moy}} = 51.25 \text{ mm}$, $F_i = 446 \text{ N}$ soit 10 fois la charge transmise par une bille pour la précontrainte de 600N.

La prise en compte des effets d'inertie conduit à une autre théorie que celle développée dans la première partie. Le bilan des actions mécaniques sur une bille fait apparaître un effort de la bague intérieure Q_i et un angle de contact α_i , un effort de la bague extérieure Q_e et un angle de contact α_e et les effets d'inertie F_i .

☞ Q2.8 Mise en place de la précontrainte sur la nouvelle broche

Le choix de l'électrobroche s'est porté sur un moteur synchrone. Justifier le choix de ce type de motorisation par rapport à d'autres (asynchrone, ...).

Cette technologie d'électrobroche choisie par le constructeur de la machine est une technologie dite à « rotor froid », un moteur synchrone comporte des aimants permanents sur le rotor et des bobinages au stator. L'absence de bobinage au rotor entraîne l'absence de perte joule au niveau de rotor. La température de celui-ci est donc mieux maîtrisée. Pour les pertes joules au niveau du stator, elles sont évacuées par le refroidissement de la carcasse du moteur grâce au système de refroidissement représenté sur le plan. La maîtrise thermique de la broche est indispensable à la maîtrise des dilatations longitudinales.

Justifier, application numérique à l'appui, pourquoi le système de mise en place de la précontrainte de la question 2.4 n'est plus adapté à cette nouvelle broche.

Sur le plan les entretoises 33 et 16 ont une longueur de 100mm.

Si il existe une différence de température de 5 degrés entre l'entretoise extérieure et l'entretoise intérieure, celles-ci subiront une dilatation différentielle de $\delta L = \alpha.L.\Delta t$.

AN : $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ m/m/}^\circ$, $L = 100 \text{ mm}$, $\Delta t = 5^\circ$ soit $\delta L = 6 \text{ }\mu\text{m}$ soit l'ordre de grandeur de la précharge. Il faut donc trouver un système de précharge moins sensible aux variations de température.

☞ Q2.9 **Modèle de comportement du troisième roulement**

Proposer une solution constructive permettant d'annuler le jeu du roulement C de la broche porte meule.

La modélisation cinématique du roulement de queue pour la broche porte pièce est une liaison linéaire annulaire, avec du jeu radial. Ce jeu radial n'est bien entendu pas acceptable pour une broche tournant à 15000 tr/min.

Par rapport à la solution broche 7500 tr/min, on conserve :

- la possibilité de dilatation axiale du roulement de queue de la broche ;
- le système de précontrainte par ressort 45 ;
- le boîtier de roulement extérieur.

On intercale entre le boîtier de roulement extérieur et le bâti, une douille à billes précontrainte radialement. Voir solution industrielle sur le document réponse DR2.

☞ Q2.10 & 2.11 **Conception de la nouvelle broche**

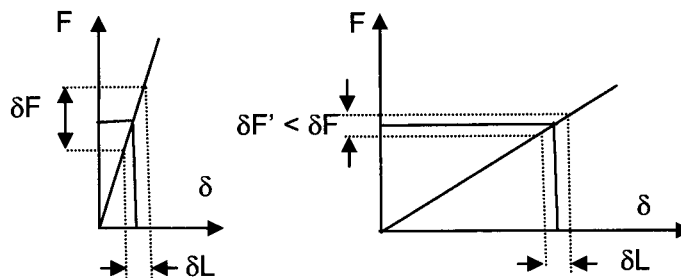
Sur le document DR2 proposer :

un nouveau système de mise en place de la précontrainte (question 2.8).

une solution constructive pour l'implantation du roulement de queue C, sans jeu radial (question 2.9).

Un système de lubrification (question 2.10).

Dans la broche 7500 tr/min, il existe deux entretoises entre les roulements montés en O. Une entretoise peut être modélisée par un ressort très raide (à peu près 10000 N/ μm). La moindre variation différentielle de longueur entre ces entretoises entraîne une variation de la précharge incompatible avec le bon fonctionnement de la broche. Même si la précontrainte est calculée pour le régime thermique nominal de fonctionnement, la moindre variation de



Solution entretoise

Solution ressorts

température d'une des bagues se traduira par une variation forte de la précharge.

Epreuve de conception de systèmes : éléments de correction

L'idée la plus simple est de remplacer ces entretoises par des ressorts plus souples qui assureront la même précontrainte axiale mais seront moins sensibles aux variations de longueur entre les bagues des roulements.

La solution proposée détaillée sur le document réponse DR2 comprend :

Un boîtier (13) pour les roulements B_1 et B_2 , ce boîtier est arrêté en rotation par la goupille (2), il est libre axialement. Des ressorts (1) assurent la précontrainte du montage de roulements, comme pour le montage du roulement de queue en boîtier sur le document 2-3. Cette solution est envisageable car les efforts axiaux en phase de rectification sont faibles.

La lubrification ne pose pas de problème particulier, il fallait injecter le brouillard d'huile dans le sens du cône vers le centre de poussé des roulements pour favoriser l'effet de pompage de l'huile sous l'effet des forces centrifuges. On peut facilement intégrer cette fonction sur les différentes entretoises du système (3), les pièces (7), (8) et (9) assurent la fonction étanchéité dynamique sans contact.

Pour le roulement de queue C, il est monté en boîtier (10), une douille à billes (11), montée serrée radialement permet la libre dilatation du roulement de queue. Des ressorts (12) assurent la précharge de ce roulement afin de garantir sa durée de vie.

Eléments de correction : partie 3

☞ Q3.1 Modèle d'étude.

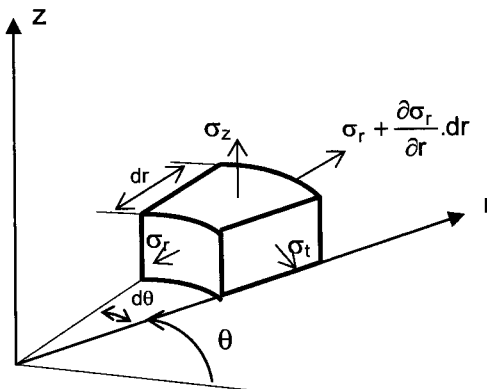
Justifier les hypothèses et le modèle retenu pour l'étude de la meule (modèle, chargement, conditions limites, ...)

Le modèle retenu pour la meule est le suivant :

- La meule est cylindrique, sa mise en position parfaite (appui plan, centrage court), pas de balourd. Elle est boulonnée sur un diamètre moyen 175 mm (2 séries de boulons : 4 vis en $d = 155$ mm et 8 vis en $d = 195$ mm). On remplace cette distribution discrète par une distribution continue en $r = (195 + 155)/2$.
- La meule est soumise à des forces volumiques d'inertie importantes dues à la rotation de 15 000 tr/min et à une masse volumique élevée de l'acier.
- Les efforts d'usinage sont négligés en rectification (ordre de grandeur $\approx 200-400$ N), ainsi que les effets thermiques (le système de lubrification de la meule permet de maintenir sa température constante sauf au point d'étincelle).
- Le solide considéré est de révolution. Il en va de même du chargement et des conditions aux limites. On se ramène donc à un modèle axisymétrique dans laquelle la base cylindrique est principale.

Soit z l'axe de révolution.

Un point du solide est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z)



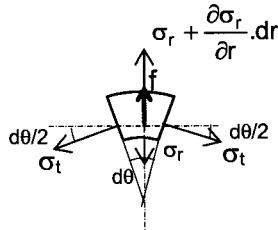
La meule est suffisamment mince pour que les contraintes soient supposées constantes dans toute l'épaisseur. De plus, si on fait abstraction du serrage des vis, aucune action suivant z ne génère de contraintes dans cette direction. La contrainte normale σ_z est nulle sur les deux faces et peut donc être considérées nulle sur toute l'épaisseur (modèle en contraintes planes).

Par symétrie de révolution autour de z , la contrainte selon la direction tangentielle σ_t ne dépend que de r .

On ne conserve donc que deux contraintes normales σ_r et σ_t .

Equations d'équilibre :

La meule est soumise à des contraintes d'inertie f : force d'inertie = $\rho.\omega^2.r$

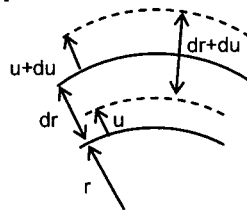


$$2.\sigma_t.\sin\frac{d\theta}{2}.dr = \left(\sigma_r + \frac{\partial\sigma_r}{\partial r}.dr\right).(r+dr).d\theta - \sigma_r.r.d\theta + f.r.dr.d\theta$$

$$\sigma_t.dr.d\theta = \sigma_r.dr.d\theta + \frac{\partial\sigma_r}{\partial r}.dr.(r+dr).d\theta + f.r.dr.d\theta \quad (1)$$

Soit : $\frac{\sigma_t - \sigma_r}{r} = \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + f$

Relation déplacement déformation



u , déplacement au rayon r , $u+du$, déplacement au rayon $r+dr$

la déformation radiale est : $\epsilon_r = \frac{du + dr - dr}{dr} = \frac{du}{dr} \quad (2)$

Le cercle de rayon r avant déformation aura pour longueur $2\pi.r$. Après déformation, il aura pour rayon $r+u$ et pour longueur $2\pi.(r+u)$ d'où

La déformation tangentielle $\epsilon_t = \frac{2.\pi.(r+u) - 2.\pi.r}{2.\pi.r} = \frac{u}{r} \quad (3)$

Relation contraintes déformations :

Les déformations sont reliées aux contraintes par les lois de Hooke :

$\epsilon_r = \frac{1}{E}.\left(\sigma_r - \nu.\sigma_t\right) \quad (4)$

$\epsilon_t = \frac{1}{E}.\left(\sigma_t - \nu.\sigma_r\right) \quad (5)$

Ces 5 relations permettent de déterminer le champ de déplacement du type :

$u(r) = -\frac{\rho.\omega^2}{E}.\left(1 + \nu^2\right).\frac{r^3}{8} + \frac{A.r}{2} + \frac{B}{r}$, dont les valeurs des constantes A et B sont définies par les conditions limites.

Conditions limites :

Les contraintes radiales sont nulles en périphérie : $\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0$
 Les déplacements sont nuls sur le rayon moyen de l'assemblage boulonné : $u(c) = 0$

Les solutions sont différentes avant et après $r = c$.
Cela permet de déterminer les expressions des contraintes radiales et circonférencielles fournies en annexe.

☞ **Q 3.2 Vitesse d'éclatement de la meule.**

Déterminer la vitesse de plastification d'une meule, corps en acier de limite élastique $R_e = 350 \text{ MPa}$, de masse volumique $\rho = 7\,800 \text{ kg/m}^3$ et un coefficient de sécurité de 1,75.
Conclusion.

$\sigma_t(a) = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{(v^2 - 1) \cdot (a^2 - c^2)^2}{c^2 \cdot (v - 1) - a^2 \cdot (v + 1)}$	$\sigma_t = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{(v^2 - 1) \cdot (b^2 - c^2)^2}{c^2 \cdot (v - 1) - b^2 \cdot (v + 1)}$
$\sigma_t(c-) = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot v \cdot K_-$	$\sigma_t(c+) = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot v \cdot K_+$
$\sigma_r(c-) = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot K_-$	$\sigma_r(c+) = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot K_+$

$a = 47,5 \text{ mm}$ $b = 200 \text{ mm}$ $c = 87,5 \text{ mm}$

Par simple application numérique, on détermine les contraintes normales radiales et circonférencielles :

$$K_- = -a^2 \cdot \frac{a^2 \cdot (v + 3) - c^2 \cdot (v + 1)}{c^2 \cdot (v - 1) - a^2 \cdot (v + 1)} - c^2 = -8\,338 \text{ mm}^2$$

$$K_+ = -b^2 \cdot \frac{b^2 \cdot (v + 3) - c^2 \cdot (v + 1)}{c^2 \cdot (v - 1) - b^2 \cdot (v + 1)} - c^2 = 77\,454 \text{ mm}^2$$

La zone de contraintes maximales se situe sur le cercle moyen de boulons.

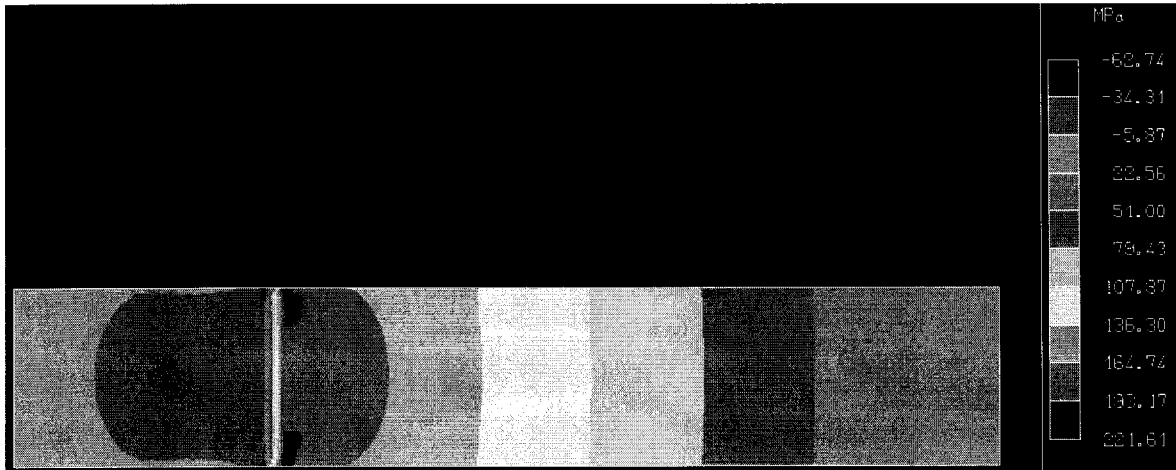
Critère de Tresca : $\max(\sigma_r, \sigma_t) < \frac{Re}{s}$

Soit $\sigma_r(c+) < \frac{Re}{s}$

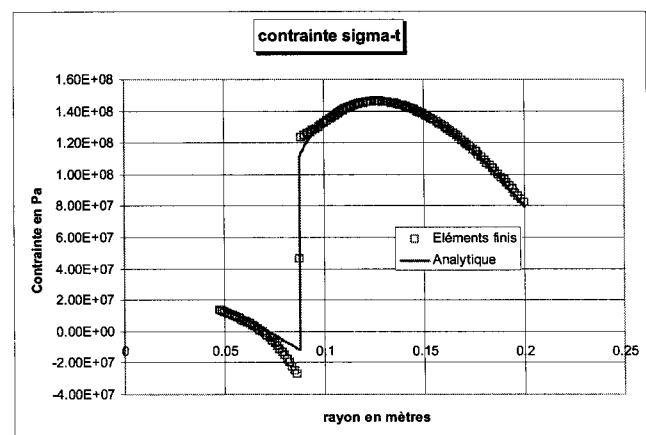
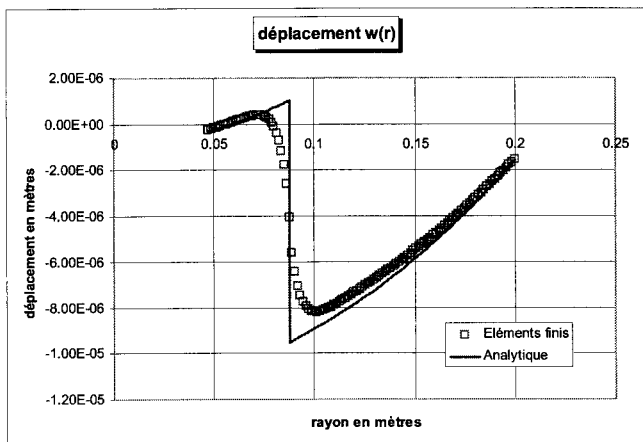
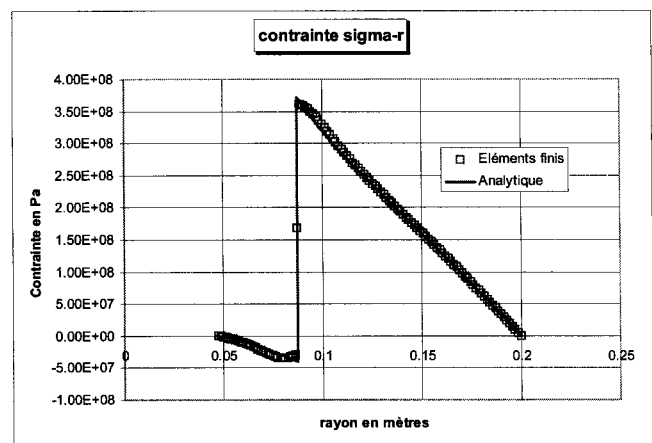
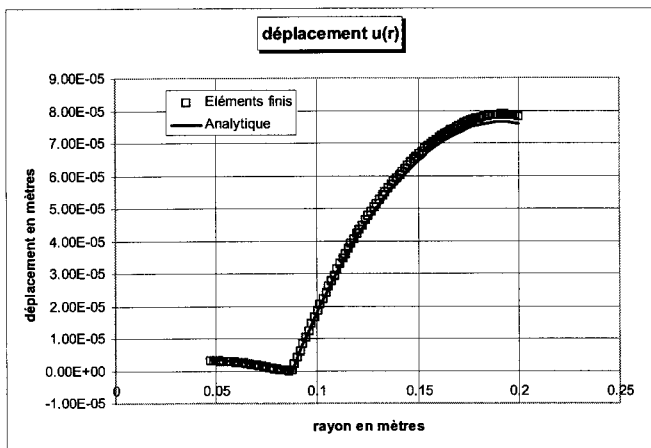
$$\omega < 2 \cdot \sqrt{\frac{Re}{\rho \cdot s \cdot K_+}}$$

La vitesse de plastification de la meule selon le critère de Tresca est de 11 000 tr/min, inférieure à la vitesse maximale de 15 000 tr/min

Une modélisation plus fine par éléments finis nous donne la répartition de contrainte radiale ci-dessous pour une vitesse de rotation de 11 000 tr/min :



a titre d'illustration la comparaison entre les résultats analytiques et un calcul éléments finis.



Q3.3 Choix d'un critère de sélection.

Déterminer l'indice de performances du matériau (Un indice de performance est une combinaison de propriétés qui caractérise la performance du matériau pour une application donnée M. F. ASHBY).

A l'aide du diagramme fourni sur le document DR3, proposer un choix de famille de matériaux pour l'âme de la meule.

$$\sigma_r(c+) < \frac{Re}{s} \text{ soit } \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot K_+ < \frac{Re}{s}$$

L'indice de performance à retenir est donc : $\frac{1}{4} \cdot s \cdot \omega^2 \cdot K_+ < \frac{Re}{\rho}$

$$\omega = 15\,000 \text{ tr/min}$$

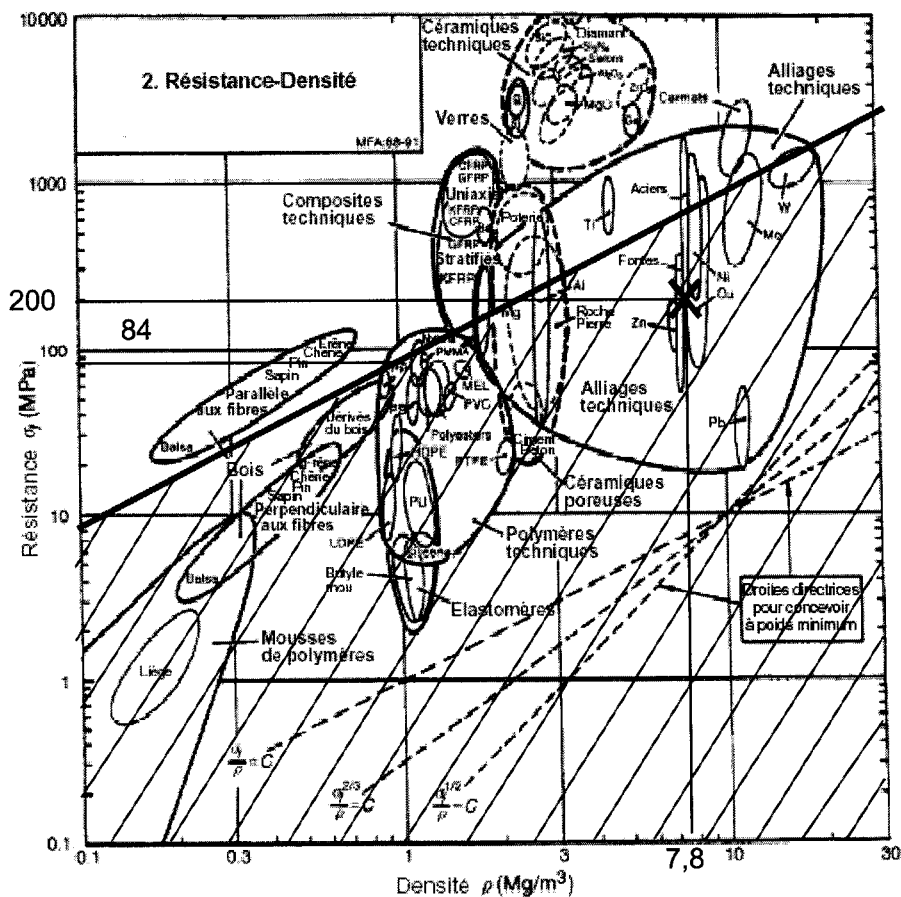
$$s = 1,75$$

$$K_+ = 77\,454 \text{ mm}^2$$

$$83\,610 < \frac{Re}{\rho} \quad \text{unités Re : Pa et } \rho : \text{Kg/m}^3$$

$$83,6 < \frac{Re}{\rho} \quad \text{unités Re : MPa et } \rho : \text{Mg/m}^3$$

A noter que les céramiques techniques ne peuvent pas être retenues, leur résistance en traction étant bien inférieure à leur résistance en compression retenue dans ce diagramme. On peut utiliser les composites techniques qui sont dans le domaine exploitable.



Q3.4 Déplacement radial.

Déterminer le déplacement radial en périphérie de meule pour une meule en acier à vitesse de rotation maximale (15000 tr/min).

Le déplacement radial en périphérie de meule est : $u(b) = -\frac{1-\nu^2}{4.E} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot X$

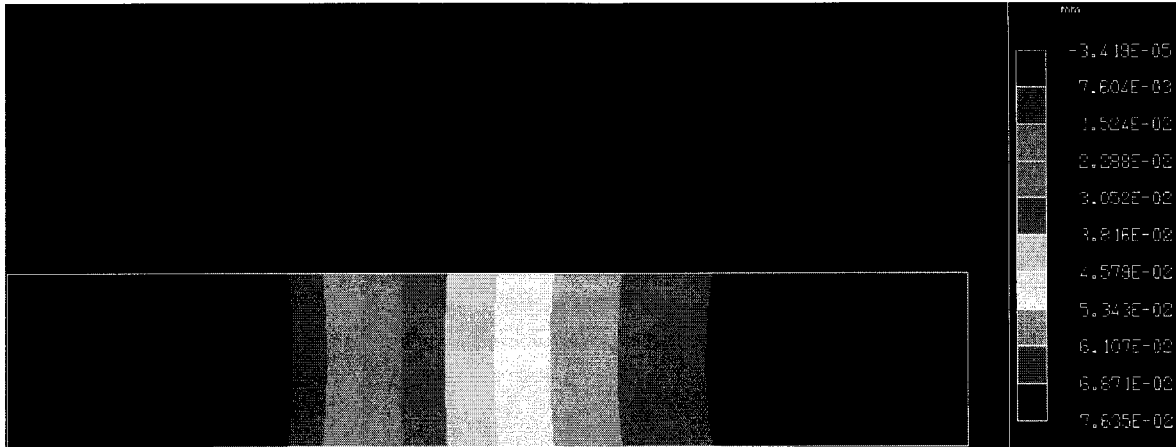
JMS

$$\text{Avec } X = b \cdot \frac{(c^2 - b^2)^2}{c^2 \cdot (v - 1) - b^2 \cdot (v + 1)} = -3,65 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\rho = 7\,800 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Soit } u = 8 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 80 \text{ } \mu\text{m}$$

On obtient par calcul par éléments finis la répartition des déplacements suivante pour une vitesse de rotation de 15 000 tr/min :



Q 3.5 Choix d'un critère de sélection.

Déterminer l'indice de performances du matériau permettant de limiter le déplacement en périphérie de meule par les effets d'inertie (déplacement radial de 25 microns pour une vitesse maximale de 15 000 tr/min).

On souhaite limiter le déplacement radial à $u_m = 25$ microns soit $\frac{\rho}{E} < -\frac{4 \cdot u_m}{(1 - v^2) \cdot \omega^2 \cdot X}$.

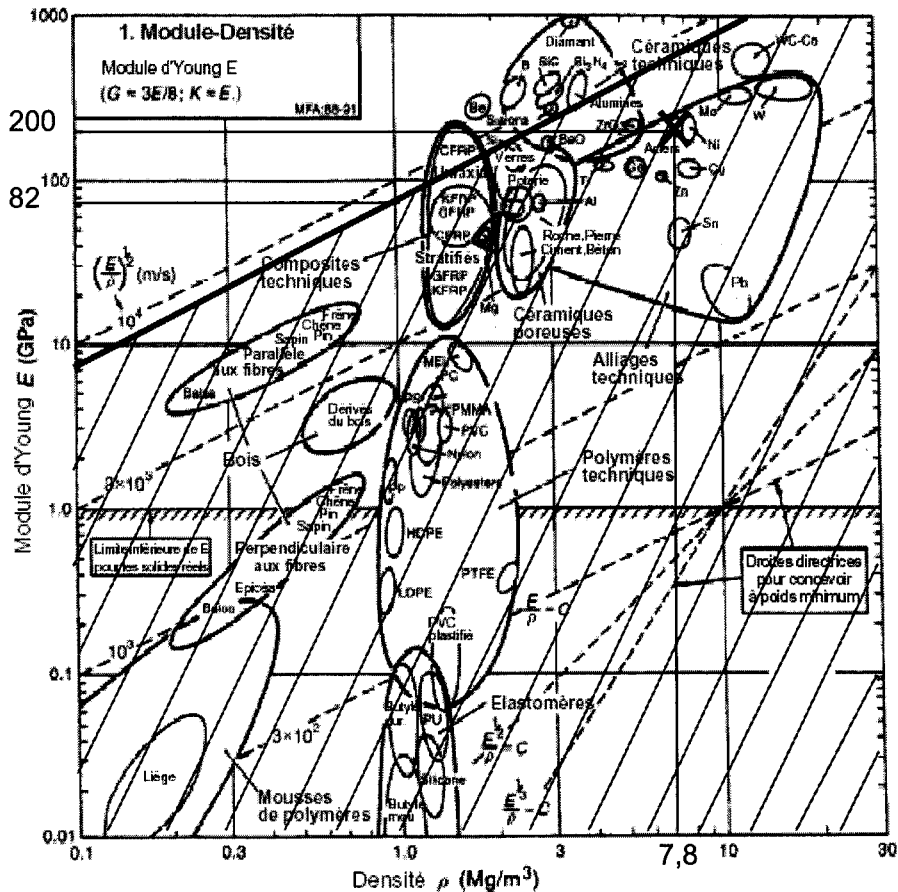
En faisant l'hypothèse que v est constant égal à 0,3, on obtient :

$$\frac{E}{\rho} > 8,2 \cdot 10^7 \quad \text{unités : } \rho \text{ en kg/m}^3 \text{ et } E \text{ en Pa}$$

$$\frac{E}{\rho} > 82 \quad \text{unités : } \rho \text{ en Mg/m}^3 \text{ et } E \text{ en GPa}$$

Seules certains matériaux composites techniques remplissent ces conditions de déplacement maximal en périphérie de meule :

On retiendra les CFRP (Carbon Fiber Reinforced Polymer), avec une orientation des fibres dans la direction tangentielle)



Q 3.6 Gauchissement de la meule.

Proposer une modélisation type éléments finis (conditions aux limites, type d'élément, chargement, etc) permettant de mettre évidence le gauchissement de la meule.

Quelles sont les conséquences sur la qualité de la pièce après rectification ? Quelles sont les conséquences au niveau du choix du procédé de serrage de la meule ?

- déplacement nul sur les alésages boulonnés,
- chargement de type force centrifuge

Choix du modèle

- milieu continu élastique linéaire tridimensionnel ;
- petites perturbations ;
- pas de prise en compte des problèmes de contact ;
- maillage du support par des éléments tétraèdres à 10 nœuds.

Simplification de la géométrie

- suppression des filets du taraudage recevant les vis d'assemblage
- prise en compte de la symétrie pour étudier 1/8 du disque.

Densité du maillage

Les tétraèdres à 10 nœuds sont des éléments volumiques à trois degrés de liberté par nœud, ces éléments sont de degré 2.

Le champ de déplacement dans un élément de degré 2 est établi à partir de fonctions d'interpolation quadratiques, le champ de déformation donc de contrainte dans l'élément est

de ce fait linéaire et assure une bonne représentation dans les zones à fort gradient de contrainte. Il est recommandé, afin de garantir la précision, de mailler la structure de manière à avoir une densité d'éléments suffisante dans ces zones.

Le déplacement sur la périphérie varie entre 55 et 69 μm sur la périphérie. Les déformations obtenues sont non axisymétriques (position des boulons d'assemblage).

Pas de conséquence en rectification si la meule est équilibrée dynamiquement, ce qui est le cas, la meule est diamantée régulièrement. Le diamantage et la rectification s'effectuent à même vitesse de rotation. Au repos, la meule présentera donc un défaut de circularité de l'ordre de 15 μm .

Pour limiter ces effets, il faut choisir un procédé de serrage-axisymétrique pour conserver l'équilibrage initial de la meule qui est G2.5.

☞ Q 3.7 Etude des déformations par frettage

Pourquoi peut-on conclure que : $\frac{\delta}{r_2} \approx \varepsilon_{te} - \varepsilon_{ti}$

Le serrage de l'assemblage est défini par : $\delta = \delta_i + \delta_e > 0$

r_2 = rayon de base de l'assemblage

r'_2 = rayon commun après assemblage après déformation

Les déformations tangentielles sont :

Sur le rayon intérieur $\varepsilon_{ti} = \frac{2.\pi.r'_2 - 2.\pi.(r_2 + \delta_i)}{2.\pi.(r_2 + \delta_i)} = \frac{r'_2}{(r_2 + \delta_i)} - 1$

Sur le rayon extérieur $\varepsilon_{te} = \frac{2.\pi.r'_2 - 2.\pi.(r_2 - \delta_e)}{2.\pi.(r_2 - \delta_e)} = \frac{r'_2}{(r_2 - \delta_e)} - 1$

D'où : $\varepsilon_{te} - \varepsilon_{ti} = r'_2 \cdot \left(\frac{1}{r_2 - \delta_e} - \frac{1}{r_2 + \delta_i} \right) = r'_2 \cdot \left(\frac{\delta_e + \delta_i}{(r_2 - \delta_e)(r_2 + \delta_i)} \right) = \frac{\delta}{r_2}$

☞ Q3.8 Choix de l'ajustement

Définir les critères de choix du serrage δ mini et maxi.

Faire l'application numérique (on prendra $p_{\text{mini}} = 0$).

Proposer un ajustement pour cette liaison à partir du document 3-4

Serrage maxi : imposé par la limite élastique du matériau

Serrage mini : l'assemblage doit rester serré malgré les effets centrifuges

$$\varepsilon_{ti}(r_2) = -\frac{p}{E} \cdot \left[\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu \right] \quad \varepsilon_{te}(r_2) = -\frac{p}{E} \cdot \left[\frac{r_2^2 + r_3^2}{r_2^2 - r_3^2} - \nu \right]$$

$$\frac{\delta}{r_2} = \frac{p}{E} \cdot \left[\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{r_2^2 + r_3^2}{r_2^2 - r_3^2} \right] = K \cdot \frac{p}{E} \quad \text{avec } K = 5,5$$

La contrainte équivalente de Von Mises est : $\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2}$

Le tenseur des contraintes est :

$$\begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit $\sigma_e = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 - \sigma_r \cdot \sigma_t}$

Calcul du serrage maxi :

Dans ce cas, on ne prend en compte que les contraintes de fretage, les effets centrifuges vont « alléger » la pression de contact en phase de rectification.

Sur l'arbre :

$$\sigma_n(r_2) = -p$$

$$\sigma_{ti}(r_2) = -p \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

avec $r_2 = 35$ mm et $r_1 = 21$ mm

$$\sigma_e = 1,84 \cdot p < \frac{Re}{s}$$

(s : coefficient de sécurité = 1,25 pour le fretage NF E22-621)

$$p < \frac{Re}{1,84 \cdot s}$$

Sur le porte-meule : $\sigma_{re}(r_2) = -p$

$$\sigma_{te}(r_2) = -p \cdot \frac{r_2^2 + r_3^2}{r_2^2 - r_3^2}$$

avec $r_2 = 35$ mm et $r_3 = 47,5$ mm

$$\sigma_e = 3,97 \cdot p < \frac{Re}{s}$$

$$p < \frac{Re}{3,97 \cdot s}$$

$$\delta = K \cdot \frac{p}{E} \cdot r_2 < K \cdot r_2 \cdot \frac{Re}{3,97 \cdot E \cdot s}$$

Re = 350 MPa E = 220 000 MPa K = 5,5

$$\delta_{\max} = 67 \mu\text{m}$$

Calcul du serrage mini :

Les déformations par effet couplé du fretage et des effets d'inertie sont :

Au repos, $\frac{\delta_{\min}}{r_2} = \varepsilon_{te \text{ fret}} - \varepsilon_{ti \text{ fret}} = K \cdot \frac{p}{E}$

Cette pression sera annulée lorsque les déformations dues aux forces centrifuges engendrent un déplacement relatif égal à δ_{\min} .

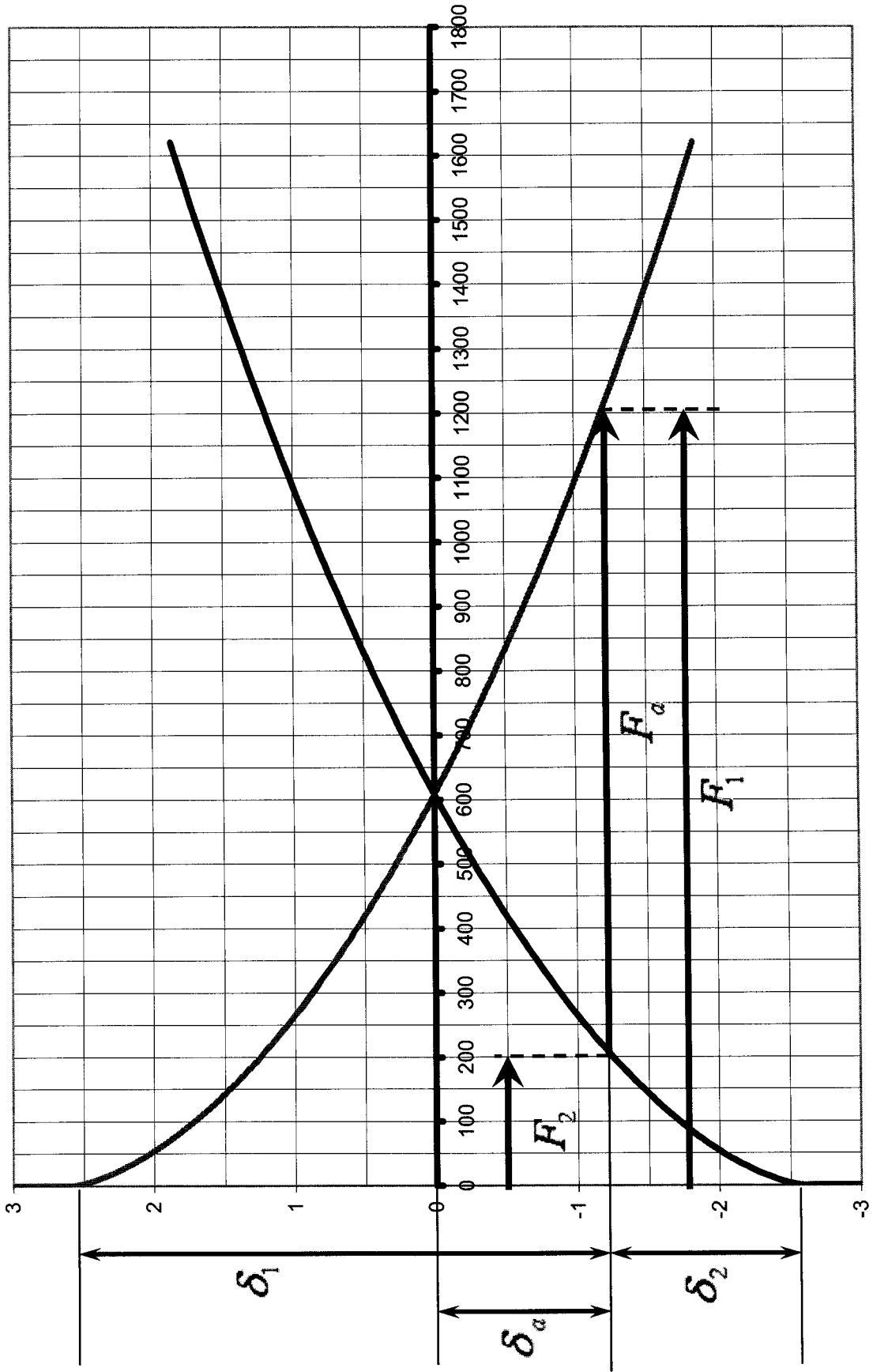
Soit $\delta_{\min} = r_2 \cdot (\varepsilon_{te \text{ cent}} - \varepsilon_{ti \text{ cent}})$

D'où $\delta_{\min} > \frac{3+\nu}{4E} \rho \omega^2 \cdot r_2 \cdot (r_3^2 - r_1^2)$ soit $\delta_{\min} = 5 \mu\text{m}$

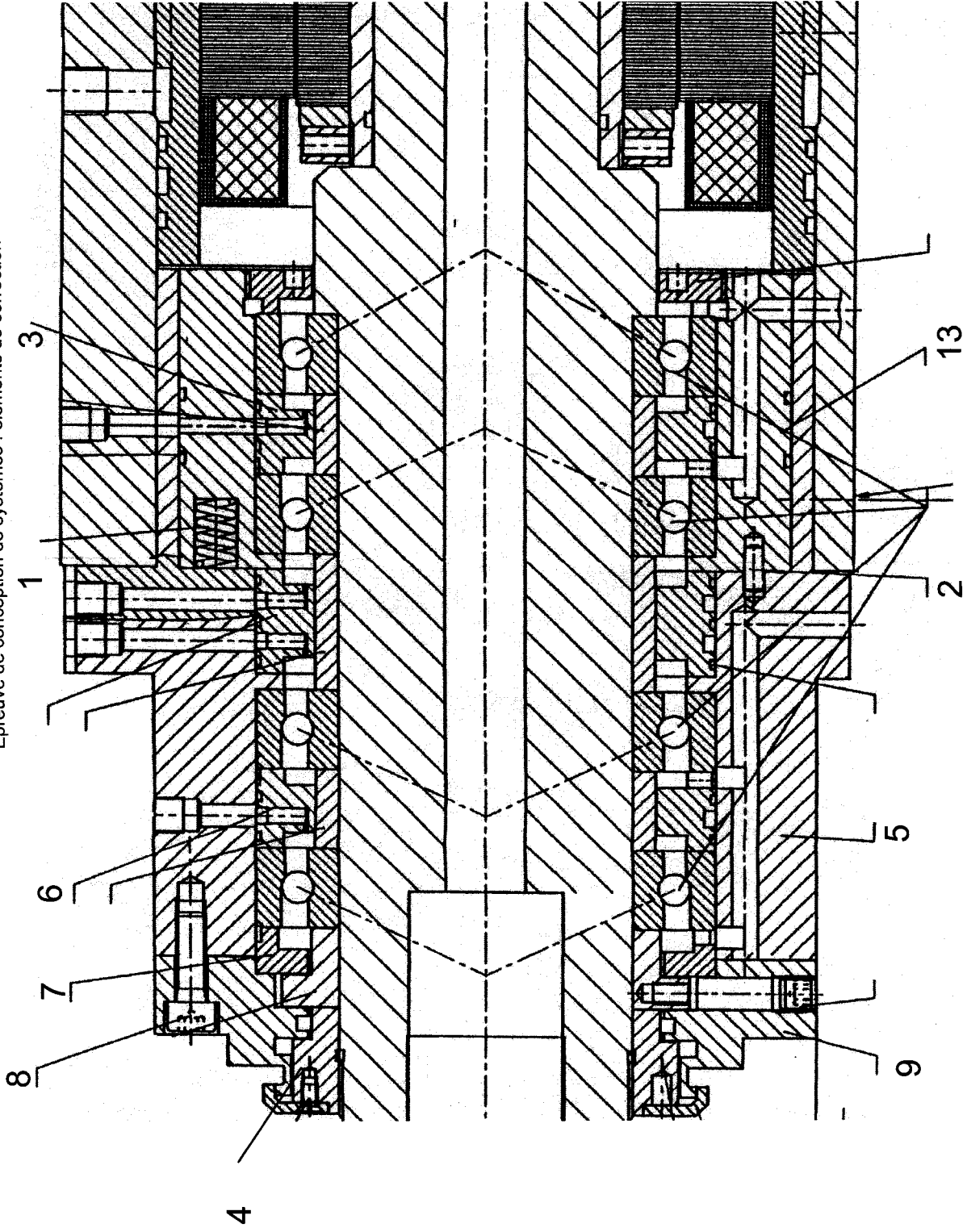
Conclusion : 5 microns < δ < 67 microns

Epreuve de conception de systèmes : éléments de correction

On pourra choisir en première approximation un ajustement H7r6. Ce modèle est simplifié puisqu'il ne prend pas en compte les éventuels effets liés à la géométrie réelle du porte – meule.



Epreuve de conception de systèmes : éléments de correction



823

Enreuve de conception de systèmes : éléments de correction

