

Corrigé et commentaires sur l'épreuve de Mécanique des systèmes et des milieux déformables

Bien que les trois parties de l'épreuve soient indépendantes, la plupart des candidats aborde le sujet dans l'ordre du texte et les résultats vont décroissant. Les résultats par partie sont les suivants :

Partie 1 : moyenne 7,8/20 écart type 4,5

Partie 2 : moyenne 7,1/20 écart type 5,4

Partie 3 : moyenne 5,7/20 écart type 5,4

Partie 1

C'est donc la partie la mieux réussie. Une part importante de calculs géométriques permet de classer les candidats en deux catégories : ceux pour qui ce type d'exercice ne présente aucune difficulté qui ont bien intégré la logique de la section et qui déroulent des calculs corrects ; ceux pour qui le théorème de Pythagore reste une difficulté et qui n'ont rien à faire dans un concours de ce niveau. Seule la détermination de la position basculée en avant a posé quelques difficultés ...

Une structure simplifiée était proposée en préambule, non pas pour guider dans la démarche de mise en équations mais plutôt pour la méthode de résolution. Cette partie montre une méconnaissance assez générale des méthodes numériques de résolution des problèmes mécaniques. Notamment la méthode itérative de Newton, est rarement expliquée avec rigueur.

Une petite question sur le nombre de boucles cinématiques et le degré d'hyperstatisme montre que ces notions classiques ne sont pas maîtrisées par un nombre important de candidats : le nombre de boucles indépendantes varie de 3 à 15 pour cette structure en passant par 5 (qui est la bonne réponse) mais plus souvent 6 (?). La notion de rang du système cinématique n'est pas connue.

La dernière section faisait l'étude d'une phase de mouvement plane, la lecture et l'interprétation des graphes fournis a été plutôt bien menée (une part importante de copie inverse le mouvement car les candidats n'ont pas vu le sens des ordonnées : tige sortie vers le bas).

Par la suite, on propose une mise en équations par le principe fondamental de la dynamique. Bien que souvent correcte, un nombre beaucoup trop élevé de copies présente des réponses incomplètes ou fausses (pas d'équation de moment, erreur de projection, fautes dans les calculs de moment dynamique ou cinétique). Ceci est inadmissible à une agrégation de Mécanique. L'interprétation des équations et la discussion sur la comparaison proposée est assez décevante. Il s'agissait d'une question ouverte et le nombre de remarques pertinentes est très faible.

De manière anecdotique, seuls 3 candidats sur 254 ont pensé qu'il ne fallait pas prendre en compte la pesanteur pour la phase d'accélération du vaisseau dans l'espace.

Partie 2

Pour cette session, la partie Mécanique des solides déformables se limitait à des points de RdM et MMC basiques. La moyenne assez élevée de cette partie montre qu'une part significative des candidats maîtrise ces notions. Néanmoins, il est à constater que le calcul de l'aire d'un tube carré est une question sélective ! De même, confirmant les remarques déjà faites plus haut, le degré d'hyperstatisme est souvent parachuté (et faux).

Il en va de même pour les diagrammes des sollicitations internes. Qu'ils soient tracés sur la structure ou « à plat » comme dans le corrigé, ils sont très peu souvent justifiés par une coupure de section et un isolement correct.

On observe assez souvent des copies qui font la superposition des énergies de déformation, ceux là même qui répondent « non » (presque de manière offusqué par une question aussi triviale) à la superposition de la contrainte de Von Mises. Où est la logique ?

Contrairement aux années précédentes, beaucoup de candidats ont eu une analyse critique de leurs applications numériques : la raideur du chambranle déterminée va de 100 à 10^9 N/m et lorsque le résultat obtenu semble douteux, l'hypothèse de l'erreur de calcul est souvent avancée. Une erreur diagnostiquée est à demi pardonnée ...

Les méthodes de détermination des contraintes et directions principales sont connues : par les cercles de Mohr pour 10% des candidats, par diagonalisation pour les autres. Par contre, l'exploitation de ces résultats pour discuter de la propagation de fissure laisse à désirer. Cette dernière question a été rarement abordée, et certains résultats justes restent inexplicables (forme de la fissure juste avec des directions principales fausses).

Partie 3

Cette partie a été négligée par un cinquième des candidats. La moyenne hors copies blanche est presque de 7, ce qui montre que ces notions sont aussi bien (ou mal) maîtrisées que celles plus traditionnelles de la mécanique du solide. Il faut néanmoins insister une fois de plus sur le fait que la mécanique des fluides, la thermodynamique et la thermique font partie intégrante des études de systèmes industriels et qu'un professeur agrégé ne peut pas se permettre de faire l'impasse sur ces sujets.

La mise en équation du vérin de pilotage ainsi que l'évaluation du débit de fuite ont été effectuées de manière satisfaisante par un nombre important de candidats.

Beaucoup de candidats ont considéré que lorsque la plate-forme descend la pression p_2 devient supérieure à p_1 , ce qui est en contradiction avec les équations établies précédemment.

Les questions élémentaires portant sur l'étude des pertes de charge n'ont souvent pas été traitées, alors que ces notions sont fondamentales.

Les candidats semblent ignorer le théorème de Bernoulli généralisé.

L'analyse dimensionnelle est un outil puissant dont l'usage dépasse le cadre de la mécanique des fluides et ne doit être négligée par les candidats.

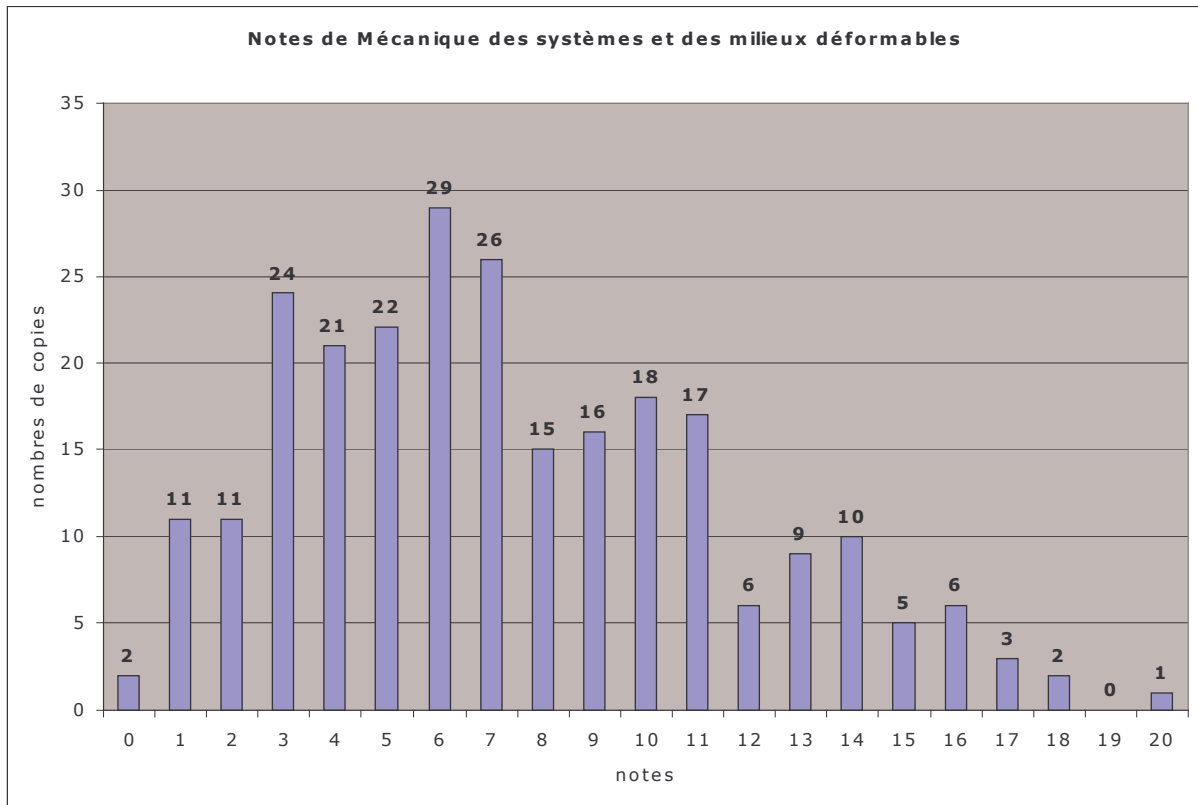
Les candidats doivent savoir analyser un système mécanique du point de vue énergétique. Dans le cas du système proposé, l'énergie potentielle est transformée en chaleur par laminage de l'huile lorsque la plate-forme descend.

Très peu de candidats ont su traiter la section 33 qui se réfère à des notions de base de transfert de chaleur.

Distribution des notes

Les résultats pour cette l'épreuve sont les suivants : moyenne 7,4 écart type 4,1

77 copies ont une note supérieure ou égale à 10, attestant ainsi qu'une quantité significative de bons candidats mérite d'obtenir ce concours.



Partie 1 : Mécanique des solides rigides (corrigé)

Section 10 : Analyse préliminaire d'une structure fermée simplifiée

Q10.1 Soit m la projection de M sur l'horizontale OX . En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles AmM et BmM , on tire les deux relations :

$$\begin{cases} z_1^2 = y^2 + (x+a)^2 \\ z_2^2 = y^2 + (x-a)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x,y) = -[y^2 + (x+a)^2] \\ f_2(x,y) = -[y^2 + (x-a)^2] \end{cases}$$

Q10.2 D'après le système précédent :

$$z_1 = z_2 = z_m \rightarrow x_0 = 0 \quad \text{et} \quad y_0 = \sqrt{z_m^2 - a^2}$$

Q10.3 L'opérateur gradient de la fonction F s'écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{\text{grad}[F]}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(x+a) & -2y \\ -2(x-a) & -2y \end{bmatrix}$$

Par définition du gradient on a :

$$dF = \underline{\underline{\text{grad}[F]}} \cdot dX$$

Si on fait le développement limité de $[F(X)]$ au premier ordre entre X_{i+1} et X_i , on obtient :

$$F(X_{i+1}) - F(X_i) = \underline{\underline{\text{grad}[F]}}_{X_i} (X_{i+1} - X_i)$$

Sur le graphe, on voit que l'approximation X_{i+1} sera obtenue pour l'abscisse qui annule la fonction F , ce qui conduit à la relation :

$$X_{i+1} = X_i - \underline{\underline{\text{grad}}}^{-1}[F] \cdot F(X_i)$$

En imposant $z_1(t)$ et $z_2(t)$, on peut déterminer $x(t)$ et $y(t)$ de proche en proche en suivant l'algorithme ci-dessous :

Définition des données

$zm=2;$
 $zM=3.5;$
 $a=1;$

Calcul de la position initiale

$x0=0;$
 $y0=(zm^2-a^2)^{0.5};$

$tf = 10;$ durée de l'étude

Définition des paramètres de la méthode numérique

$n = 100;$ nombre de points pour lesquels on souhaite une valeur précise des inconnues x et y
 $dt=tf/n;$ pas de temps
 $precision=0.000001;$ précision avec laquelle les équations sont satisfaites

Initialisation du problème

$t(1)=0;$
 $z1(1)=zm;$

```

z2(1)=zm;
x(1)=x0;
y(1)=y0;

Boucle de résolution pour chaque pas de temps
for i=1:n
    t(i+1)=i*dt;
    z1(i+1)=...; évolution de z1(t)
    z2(i+1)=...; évolution de z2(t)
    auxx=x(i);
    auxy=y(i);
    j=0
    maxres=precision+1; initialisation du résidu plus grand que la précision

    Boucle de résolution par la méthode de Newton
    while maxres > precision
        j=j+1
        f1=z1(i+1)^2-(auxx+a)^2-auxy^2;
        f2=z2(i+1)^2-(auxx-a)^2-auxy^2;
        f = [f1;f2];
        gradf = -2*[auxx+a auxy;auxx-a auxy]; calcul du gradient
        deltax=-gradf\f; inversion de gradf
        auxx=auxx+deltax(1);
        auxy=auxy+deltax(2);

        resz1=(abs(z1(i+1)^2-(auxx+a)^2-auxy^2))^0.5;
        resz2=(abs(z2(i+1)^2-(auxx-a)^2-auxy^2))^0.5;
        maxres=max(resz1,resz2); calcul du résidu
    end

    x(i+1)=auxx;
    y(i+1)=auxy;
end

```

Dans le cas de la structure étudiée, une telle approche n'est pas indispensable car on peut déterminer $x(t)$ et $y(t)$ explicitement par les relations ci-dessous. Cependant, pour la structure réelle, constituée des 6 vérins, la résolution analytique du système n'est plus possible. Il faudra donc se tourner vers une résolution numérique.

$$x(t) = \frac{z_1^2 - z_2^2}{4a} \quad \text{et} \quad y(t) = \sqrt{z_1^2 - \left(\frac{z_1^2 - z_2^2}{4a} + a \right)^2}$$

Q10.4 A partir des deux équations de la question Q10.1, on peut calculer les vitesses :

$$\begin{cases} z_1^2 = y^2 + (a+x)^2 \\ z_2^2 = y^2 + (a-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z_1\dot{z}_1 = 2y\dot{y} + 2(x+a)\dot{x} \\ 2z_2\dot{z}_2 = 2y\dot{y} + 2(x-a)\dot{x} \end{cases}$$

Ce qui donne, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} -2z_1\dot{z}_1 \\ -2z_2\dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2(x+a) & -2y \\ -2(x-a) & -2y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \Rightarrow [V] = \begin{pmatrix} -2z_1\dot{z}_1 \\ -2z_2\dot{z}_2 \end{pmatrix}$$

[V] est donc connu ou calculable avec les $z_i(t)$, grad[F] est aussi connu à chaque pas de temps. A chaque pas de temps, on peut donc calculer les dérivées premières de x et y par inversion de grad[F].

Q10.5 A partir des deux équations de la question Q10.4, on peut calculer les accélérations :

$$\begin{cases} 2z_1\dot{z}_1 = 2y\dot{y} + 2(x+a)\dot{x} \\ 2z_2\dot{z}_2 = 2y\dot{y} + 2(x-a)\dot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z_1\ddot{z}_1 + 2\dot{z}_1^2 = 2y\ddot{y} + 2\dot{y}^2 + 2(x+a)\ddot{x} + 2\dot{x}^2 \\ 2z_2\ddot{z}_2 + 2\dot{z}_2^2 = 2y\ddot{y} + 2\dot{y}^2 + 2(x-a)\ddot{x} + 2\dot{x}^2 \end{cases}$$

Ce qui donne, sous forme matricielle :

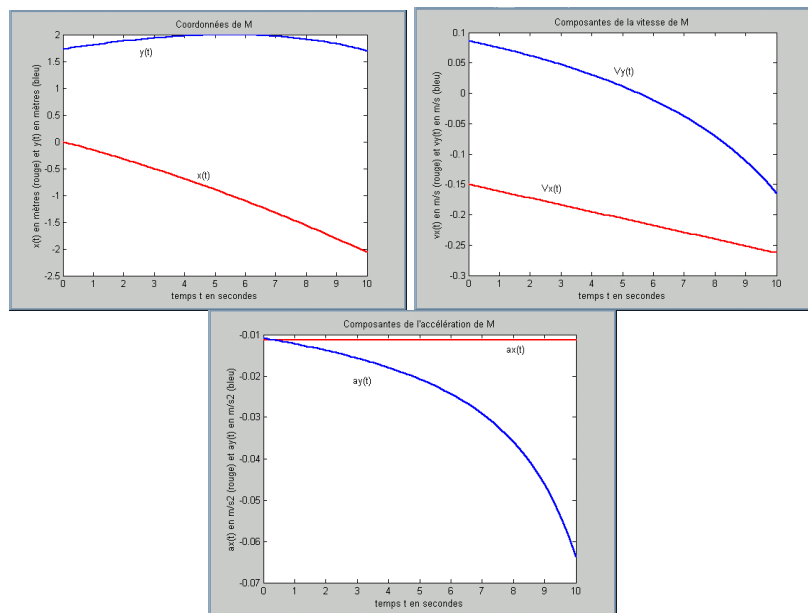
$$\begin{cases} 2z_1\ddot{z}_1 + 2\dot{z}_1^2 - 2\dot{y}^2 - 2\dot{x}^2 = 2y\ddot{y} + 2(x+a)\ddot{x} \\ 2z_2\ddot{z}_2 + 2\dot{z}_2^2 - 2\dot{y}^2 - 2\dot{x}^2 = 2y\ddot{y} + 2(x-a)\ddot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2z_1\ddot{z}_1 - 2\dot{z}_1^2 + 2\dot{y}^2 + 2\dot{x}^2 \\ -2z_2\ddot{z}_2 - 2\dot{z}_2^2 + 2\dot{y}^2 + 2\dot{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2(a+x) & -2y \\ -2(a-x) & -2y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

Ce qui permet de déterminer :

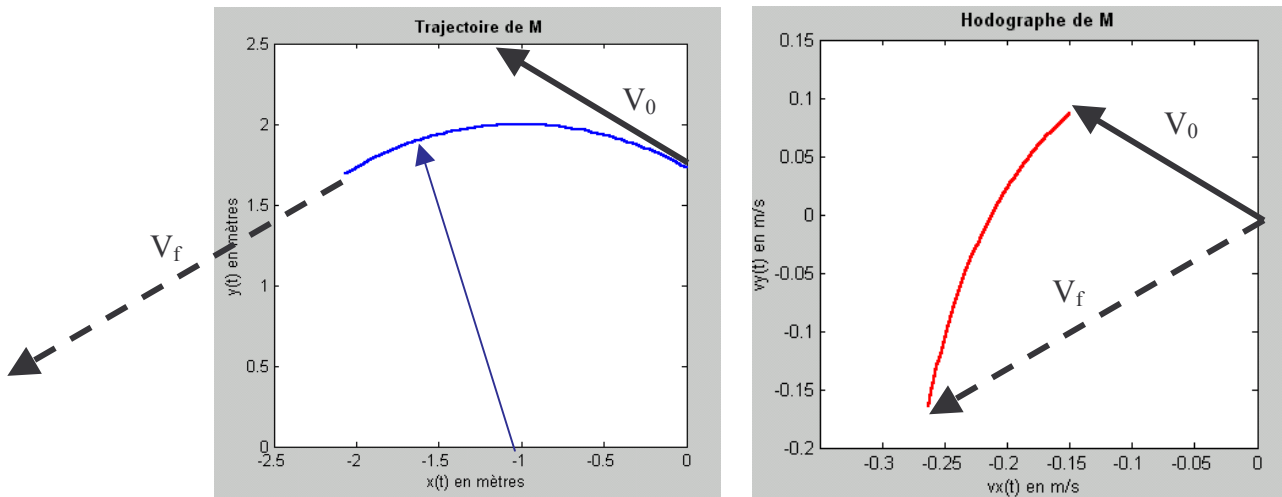
$$[\Gamma] = \begin{pmatrix} -2z_1\ddot{z}_1 - 2\dot{z}_1^2 + 2\dot{y}^2 + 2\dot{x}^2 \\ -2z_2\ddot{z}_2 - 2\dot{z}_2^2 + 2\dot{y}^2 + 2\dot{x}^2 \end{pmatrix}$$

[Γ] est donc connu ou calculable avec les $z_i(t)$, ainsi que les dérivées premières de x et y par rapport au temps grâce à la question précédente. A chaque pas de temps, on peut donc calculer les dérivées secondes de x et y par inversion de grad[F].

Sur les graphes qui suivent, on illustre la méthode sur le cas où z_1 reste dans sa position minimale z_m et z_2 évolue de z_m à z_M à vitesse constante entre $t=0$ et $t=t_f$. La trajectoire de M est donc un arc de cercle. La figure de droite est l'hodographe du mouvement, c'est-à-dire le lieu de l'extrémité du vecteur vitesse.



Coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de M et leurs dérivées premières et secondes par rapport au temps

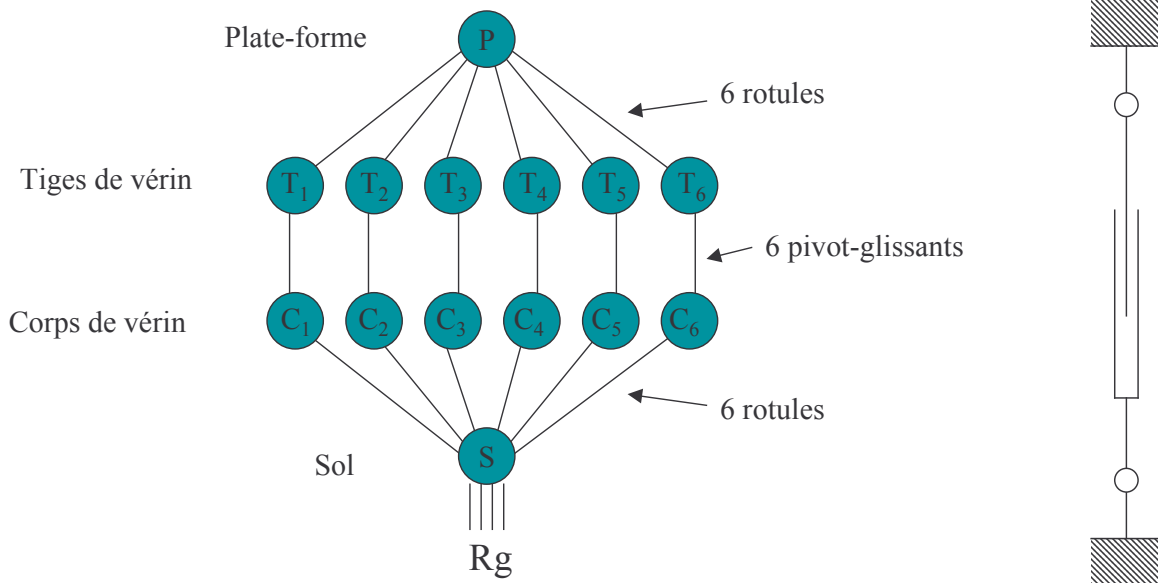


Trajectoire et hodographe de M dans l'intervalle 0-10 secondes

Section 11 : Analyse géométrique de la position de la plate-forme 3D

Q11.1 Le graphe des liaisons fait apparaître :

- $K = 18$ liaisons qui totalisent $I_c = 6 \times (3+2+3) = 48$ ddl
- $N = 14$ solides
- $m_i = 12$ mobilités internes : rotations propres des corps et des tiges de vérin (figure de droite)
- $m_u = 6$ mobilités utiles : 6 mouvements élémentaires de la plate-forme



On en déduit :

$$m = m_u + m_i = 18 \quad \rightarrow \quad r_c = I_c - m = 48 - 18 = 30$$

La mobilité est de 18 et le rang du système cinématique est de 30.

Q11.2. Notons qu'il y a 6 boucles cinématiques indépendantes. En effet :

$$v = K - N + 1 = 18 - 14 + 1 = 5.$$

Ce qui donne un degré d'hyperstatisme h :

$$h = 6v - rc = 30 - 30 = 0$$

Le système est donc isostatique ; toutes les composantes d'efforts sont calculables.

Q11.3 Les coordonnées des points d'attache des vérins au sol sont :

$$A : \begin{pmatrix} x_A = R_s \\ y_A = 0 \\ z_A = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,7m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; B : \begin{pmatrix} x_B = -\frac{R_s}{2} \\ y_B = \frac{\sqrt{3}R_s}{2} \\ z_B = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,85m \\ 1,47m \\ 0 \end{pmatrix}; C : \begin{pmatrix} x_C = -\frac{R_s}{2} \\ y_C = -\frac{\sqrt{3}R_s}{2} \\ z_C = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,85m \\ -1,47m \\ 0 \end{pmatrix}$$

Q11.4 Les longueurs des vérins sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} z_{AJ}^2 &= (x_J - R_s)^2 + y_J^2 + z_J^2 \\ z_{AK}^2 &= (x_K - R_s)^2 + y_K^2 + z_K^2 \\ z_{BI}^2 &= \left(x_I + \frac{R_s}{2}\right)^2 + \left(y_I - \frac{\sqrt{3}R_s}{2}\right)^2 + z_I^2 \\ z_{BK}^2 &= \left(x_K + \frac{R_s}{2}\right)^2 + \left(y_K - \frac{\sqrt{3}R_s}{2}\right)^2 + z_K^2 \\ z_{CI}^2 &= \left(x_I + \frac{R_s}{2}\right)^2 + \left(y_I + \frac{\sqrt{3}R_s}{2}\right)^2 + z_I^2 \\ z_{CJ}^2 &= \left(x_J + \frac{R_s}{2}\right)^2 + \left(y_J + \frac{\sqrt{3}R_s}{2}\right)^2 + z_J^2 \end{aligned}$$

Q11.5 Lorsque tous les vérins sont de même longueur $z(t)$, la plate-forme est horizontale. Les hauteurs z_I , z_J et z_K sont égales à $h(t)$. De plus, les centres des cercles de rayons R_s et R_p sont sur la même verticale et les coordonnées x_I , y_I , x_J , y_J et x_K , y_K peuvent facilement être déterminées. Le point I par exemple :

$$x_I = -R_p = -1,4 \text{ m} \quad y_I = 0$$

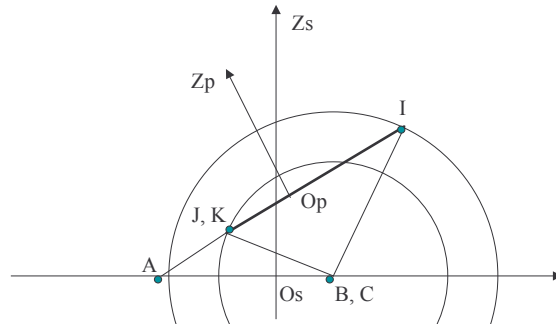
N'importe quelle relation du système précédent (ici le vérin BI) donne donc la hauteur h :

$$z^2 = \left(-R_p + \frac{R_s}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}R_s}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{z^2 - \left(R_p - \frac{R_s}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}R_s}{2}\right)^2}$$

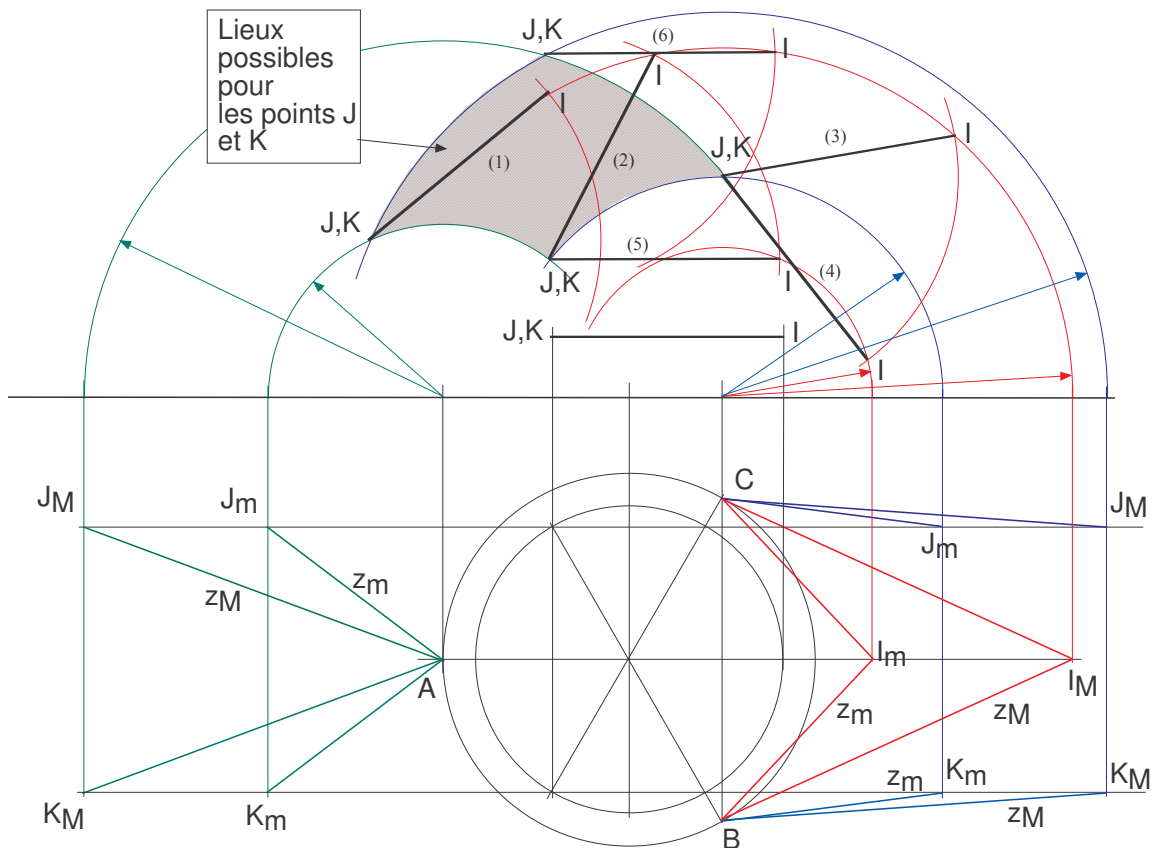
Les hauteurs extrêmes valent :

$$h_m = 1,24 \text{ m} \quad \text{et} \quad h_M = 3,13 \text{ m}$$

Q11.6 Considérons la position la plus en avant de la plate-forme vue dans le plan (O_s, X, Z) . Le point I doit être le plus en haut possible : les vérins CI et BI doivent donc être sortis. Les points J et K doivent être les plus en bas possible : les vérins CJ et BK doivent être rentrés. B, I, J forme un triangle pour lequel l'inclinaison est maximale lorsque AJ, AK sont rentrés.



Des calculs élémentaires à base du théorème de Pythagore permettent de déterminer les longueurs BI, BJ et AJ projetées dans la plan (Os,X,Z). Soient : BI = 3,17 m, BJ = 1,98 m et AJ = 1,59 m.



L'épure respectant les proportions permet de montrer que l'angle de basculement maximal vers l'avant θ_{av} est de 62° . On montre la zone possible pour les projections de J et K. Les placements des points I possibles correspondant aux 4 positions limites font apparaître un maximum pour la situation décrite plus haut : cas (2).

On obtient aussi les deux cas de la question Q11.5 : cas (5) et (6). Les (3) autres inclinaisons – cas (1), (3) et (4) sont des positions intermédiaires qui ne correspondent pas à des limites (notamment pour la limite arrière). En effet, en théorie, le plateau pourrait basculer au delà de la position verticale. Dans ce cas, les débattements sont limitées par les butées dans les liaisons rotules. Aucune indication dans le sujet ne permet de conclure sur la position arrière.

Q11.7 Les coordonnées sont les suivantes :

$$I: \begin{pmatrix} \alpha_I = -R_s \\ \beta_I = 0 \\ \gamma_I = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; J: \begin{pmatrix} \alpha_J = \frac{R_p}{2} \\ \beta_J = -\frac{\sqrt{3}R_p}{2} \\ \gamma_J = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7m \\ -1,21m \\ 0 \end{pmatrix}; K: \begin{pmatrix} \alpha_K = \frac{R_p}{2} \\ \beta_K = \frac{\sqrt{3}R_p}{2} \\ \gamma_K = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7m \\ 1,21m \\ 0 \end{pmatrix}$$

Q11.8 La rotation de la base de la plate-forme par rapport à la base du sol est obtenue par le produit des trois rotations élémentaires ou par l'expression des vecteurs de la base $\vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p$ en fonction des vecteurs de la base $\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s$.

$$[R] = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi & \sin \theta \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \theta \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Dans ces conditions, on peut en déduire :

$$\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + [R] \begin{pmatrix} \alpha_M \\ \beta_M \\ \gamma_M \end{pmatrix}$$

Soit finalement :

$$\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \alpha_M \cos \theta \cos \psi + \beta_M (\sin \theta \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) + \gamma_M (\sin \theta \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) \\ y + \alpha_M \cos \theta \sin \psi + \beta_M (\sin \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) + \gamma_M (\sin \theta \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi) \\ z - \alpha_M \sin \theta + \beta_M \cos \theta \sin \varphi + \gamma_M \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Q11.9 Il suffit de remplacer les valeurs de α_M, β_M et γ_M par celles des points I, J et K obtenus dans la question 11.7 dans les expressions de x_M, y_M et z_M de la question 11.8 afin d'obtenir les 9 expressions de x_I, y_I, z_I, x_J etc...

$$\begin{pmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - R_p \cos \theta \cos \psi \\ y - R_p \cos \theta \sin \psi \\ z + R_p \sin \theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_J \\ y_J \\ z_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + R_p \left\{ \frac{1}{2} \cos \theta \cos \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin \theta \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) \right\} \\ y + R_p \left\{ \frac{1}{2} \cos \theta \sin \psi - \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right\} \\ z - R_p \left\{ \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \sin \varphi \right\} \end{pmatrix} \Bigg|_{Ap}$$

$$\begin{pmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + R_p \left\{ \frac{1}{2} \cos \theta \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin \theta \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) \right\} \\ y + R_p \left\{ \frac{1}{2} \cos \theta \sin \psi + \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right\} \\ z - R_p \left\{ \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \sin \varphi \right\} \end{pmatrix}$$

rès substitution de ces 9 termes dans les relations de la question 11.4, on aboutit à un système de 6 relations à 6 inconnues x, y, z et ψ, θ et φ . Plus complexe certes, que celui de la partie préliminaire mais de la même forme :

$$[F]=[0] \quad \text{avec : } [F]=\begin{cases} F_1 = z_{AJ}^2 + f_1(x, y, z, \psi, \theta, \varphi) \\ F_2 = z_{AK}^2 + f_2(x, y, z, \psi, \theta, \varphi) \\ F_3 = z_{BI}^2 + f_3(x, y, z, \psi, \theta, \varphi) \\ F_4 = z_{BK}^2 + f_4(x, y, z, \psi, \theta, \varphi) \\ F_5 = z_{CI}^2 + f_5(x, y, z, \psi, \theta, \varphi) \\ F_6 = z_{CJ}^2 + f_6(x, y, z, \psi, \theta, \varphi) \end{cases}$$

Le calcul du gradient de [F] est rendu plus délicat par la présence des nombreux sinus et cosinus mais la méthode de détermination du vecteur [X] et de ces dérivées [V] et [Γ], est tout à fait identique à celle mise en place dans la partie préliminaire.

Dans la section suivante, on se limite à l'étude d'un mouvement « plan » afin de ne pas alourdir des calculs analytiques déjà laborieux.

Section 12 : Analyse d'une phase de mouvement particulière de la plate-forme

Q12.1 Dans la phase de mouvement qui correspond à y , ψ et φ constamment nuls, la matrice de rotation ne dépend plus que de θ :

$$[R]=\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta \sin\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Les coordonnées des points I, J et K dans le repère fixe sont donc :

$$\begin{pmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - R_p \cos\theta \\ 0 \\ z + R_p \sin\theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_J \\ y_J \\ z_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{R_p}{2} \cos\theta \\ -\frac{\sqrt{3}R_p}{2} \\ z - \frac{R_p}{2} \sin\theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{R_p}{2} \cos\theta \\ \frac{\sqrt{3}R_p}{2} \\ z - \frac{R_p}{2} \sin\theta \end{pmatrix}$$

x_J et x_K ainsi que z_J et z_K sont identiques. y_J et y_K sont opposés. Dans ces conditions, les expressions de la question 11.4 montrent que :

$$z_{AJ} = z_{AK} \quad \text{et} \quad z_{CJ} = z_{BK}$$

Par ailleurs, puisque y_I est nul, il apparaît aussi que :

$$z_{BI} = z_{CI}$$

Trois fonctions $z_1(t)$, $z_2(t)$ et $z_3(t)$ indépendantes permettent de piloter l'attraction durant un mouvement de ce type.

Q12.2 Entre 0 et 98 s, les 6 vérins évoluent de manière indépendante (hormis une petite période entre $t=15$ s et $t=25$ s où tous les vérins sont au repos à mi-course). A $t=98$ s tous les vérins sont dans la position mi-course et démarre une séquence pour laquelle, on observe que :

- les vérins AK et AJ ont même mouvement
- les vérins CI et BI ont même mouvement

- les vérins BK et CJ ont même mouvement

Donc le mouvement est bien du type de celui décrit à la question précédente (mouvement « plan ») et cette situation perdure jusqu'à l'instant $t = 120$ s où on perd les parités. Le mouvement redevient 3D. Durant le mouvement plan, on observe de plus que :

- après une légère rentrée de tige, les vérins AK et AJ s'allongent en position tige sortie ($t = 105$ s), puis les tiges rentrent à nouveau jusqu'à $t=120$ s
- les tiges des vérins CI et BI rentrent et restent en position mini jusqu'à $t=110$ s puis reviennent en position mi-course
- les tiges des vérins BK et CJ sortent plus rapidement encore que AK et AJ, puis rentrent oscillent un peu au voisinage de la position mini.

Donc, le mouvement de la plate forme sera un basculement assez rapide vers l'arrière (simulation d'une forte accélération) puis basculement plus modéré vers l'avant avec quelques à-coups en fin de mouvement.

Q12.3 Une étude fine des lois de mouvements imposées aux vérins permet de connaître $z_i(t)$ et ses dérivées successives. Le système de 3 relations à résoudre s'écrit cette fois :

$$z_1^2 = \left(x + \frac{R_p}{2} \cos \theta - R_s \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}R_p}{2} \right)^2 + \left(z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \right)^2$$

$$z_2^2 = \left(x - R_p \cos \theta + \frac{R_s}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}R_s}{2} \right)^2 + (z + R_p \sin \theta)^2$$

$$z_3^2 = \left(x + \frac{R_p}{2} \cos \theta + \frac{R_s}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}R_p}{2} - \frac{\sqrt{3}R_s}{2} \right)^2 + \left(z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \right)^2$$

On en déduit facilement les fonctions $f_i(t)$ qu'on ne cherchera pas à développer plus :

$$f_1(x, z, \theta) = - \left(x + \frac{R_p}{2} \cos \theta - R_s \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}R_p}{2} \right)^2 - \left(z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \right)^2$$

$$f_2(x, z, \theta) = - \left(x - R_p \cos \theta + \frac{R_s}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}R_s}{2} \right)^2 - (z + R_p \sin \theta)^2$$

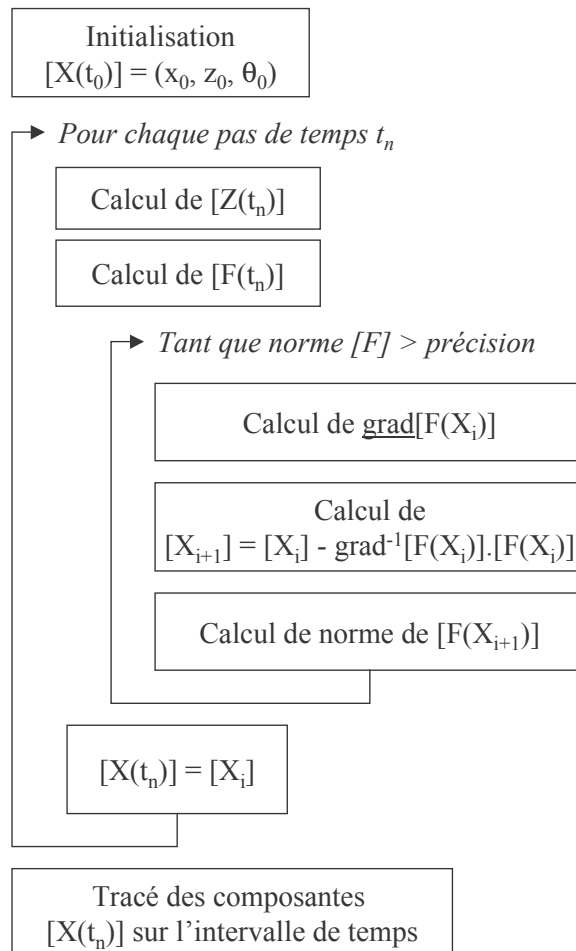
$$f_3(x, z, \theta) = - \left(x + \frac{R_p}{2} \cos \theta + \frac{R_s}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}(R_p - R_s)}{2} \right)^2 - \left(z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \right)^2$$

Q12.4 L'opérateur $\text{grad}[F]$ est ici représenté par une matrice 3x3. Les différentes dérivées sont données ci-dessous :

$$\underline{\underline{\text{grad}[F]}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{1}{R_p} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{1}{R_p} \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial z} & \frac{1}{R_p} \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad \text{avec :}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= -2 \left(x + \frac{R_p}{2} \cos \theta - R_s \right) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} &= -2 \left(z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \right) \\ \frac{1}{R_p} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} &= \sin \theta \left(x + \frac{R_p}{2} \cos \theta - R_s \right) + \cos \theta \left(z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= -2 \left(x - R_p \cos \theta + \frac{R_s}{2} \right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} &= -2 \left(z + R_p \sin \theta \right) \\ \frac{1}{R_p} \frac{\partial f_2}{\partial \theta} &= -2 \sin \theta \left(x - R_p \cos \theta + \frac{R_s}{2} \right) + 2 \cos \theta \left(z + R_p \sin \theta \right) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} &= -2 \left(x + \frac{R_p}{2} \cos \theta + \frac{R_s}{2} \right) \\ \frac{\partial f_3}{\partial z} &= -2 \left(z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \right) \\ \frac{1}{R_p} \frac{\partial f_3}{\partial \theta} &= \sin \theta \left(x + \frac{R_p}{2} \cos \theta + \frac{R_s}{2} \right) + \cos \theta \left(z - \frac{R_p}{2} \sin \theta \right) \end{aligned}$$

On suit donc l'algorithme suivant, déjà présenté sous une forme programmée dans la section 10 :



Q12.5 On isole le passager, il est uniquement soumis aux actions mécaniques du siège car il y a longtemps, longtemps dans une lointaine, très lointaine galaxie, les effets de la pesanteur terrestre ne se faisaient pas sentir. Le torseur dynamique exprimé en G_i , pour un solide en translation possède une résultante $m_i\Gamma$ dirigée suivant X et c'est tout. Le PFD s'écrit donc :

$${}_{G_i} \left\{ \begin{array}{c} m_i \Gamma \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = {}_{G_i} \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ M_{G_i} \end{array} \right\}$$

La résultante est égale à $m_i\Gamma$ et dirigée suivant x qui correspond à l'axe x_p de la base liée à la plate-forme. Le moment du torseur de liaison est nul en G_i . Au final, si on note X, Y, Z et L, M, N les composantes du torseur de liaison siège \rightarrow passager dans la base du repère R_p , on a :

$$\begin{aligned} X &= m_i\Gamma & L &= 0 \\ Y &= 0 & M &= 0 \\ Z &= 0 & N &= 0 \end{aligned}$$

Q12.6 Dans le simulateur les effets de la pesanteur terrestre sont bien présentes, la forme du torseur des actions du siège est identique à la précédente question : une résultante et un moment. La forme du torseur dynamique, par contre, est très différentes de la précédente. Le calcul de l'accélération d'un point M situé aux coordonnées α, β, γ dans le repère de la plate-forme donne :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_s M} &= \overrightarrow{O_s O_p} + \overrightarrow{O_p M} = x.\vec{x}_s + z.\vec{z}_s + \alpha.\vec{x}_p + \beta.\vec{y}_p + \gamma.\vec{z}_p \\ &\Downarrow \\ \overline{V(M/Rs)} &= \left. \frac{d\overrightarrow{O_s M}}{dt} \right|_{R_s} = \dot{x}.\vec{x}_s + \dot{z}.\vec{z}_s + \dot{\theta}(-\alpha.\vec{z}_p + \gamma.\vec{x}_p) \\ &\Downarrow \\ \overline{\Gamma(M/Rs)} &= \ddot{x}.\vec{x}_s + \ddot{z}.\vec{z}_s + \ddot{\theta}(-\alpha.\vec{z}_p + \gamma.\vec{x}_p) - \dot{\theta}^2(\alpha.\vec{x}_p + \gamma.\vec{z}_p) \end{aligned}$$

Le moment dynamique quant à lui, nécessite le calcul du moment cinétique :

$$\overrightarrow{\sigma_{G_i}(passager/Rs)} = I_{G_i} \dot{\theta} \cdot \vec{y}_s$$

On obtient le moment dynamique par dérivation, soit :

$$\overrightarrow{\delta_{G_i}(passager/Rs)} = I_{G_i} \ddot{\theta} \cdot \vec{y}_s$$

Le PFD s'écrit :

$$\begin{aligned} m_i \overline{\Gamma(G_i/Rs)} &= -m_i g \cdot \vec{z}_s + \vec{R} \\ \overrightarrow{\delta_{G_i}(passager/Rs)} &= \overrightarrow{M_{G_i}} \end{aligned}$$

Ce qui donne, en projection sur la base du repère R_p de la plate-forme :

$$\begin{aligned} X &= m_i(\ddot{x} \cos \theta - \ddot{z} \sin \theta + \gamma_i \ddot{\theta} - \alpha_i \dot{\theta}^2 - g \sin \theta) & L &= 0 \\ Y &= 0 & M &= I_{G_i} \ddot{\theta} \\ Z &= m_i(\ddot{x} \sin \theta + \ddot{z} \cos \theta - \alpha_i \ddot{\theta} - \gamma_i \dot{\theta}^2 + g \cos \theta) & N &= 0 \end{aligned}$$

Q12.7 En comparant, les expressions de X, Z et M des torseurs des questions 12.5 et 12.6, on tire trois relations à satisfaire si on veut que chaque passager ressente exactement les sensations d'une accélération.

$$m_i \Gamma = m_i (\ddot{x} \cos \theta - \ddot{z} \sin \theta + \gamma_i \ddot{\theta} - \alpha_i \dot{\theta}^2 - g \sin \theta) \quad (1)$$

$$0 = m_i (\ddot{x} \sin \theta + \ddot{z} \cos \theta - \alpha_i \ddot{\theta} - \gamma_i \dot{\theta}^2 + g \cos \theta) \quad (2)$$

$$0 = I_{G_i} \ddot{\theta} \quad (3)$$

La condition (3) impose une faible accélération angulaire, ce qui peut être obtenu en imposant une vitesse angulaire constante ω . Si les accélérations suivant x et z sont faibles, les équations (1) et (2) deviennent :

$$\Gamma \approx -\alpha_i \omega^2 - g \sin \theta \quad (1)$$

$$0 = -\gamma_i \omega^2 + g \cos \theta \quad (2)$$

Notons que θ est négatif et donc que $-\sin \theta$ est positif : on a bien la sensation d'une accélération lorsque la cabine penche vers l'arrière. Pour les passagers assis au niveau $\alpha_i = 0$, la sensation d'accélération est de :

$$\Gamma = 9,81 \sin 60^\circ = 8,5 \text{ m/s}^2$$

A titre de comparaison, un véhicule qui passe de 0 à 100 km/h en 10 s n'accélère que de $2,77 \text{ m/s}^2$. La sensation procurée par l'attraction est donc assez forte. L'équation (1) montre aussi que les passagers assis vers l'avant ($\alpha_i > 0$) vont ressentir une accélération plus faible que ceux assis vers l'arrière de la cabine où le terme $-\alpha_i \omega^2$ est positif et s'ajoute au poids. Pour que cette différence n'excède pas x% de la sensation moyenne, il faut que :

$$\Delta \alpha_i < x\% \frac{g \sin \theta}{\omega^2} \Rightarrow \omega < \sqrt{x\% \frac{g \sin \theta}{\Delta \alpha_i}}$$

En se plaçant dans la position limite $\theta = 60^\circ$ et en prenant comme valeur de $\Delta \alpha_i$ le rayon Rp de la plate-forme, on tire la vitesse angulaire ω maximale pour 5% d'écart :

$$\omega_{\text{Max}} = 0.55 \text{ rad/s}$$

Soit un basculement de 31° en une seconde. Pour le basculement arrière de 60° , le temps mis est lisible sur les graphes. Il est d'environ 5 s (voir vérins BK et CJ) : la condition est bien satisfaite.

L'équation (2) ne peut être vérifiée que si : $\omega^2 = g/\gamma_i \cos \theta$. γ_i est l'altitude des centres de gravité de chaque passager assis : cette valeur reste très proche d'un passager à l'autre. On peut donc caler l'évolution de ω sur la fonction $\cos \theta$ qui varie. Si cette variation est suffisamment lente, la relation (3) reste approximativement vérifiée.

Q12.8 On se place cette fois en fin de phase de plongée vers l'avant, les équations précédentes ne sont pas modifiées. Seuls changent les signes des vitesses et des angles. Penché en avant, l'angle θ est positif. On s'arrange pour que les vitesses et les accélérations angulaires soient nulles à ce moment et l'effet « choc » est assuré par les décélérations suivants x et z.

La ceinture exerce sur le passager un effort égal à la projection de la résultante sur l'axe Up :

$$\begin{aligned}\vec{u}_p \cdot \vec{R} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Z) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} m_i (\ddot{x}(\sin \theta + \cos \theta) + \ddot{z}(\cos \theta - \sin \theta) + (\gamma_i - \alpha_i) \ddot{\theta} - (\alpha_i + \gamma_i) \dot{\theta}^2 + g(\cos \theta - \sin \theta))\end{aligned}$$

Compte tenu des valeurs numériques, cette projection vaut :

$$\vec{u}_p \cdot \vec{R} = \frac{\sqrt{2}}{2} 90(-4(\sin 40^\circ + \cos 40^\circ) - 2(\cos 40^\circ - \sin 40^\circ) + 10(\cos 40^\circ - \sin 40^\circ)) = 590 \text{ N}$$

Cette valeur est négative car il s'agit de l'action de la ceinture sur le passager. La tension dans la ceinture au niveau des attaches est égale à la moitié de la valeur absolue de 590 N (en supposant que le passager est positionné symétriquement par rapport aux deux points d'ancrage de la ceinture) : $T_u = 295 \text{ N}$

Partie 2 : Mécanique des solides déformables (corrigé)

Section 21 : Raideur d'un portique simplifié

Q21.1 Aire : $S = a^2 - (a - 2e)^2 = 4e(a - e) \cong 4ae = 416 \text{ mm}^2$

Moment quadratique : $I_{Gz} = \frac{a^4}{12} - \frac{(a - 2e)^4}{12} = \frac{2a^3e}{3} - \frac{a^2e^2}{2} + \frac{8ae^3}{3} - \frac{4e^4}{3} \cong \frac{2a^3e}{3} = 11,09 \text{ cm}^4$

Q21.2 Il s'agit d'un problème statique, la mobilité est nulle : $m = 0$. Le nombre d'équations issues du PFS pour ce problème plan est : $E_s = 3$. Le nombre d'inconnues statiques est : $I_s = 3 \times 2 = 6$ (3 par encastrement) \rightarrow Le degré d'hyperstatisme est : $h = 3$.

Q21.3 Structure encastree en A, soumise au chargement en B (F) et en D (X, Y et M). En restant dans le domaine élastique, la sollicitation interne résultante de ce chargement est la superposition des sollicitations internes résultant de F, de X, de Y et de M.

Tronçon AB : abscisse curviligne s telle que $s = 0$ en A et $s = h$ en B

Tronçon BC : abscisse curviligne s telle que $s = h$ en B et $s = h+b$ en C

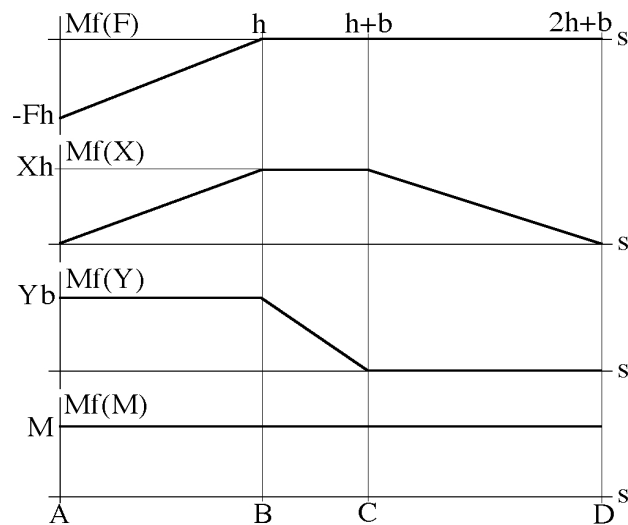
Tronçon CD : abscisse curviligne s telle que $s = h+b$ en C et $s = 2h+b$ en D

Le tableau ci-dessous présente les sollicitations internes générées par chacune des sollicitations externes en A, B, C, D et le long des 3 tronçons AB, BC et CD : 1^{ère} ligne = effort normal ; 2^{ème} ligne = effort tranchant ; 3^{ème} ligne = moment fléchissant

	A	AB	B	BC	C	CD	D
F	0 -F -Fh	0 -F F(s-h)	0	0 0 0	0	0 0 0	0 0 0
X	0 -X 0	0 -X Xs	Xh	X 0 Xh	Xh	0 X X(2h+b-s)	0 X 0
Y	Y 0 Yb	Y 0 Yb	Yb	0 Y Y(h+b-s)	0	0 0 0	0 0 0

M	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0
	M	M	M	M	M	M	M

Les diagrammes de moments fléchissants sont donc les suivants :



Q21.4 En supposant que l'effet du moment fléchissant est prépondérant, l'énergie de déformation élastique s'écrit :

$$W_{def} = \frac{1}{2} \int_0^{2h+b} \frac{Mf^2}{EI_{Gz}} ds$$

$$= \frac{1}{2EI_{Gz}} \left[\int_0^h (F(s-h) + Xs + Yb + M)^2 ds + \int_h^{h+b} (Xh + Y(h+b-s) + M)^2 ds + \int_{h+b}^{2h+b} (X(2h+b-s) + M)^2 ds \right]$$

Le déplacement horizontal en B est donné par : $u_B = \frac{\partial W_{def}}{\partial F} = \frac{h^2}{6EI_{Gz}} (2Fh - Xh - 3Yb - 3M)$

L'encastrement en D permet d'écrire : $\frac{\partial W_{def}}{\partial X} = 0$; $\frac{\partial W_{def}}{\partial Y} = 0$ et $\frac{\partial W_{def}}{\partial M} = 0$

Pour déterminer les actions d'encastrement, il faut résoudre le système 3x3 suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3}h^3 + 2bh^2 & bh^2 + hb^2 & 2h^2 + 2bh \\ bh^2 + hb^2 & 2hb^2 + \frac{2}{3}b^3 & 2hb + b^2 \\ 2h^2 + 2bh & 2hb + b^2 & 4h + 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Fh^3}{3} \\ Fbh^2 \\ Fh^2 \end{bmatrix}$$

Soit à résoudre :

$$\begin{bmatrix} 20,29 & 5,67 & 12,60 \\ 5,67 & 3,89 & 4,59 \\ 12,60 & 4,59 & 10,20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 308,7 \\ 396,9 \\ 441 \end{bmatrix}$$

ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2118 & 0 & -0,2616 \\ 0 & 0,5487 & -0,2469 \\ -0,2616 & -0,2469 & 0,5324 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 308,7 \\ 396,9 \\ 441 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 109 \\ 56 \end{bmatrix}$$

Q21.5 Le déplacement horizontal du point B vaut ici 2,42 mm. La raideur du portique vaut donc 41320 N/m.

Q21.6 Les diagrammes du moment fléchissant montrent que celui-ci évolue linéairement le long du portique. Le maximum est donc atteint en A (-56 Nm), en B (49 Nm), en C (-49 Nm) ou en D (56 Nm). Le maximum est atteint en A ou D et vaut 56 Nm. Néanmoins les liaisons avec le sol sont renforcées ce qui n'est pas le cas des angles en B et C, c'est la raison pour laquelle l'étude se poursuit sur l'étude de l'angle en B.

Section 22 : Tenue du chambranle d'une porte d'accès à l'attraction

Q22.1 L'expression de la contrainte de Von Mises en contraintes planes dans le plan xy est la suivante :

$$\sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2))} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\sigma_{xy}^2}$$

La contrainte équivalente de Von Mises au nœud 265 vaut donc 120 MPa.

Q22.2 La contrainte équivalente de Von Mises n'est pas une forme linéaire des contraintes qui la constitue. La superposition des contraintes de Von Mises n'est donc pas possible. Il faut superposer les états de contraintes, et calculer la contrainte équivalente de Von Mises de ce nouvel état :

$$\begin{bmatrix} 70 & 50 & 0 \\ 50 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 & 90 & 0 \\ 90 & 95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170 & 140 & 0 \\ 140 & 185 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

soit une contrainte équivalente de Von Mises de 300 MPa.

Q22.3 Les contraintes principales sont les valeurs propres de la matrice des contraintes.

$$\begin{vmatrix} 170 - \lambda & 140 & 0 \\ 140 & 185 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{soit } \sigma_I = 37 \text{ MPa, } \sigma_{II} = 318 \text{ MPa et } \sigma_{III} = 0 \text{ MPa.}$$

Les directions principales sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres.

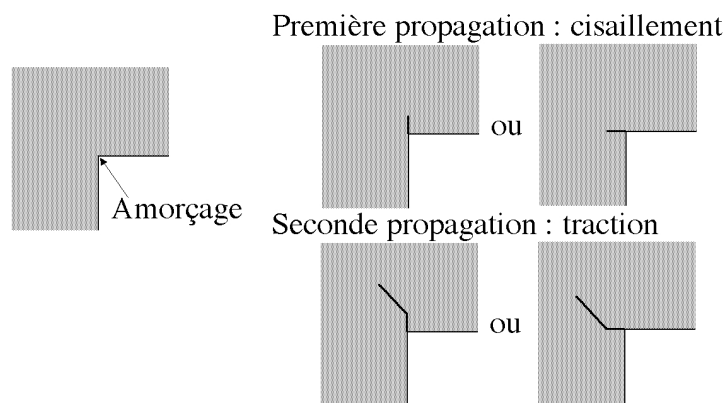
$$\text{Pour } \sigma_I, \begin{bmatrix} 133 & 140 & 0 \\ 140 & 148 & 0 \\ 0 & 0 & -37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ donne } e_1 = -1,05 e_2 \text{ et } e_3 = 0, \text{ soit } \begin{bmatrix} -0,72 \\ 0,69 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pour } \sigma_{II}, \begin{bmatrix} -148 & 140 & 0 \\ 140 & -133 & 0 \\ 0 & 0 & -318 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ donne } e_1 = 0,95 e_2 \text{ et } e_3 = 0, \text{ soit } \begin{bmatrix} 0,69 \\ 0,72 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pour } \sigma_{III}, \begin{bmatrix} 170 & 140 & 0 \\ 140 & 185 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ donne } e_1 = 0 \text{ et } e_2 = 0, \text{ soit } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le nœud 265 est situé sur le bord libre, au niveau du milieu du congé de raccordement. Le vecteur contrainte suivant la normale au bord libre est théoriquement nulle. Cette normale correspond ici globalement à la première direction principale, et la première contrainte principale est bien quasiment nulle (le dixième de la contrainte maximale).

Q22.4 L'amorçage de la fissure aura lieu dans la zone la plus sollicitée, soit au voisinage du nœud 265. Les plans de cisaillement maximum dans cette zone sont situés à $\pm 45^\circ$ des directions principales, qui sont ici sensiblement à $\pm 45^\circ$ des directions x et y du portique (figure ci-dessous). Les plans de cisaillement maximum correspondent donc aux directions x et y du portique, et s'est suivant ces plans que les fissures vont commencer à se propager. Le plan de traction maximum dans cette zone est perpendiculaire à la direction principale correspondant à la traction maximum (σ_{II}), soit ici à $+45^\circ$ de la direction y.



Partie 3 : Mécanique des fluides (corrigé)

Section 31 : Mise en équation du vérin de pilotage.

Q31.1 Lorsque le simulateur est au repos, les forces en présence sont le poids de la tige et du piston du vérin, la force exercée sur la tige qui résulte du poids de la plate-forme, les actions de pression sur les deux faces du piston. Le frottement peut être négligé en première approche. L'écriture du PFS donne :

$$p_1.S_1 - p_2.S_2 - mg.\sin \alpha - F = 0$$

avec : $F = Mg.\sin \alpha$; $S_1 = \pi D_1^2/4$; $S_2 = \pi(D_1^2 - D_2^2)/4$

On peut supposer que la pression p_2 est sensiblement la pression atmosphérique (lors de la mise en position de la plate-forme, la chambre supérieure communique avec le réservoir du groupe hydraulique à la pression atmosphérique).

$$\text{D'où } p_1 = (p_2.S_2 + (M+m).g.\sin \alpha) / S_1$$

$$\text{A.N. } p_1 = 74,47 \text{ bar}$$

Q31.2 Lorsque le simulateur est en fonctionnement, le débit de fuite entre les deux chambres crée un frottement fluide s'opposant au déplacement du piston. La vitesse du piston étant supposée constante, on néglige les quantités d'accélération.

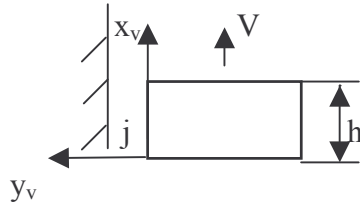
Pour un mouvement ascendant, on a :

$$p_1.S_1 - p_2.S_2 - mg.\sin \alpha - F - F_f = 0$$

Pour un mouvement descendant, on a :

$$p_1.S_1 - p_2.S_2 - mg.\sin \alpha - F + F_f = 0$$

Q31.3 On s'intéresse à l'écoulement entre les deux chambres résultant du jeu j . Le problème est modélisable de la façon suivante :



Les parois cylindriques sont assimilées à deux plaques parallèles, de largeur $\pi.D_1$, de hauteur h distantes de j . On utilise les équations de Navier-Stokes et l'équation de continuité. On établit l'équation donnant l'allure générale du profil des vitesses, puis on particularise le problème grâce aux conditions aux limites.

$$\text{On a : } \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \overrightarrow{\Delta v}$$

avec : $\vec{f} = \vec{0}$ (on néglige les effets des actions de pesanteur sur l'huile)

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_v} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{\Delta v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_{x_v}}{\partial y_v^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où : } \mu \frac{\partial^2 v_{x_v}}{\partial y_v^2} = \frac{\partial p}{\partial x_v}$$

Avec les conditions limites suivantes : $y_v = 0$, $v_{x_v} = V$ et $y_v = j$, $v_{x_v} = 0$
on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial x_v} = \frac{p_2 - p_1}{h} \quad \text{et} \quad v_{x_v} = \frac{p_2 - p_1}{2\mu.h} \cdot (y_v^2 - y_v \cdot j) - \frac{V}{j} \cdot y_v + V$$

Q31.4 Par intégration du champ des vitesses à travers la section de passage de l'huile, on trouve le débit de fuite Q_f . On a :

$$Q_f = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad \text{avec } dS = \pi D_1 \cdot dy_v \quad \text{et} \quad \vec{v} \cdot \vec{n} = v_{x_v}$$

Ce qui implique :

$$Q_f = \pi D_1 \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{12\mu.h} \cdot j^3 + \frac{V \cdot j}{2} \right)$$

A.N. : $Q_f = 3,48 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$

Q31.5 La force de frottement F_f est le produit de la contrainte de viscosité au niveau du piston par la surface de celui-ci.

$$\text{On a : } \vec{F}_f = -\pi D_1 \cdot h \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial v_{xv}}{\partial y_v} \right)_{y_v=0} \cdot \vec{x}_v \rightarrow \vec{F}_f = -\pi D_1 \cdot ((p_1 - p_2) \cdot \frac{j}{2} - \frac{V \cdot h \cdot \mu}{j}) \cdot \vec{x}_v$$

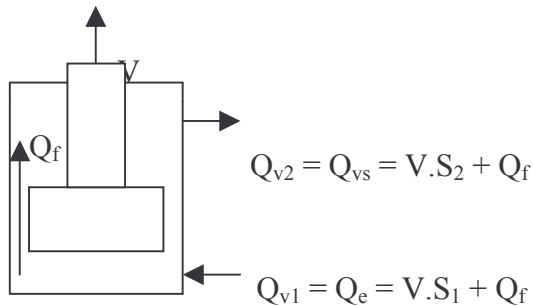
A.N. : $\vec{F}_f = -29,23 \vec{x}_v$

Q31.6 La force F étant identique que la plate-forme monte ou descende, p_1 est supérieure à p_2 (la différence de pression $p_1 - p_2$ est pratiquement identique). L'analyse de la relation donnant le débit de fuite Q_f montre :

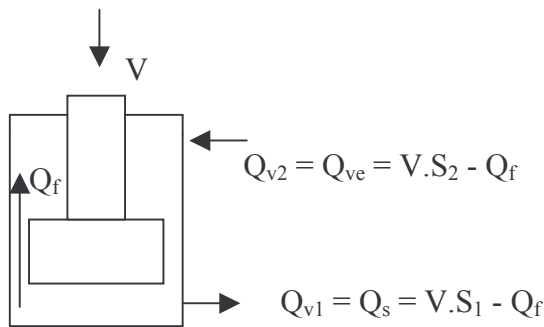
- qu'il est presque identique que la plate-forme monte ou descende
- qu'il va toujours de la chambre inférieure vers la chambre supérieure.

Etablissement des relations donnant les débits :

Cas d'un mouvement ascendant



Cas d'un mouvement descendant



Q31.7 Les différents organes de réglage et composants de l'installation sont modélisables par des singularités et des longueurs droites en série. Pour un écoulement turbulent, les différentes pertes de charge (et également la somme) sont proportionnelles à la vitesse au carré. Or $v = Q_v/S$, donc finalement $\Delta p = K \cdot Q_v^2$ avec K en $\text{Pa} \cdot \text{s}^2/\text{m}^6$ ou kg/m^7 .

Q31.8 L'expression générale des pertes de charge linéaires Δp_{lin} est :

$$\Delta p_{lin} = \lambda \cdot l/d \cdot \rho v^2/2$$

avec v : vitesse dans la conduite de section S. Comme $v = Q_v/S$, on peut écrire :

$$\Delta p_{lin} = \lambda \cdot l/d \cdot \rho Q_v^2/(2 \cdot S^2)$$

Nota : Pour évaluer λ , il faut déterminer le régime de l'écoulement.

Q31.9 On applique le théorème de Bernoulli généralisé entre 1 point dans la chambre supérieure et 1 point à la sortie de l'huile dans le réservoir du groupe hydraulique.

On néglige les actions de pesanteur pour l'huile et les pertes de charge singulières autres que celles des composants de l'installation. L'énergie cinétique de l'huile dans la chambre supérieure est négligeable et l'huile débouche dans le réservoir à la pression atmosphérique.

On a :

$$p_2 = \Sigma(\Delta p_{lin} + \Delta p_{sing}) = (\lambda_1 \cdot (l_3 + l_4) / d \cdot \rho / (2 \cdot S^2) + K_{d2}) \cdot Q_v^2$$

A.N. : $Q_{v2} = V \cdot S_2 = V \cdot \pi (D_1^2 - D_2^2) / 4 = 0,189 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$; $v_2 = 1,228 \text{ m/s}$;

$Re_2 = 1290$ (régime laminaire) d'où $\lambda = 64/Re_2$; $p_2 = 2,03 \text{ bar}$.

Q31.10 On applique le théorème de Bernoulli généralisé entre 1 point à la sortie de la pompe et 1 point au débouché de la conduite dans la chambre inférieure du vérin. Comme précédemment on néglige les effets de la pesanteur sur l'huile.

On a :

$$p_3 = p_1 + \Sigma(\Delta p_{lin} + \Delta p_{sing}) = p_1 + (\lambda_1 \cdot (l_1 + l_2) / d \cdot \rho / (2 \cdot S^2) + K_{d1} + K_{c1} + K_{I1}) \cdot Q_v^2$$

Il faut calculer p_1 et les pertes de charges

Pour calculer p_1 , on utilise la relation établie à la question 31.2 en négligeant F_f .

A.N. : $p_1 = 75,6 \text{ bar}$

$Q_{v1} = V \cdot S_1 = V \cdot \pi D_1^2 / 4 = 0,393 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$; $v_1 = 2,55 \text{ m/s}$;

$Re_1 = 2678$ (régime turbulent) d'où $\lambda = 0,316 \cdot Re_1^{-0,25} = 0,0439$;

$\Sigma(\Delta p_{lin} + \Delta p_{sing}) = 4,8 \text{ bar}$; $p_3 = 80,4 \text{ bar}$

Section 32 : Etude du fonctionnement de la pompe à palettes à l'aide de groupements sans dimension.

Q32.1 Pour obtenir les différents groupements sans dimension, on utilise la méthode de Rayleigh. On effectue dans un premier temps l'inventaire des variables dimensionnées intervenant dans le problème. Cette analyse s'appuie sur l'expérience.

Dans le cas des pompes à palettes, l'énoncé du problème suggère les variables suivantes : la puissance absorbée P_{abs} , le débit Q_{vp} , la vitesse de rotation n , la cylindrée Cyl , la différence de pression entre l'entrée et la sortie Δp , la masse volumique de l'huile ρ .

On exprime chaque variable en fonction d'un système d'unités fondamentales. En dynamique des fluides, les unités fondamentales retenues sont la masse M , la longueur L et le temps T .

Si une relation existe entre les variables, elle peut avoir la forme suivante :

$$P_{abs} = K \cdot Q_v^a \cdot \Delta p^b \cdot Cyl^c \cdot n^d \cdot \rho^e$$

On traduit l'homogénéité dimensionnelle de la relation pour les 3 unités fondamentales. On trouve :

$$P_{abs} = K \cdot \Delta p \cdot Cyl \cdot n \left(\frac{Q_v}{Cyl \cdot n} \right)^a \left(\frac{\rho \cdot Cyl^{2/3} \cdot n^2}{\Delta p} \right)^e$$

On voit apparaître les 3 groupements sans dimension :

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho \cdot Cyl^{2/3} \cdot n^2} \text{ avec } \Pi_1 : \text{Coefficient de pression}$$

$$\Pi_2 = \frac{Q_{vp}}{Cyl \cdot n} \text{ avec } \Pi_2 = \eta_{vol} : \text{Rendement volumétrique de la pompe}$$

$$\Pi_3 = \frac{Cyl \cdot n \cdot \Delta p}{P_{abs}} \text{ avec } \Pi_3 = \eta_{méca} : \text{Rendement mécanique de la pompe}$$

Le théorème de Vaschy-Buckingham permet de prévoir le nombre de groupements sans dimension. Pour un problème comportant n variables indépendantes et p unités fondamentales, on obtient n-p groupements sans dimension.

Q32.2 L'utilisation des groupements sans dimension permet, connaissant les caractéristiques d'une pompe:

- de prévoir comment les caractéristiques de la pompe vont évoluer lorsqu'on modifie 1 ou plusieurs paramètres de fonctionnement (ex: n, Δp , ρ).
- de prévoir les caractéristiques d'une pompe géométrique semblable.

La démarche à suivre pour trouver le point de fonctionnement est la suivante : connaissant la cylindrée, Δp , ρ et n, on calcule π_1 . Sur les courbes caractéristiques, on relève η_{vol} et $\eta_{méca}$. On en déduit la puissance absorbée et le débit d'huile Q_{vp} .

Application à l'installation :

$$Cyl = 0,019 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} ; n = 24,16 \text{ tr/s} ; \Delta p = 80 \cdot 10^5 \text{ Pa} ; \rho = 900 \text{ kg/m}^3$$

A.N. : $\pi_1 = 21\,387$; $\eta_{vol} = 0,95$; $\eta_{méca} = 0,85$

$$P_{abs} = 4320 \text{ W} ; Q_{vp} = 0,413 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} \text{ (} 24,78 \text{ L/mn)}$$

Q32.3 La cylindrée et la vitesse de rotation sont différentes.

$$\text{On calcule } \pi'_1 = \pi_1 \cdot (1/2^{2/3}) \cdot (1/(1,05^2)) = 0,5714 \cdot \pi_1 = 12\,220.$$

Avec la même méthode qu'en Q32.2, on trouve :

$$\eta_{vol} = 0,97 ; \eta_{méca} = 0,79$$

$$P_{abs} = 9761 \text{ W} ; Q_{vp} = 0,935 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} \text{ (} 56,1 \text{ L/mn)}$$

Section 33: Etude des effets thermiques associés au pilotage de la plate-forme.

Q33.1 L'échauffement de l'huile est beaucoup plus important à la descente dont le contrôle nécessite la création d'une perte de charge importante au niveau du limiteur de débit.

Q33.2 La puissance thermique créée a deux origines principales : les pertes de charge et les frottements mécaniques au niveau de la pompe.

La puissance thermique P_{th} créée par des pertes de charge Δp est $P_{th} = \Delta p \cdot Q_v$. Il est nécessaire d'analyser la manière dont les débits se répartissent lors de la descente du vérin et les chutes de pression.

Soit Q_{vp} le débit de la pompe, Q_{v2} le débit entrant dans la chambre supérieure du vérin, Q_{v1} le débit sortant de la chambre inférieure du vérin, Q_{vlim} le débit traversant le limiteur de débit. En négligeant le débit de fuite au niveau du piston du vérin, on a :

$$Q_{v2} = V \cdot \pi (D_1^2 - D_2^2) / 4 \quad ; \quad Q_{v1} = V \cdot \pi D_1^2 / 4 \quad ;$$

$$Q_{vlim} = Q_{vp} - Q_{v2} = Q_{vp} - V \cdot \pi (D_1^2 - D_2^2) / 4$$

Lorsque le limiteur de pression s'ouvre, la pression au refoulement de la pompe est égale à la pression de réglage du limiteur de pression. Les expressions des chutes de pression dans les différentes parties de l'installation sont :

Entre l'entrée du limiteur de pression et le réservoir : $p_{lim} - p_{atm}$

Entre la sortie de la pompe et l'entrée de l'huile dans le vérin : $p_{lim} - p_2$

Entre la sortie du vérin et le réservoir d'huile : $p_1 - p_{atm}$

Nota: En pression relative, $p_{atm} = 0$

Les expressions des chutes de pression peuvent être établies en se référant à la démarche de la section 31.

La puissance thermique P_{th1} créée par les pertes de charge est :

$$P_{th1} = (p_{lim} - p_{atm}) \cdot Q_{vlim} + (p_{lim} - p_2) \cdot Q_{v2} + (p_1 - p_{atm}) \cdot Q_{v1}$$

Le rendement mécanique η_p d'une pompe est défini par : $\eta_p = P_{hydraulique} / P_{mécanique}$

La puissance hydraulique est égale à : $P_{hydraulique} = (p_{lim} - p_{atm}) \cdot Q_{vp}$

La puissance mécanique transformée en chaleur est : $P_{th2} = P_{mécanique} - P_{hydraulique}$
 $= P_{hydraulique} \cdot (1/\eta_p - 1)$

D'où : $P_{th2} = (p_{lim} - p_{atm}) \cdot Q_{vp} \cdot (1/\eta_p - 1)$

La puissance thermique totale $P_{th} = P_{th1} + P_{th2}$

Q33.3 L'analyse des équations montre qu'on peut diminuer les pertes thermiques en réduisant ou supprimant le débit traversant le limiteur de pression. Il faut dans ce cas utiliser une pompe à débit variable.

Q33.4 On effectue un bilan thermique. La puissance thermique créée est :

- échangée par les composants et les conduites
- stockée dans l'huile sous forme de chaleur.

On a : $P_{thm} = \sum K_i \cdot S_i \cdot (\theta - \theta_a) + \rho \cdot c_h \cdot V_h \cdot d\theta / dt$

L'intégration de cette équation différentielle permet de trouver le temps t nécessaire pour que la température de l'huile augmente d'une température initiale θ_1 jusqu'à une température finale θ_2 .

$$\text{On a : } t = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\rho \cdot c_h \cdot V_h \cdot d\theta}{P_{thm} - \sum K_i \cdot S_i (\theta - \theta_a)}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \theta_a + \frac{P_{thm}}{\sum K_i \cdot S_i} \left(1 - e^{\frac{-\sum K_i \cdot S_i \cdot t}{\rho \cdot c_h \cdot V_h}} \right) + (\theta_2 - \theta_1) \cdot e^{\frac{-\sum K_i \cdot S_i \cdot t}{\rho \cdot c_h \cdot V_h}}$$