

---

## Partie 1 : Mécanique des solides rigides

---

### Section 10 : Analyse préliminaire d'une structure fermée simplifiée

Afin de mettre en place la méthode d'analyse sans être pénalisé par des calculs trop complexes, nous étudions la structure plane schématisée sur la figure 10-1. Deux vérins sont articulés sur le sol, un en A et l'autre en B. Une distance  $2a$  sépare les points A et B, O est au milieu de AB. Les deux autres extrémités sont articulées en M. La position du point M (coordonnées  $x$  et  $y$  dans le repère  $O, X, Y$ ) est définie par les longueurs  $AM = z_1$  et  $BM = z_2$  de ces deux vérins.  $z_1$  et  $z_2$  sont pilotables en fonction du temps.

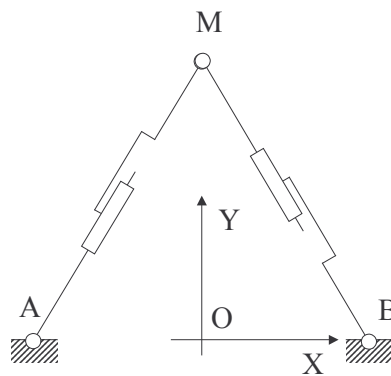


Figure 10-1 : Structure simplifiée

**Q10.1** Ecrire deux relations scalaires entre les longueurs  $z_1$  et  $z_2$  et les coordonnées  $x$  et  $y$  du point M. On mettra ces relations sous la forme ci-dessous et on précisera les expressions de  $f_1(x,y)$  et  $f_2(x,y)$  :

$$\begin{cases} z_1^2 + f_1(x,y) = 0 \\ z_2^2 + f_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

**Q10.2** Dans la position initiale, les deux vérins ont une longueur  $z_m$  identique. Déterminer les coordonnées  $x_0$  et  $y_0$  de la position initiale du point M.

**Q10.3** Soit  $[F]$  le vecteur colonne de coordonnées  $F_1$  et  $F_2$  définies par

$$\begin{cases} F_1 = z_1^2 + f_1(x,y) \\ F_2 = z_2^2 + f_2(x,y) \end{cases}$$

Le système non linéaire où l'inconnue  $[X]$  est un vecteur colonne de coordonnées  $x$  et  $y$  à résoudre s'écrit donc :

$$[F] = [0]$$

Calculer l'opérateur  $\underline{\text{grad}}[F]$ . La figure 10-2 illustre la méthode itérative de résolution de Newton sur le cas de dimension 1. Montrer comment la connaissance de  $[F]$  et de  $\underline{\text{grad}}[F]$  pour la position  $[X_i]$  permet de déterminer  $[X_{i+1}]$ .

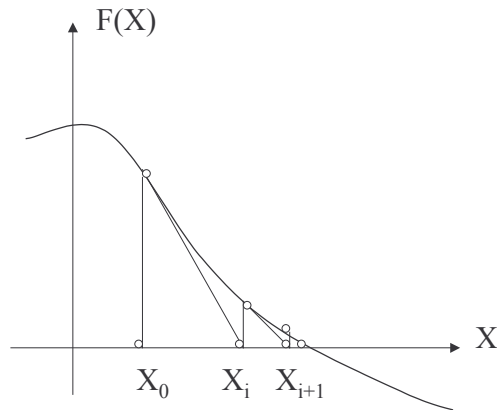


Figure 10-2 : Principe de la méthode de Newton

Les conditions initiales sont :  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ . On donne les évolutions  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  et on souhaite connaître les positions successives en 100 instants entre  $t = 0$  et  $t = t_f$ ,  $t_f$  est l'instant final du mouvement étudié. Décrire sous forme de organigramme, l'algorithme qui permet la détermination de ces 100 positions. A chaque pas de temps, la résolution du système  $[F] = [0]$  avec une précision  $\varepsilon$  donnée, sera effectuée par la méthode de Newton.

**Q10.4** La position  $[X]$  étant connue, montrer que l'opérateur  $\underline{\text{grad}}[F]$  permet aussi le calcul de la vitesse  $[\dot{X}]$  par simple inversion d'un système linéaire dont on précisera le membre connu  $[V]$  :

$$[V] = \underline{\text{grad}}[F].[\dot{X}]$$

**Q10.5** Même question pour le calcul de l'accélération  $[\ddot{X}]$ , la vitesse et la position étant connues. On précisera le membre connu  $[\Gamma]$  :

$$[\Gamma] = \underline{\text{grad}}[F].[\ddot{X}]$$

## Section 11 : Analyse géométrique de la position de la plate-forme 3D

Dans la suite de cette section et dans les sections suivantes, nous nous intéressons à la structure de la plate-forme 3D (voir figure 11-1). Celle-ci est rigidement fixée sur un plateau guidé par 6 vérins. Une extrémité de deux vérins est liée à chaque point d'ancrage I, J ou K. Les autres extrémités des 6 vérins sont liées (aussi par deux) au sol (supposé galiléen) aux points A, B et C.

A, B et C sont disposés équi-angulairement sur un cercle (Cs), dans un plan horizontal, de rayon  $R_s$ . Les points I, J et K sont disposés sur un cercle (Cp) de rayon  $R_p$  sur le plateau. Les liaisons entre les vérins et le plateau ou le sol (en A, B, C, I, J et K) sont modélisées par des liaisons sphériques. Compte tenu de la conception des vérins, on modélise par une liaison pivot-glissant, le guidage entre le corps et la tige du vérin.

$$R_s = 1,7 \text{ m} \quad \text{et} \quad R_p = 1,4 \text{ m}$$

La longueur d'un vérin entre les centres des liaisons sphériques est notée  $z_{PQ}$ . (P et Q sont des noms génériques pour les centres des liaisons sphériques A, B, C, I, J ou K). On commande indépendamment les 6 vérins ; soient les 6 longueurs  $z_{AJ}$ ,  $z_{AK}$ ,  $z_{BI}$ ,  $z_{BK}$ ,  $z_{CI}$ ,  $z_{CJ}$  au cours du temps. A chaque jeu de 6 longueurs, correspond deux positions possibles de la plate-forme (une seule est correspond à une altitude positive).

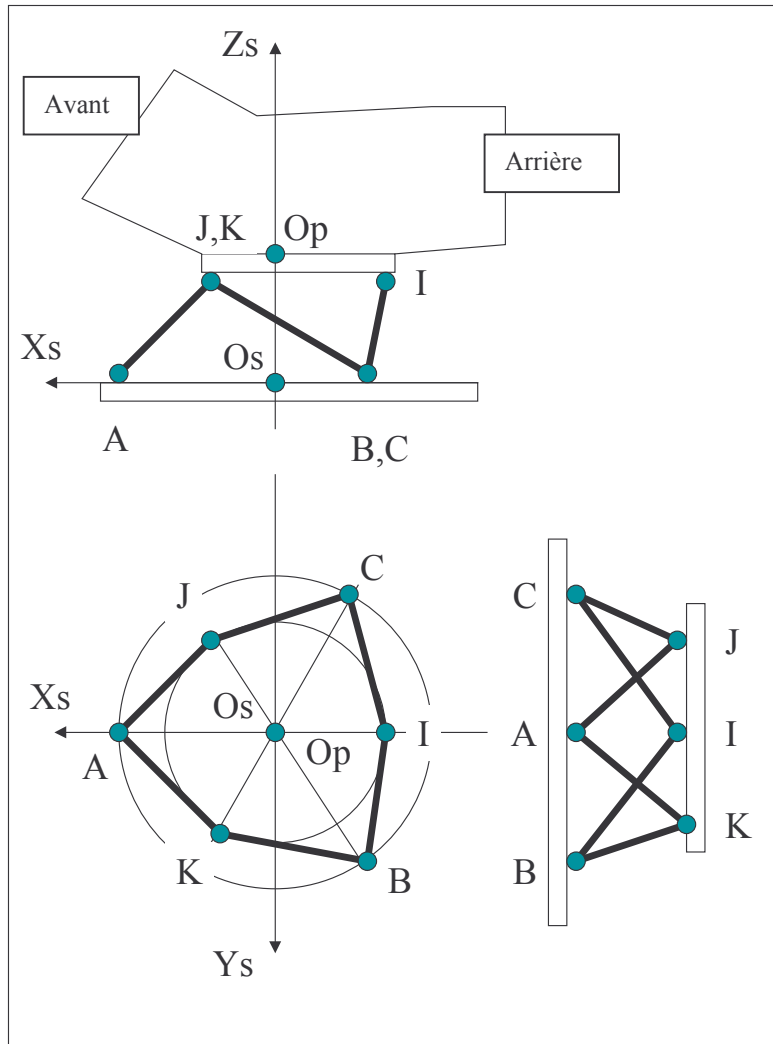


Figure 11-1 : Structure de la plate-forme dans la position repos. Dans cette position les bases  $\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s$  et  $\vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p$  sont confondues.

La position de la plate-forme, dans l'espace réservé pour l'attraction est paramétrée par 6 degrés de mouvement : les trois coordonnées  $(x, y, z)$  du centre Op du cercle (Cp) dans le repère galiléen  $(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  ainsi que trois angles analogues d'Euler  $(\psi, \theta, \phi)$  permettant le passage de la base liée au sol  $(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  à la base liée à la plate-forme  $(\vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$ . Les bases intermédiaires sont définies sur la figure 11-2.

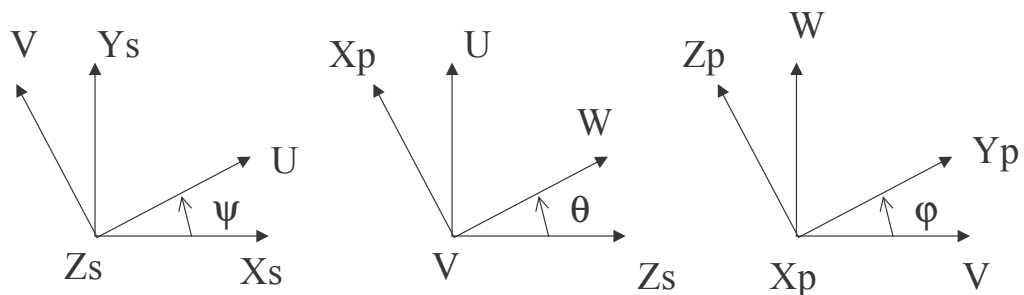


Figure 11-2 : Angles de passage entre les bases liées au sol et à la plate-forme

**Q11.1** Mettre en place le graphe des liaisons faisant intervenir : les 6 vérins (on rappelle que le modèle de la liaison entre la tige ( $T_i$ ) et le corps ( $C_i$ ) est une liaison pivot-glissant), la plate-forme (P) et le sol (S). Déterminer le nombre de boucles cinématiques indépendantes  $\nu$  et le nombre de mobilités internes  $m_i$ . La mobilité utile correspond aux 6 mouvements indépendants de la plate-forme. Déterminer le degré de mobilité  $m$  (c-à-d.  $m = m_u + m_i$ ) de ce mécanisme et en déduire le rang  $r_c$  du système cinématique associé

**Q11.2.** Toutes les liaisons sont supposées parfaites. Que vaut le degré d'hyperstatisme  $h$  ? Qu'en concluez vous quant à la détermination des efforts dans les différentes liaisons du mécanisme ?

**Q11.3** Donner les expressions des coordonnées  $x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B$  et  $x_C, y_C, z_C$  des points A, B et C dans le repère  $(O_s, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  du sol en fonction des données du problème. Application numérique.

**Q11.4** Soient une position quelconque des 6 vérins à l'instant « t » caractérisée par les longueurs  $z_i(t)$ . Ecrire les six relations liant les longueurs des vérins aux coordonnées  $x_I, y_I, z_I, x_J, y_J, z_J$  et  $x_K, y_K, z_K$  des points I, J et K dans le repère  $(O_s, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ .

**Q11.5** Les longueurs de vérins (tous identiques) varient entre les valeurs mini et maxi suivantes :

$$z_m = 2,00 \text{ m et } z_M = 3,50 \text{ m}$$

Déterminer la hauteur minimale  $h_m$  de la plate-forme lorsque tous les vérins sont rentrés et la hauteur maximale  $h_M$  lorsque tous les vérins sont sortis.

**Q11.6** On considère que les vérins AJ et AK ont même longueur, que les vérins CJ et BK ont même longueur et que CI et BI ont même longueur. Par un croquis, préciser la position extrême du plateau de la plate-forme basculé vers l'avant. Justifiez que cette position correspond à AJ et CJ rentrés et à CI sortis. Calculer l'angle  $\theta_{av}$  correspondants, compte tenu de la complexité des relations analytiques à résoudre on pourra proposer une détermination graphique de cet angle.

**Q11.7** On s'intéresse au problème géométrique direct : compte tenu des longueurs des tiges de vérin on cherche à déterminer les paramètres  $(x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$  de la position de la plate forme. Donner les expressions des coordonnées  $\alpha_I, \beta_I, \gamma_I, \alpha_J, \beta_J, \gamma_J$  et  $\alpha_K, \beta_K, \gamma_K$  des points I, J et K dans le repère mobile  $(O_p, \vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$  de la plate-forme en fonction des données du problème. Application numérique.

**Q11.8** Ecrire la matrice de passage [R] entre la base fixe liée au sol et la base mobile liée à la plate-forme. En déduire la relation entre les coordonnées  $x_M, y_M, z_M$  d'un point M quelconque de la plate-forme dans le repère fixe du sol connaissant sa position par ces coordonnées  $\alpha_M, \beta_M, \gamma_M$  dans le repère mobile de la plate-forme.

**Q11.9** Déduire de la question précédente, les expressions des coordonnées  $x_I, y_I, z_I, x_J, y_J, z_J$  et  $x_K, y_K, z_K$  des points I, J et K dans le repère  $(O_s, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  en fonction des paramètres de position de la plate-forme  $(x, y, z$  et  $\psi, \theta, \varphi)$ .

## Section 12 : Analyse d'une phase de mouvement particulière de la plate-forme

Dans la suite, on considère une phase de mouvement particulière pendant laquelle  $y, \psi$  et  $\varphi$  restent constamment nuls. L'étude du mouvement de la cabine devient plan (ce qui ne

correspond pas au type de mouvement de la cabine pour une très large proportion de la durée de l'attraction).

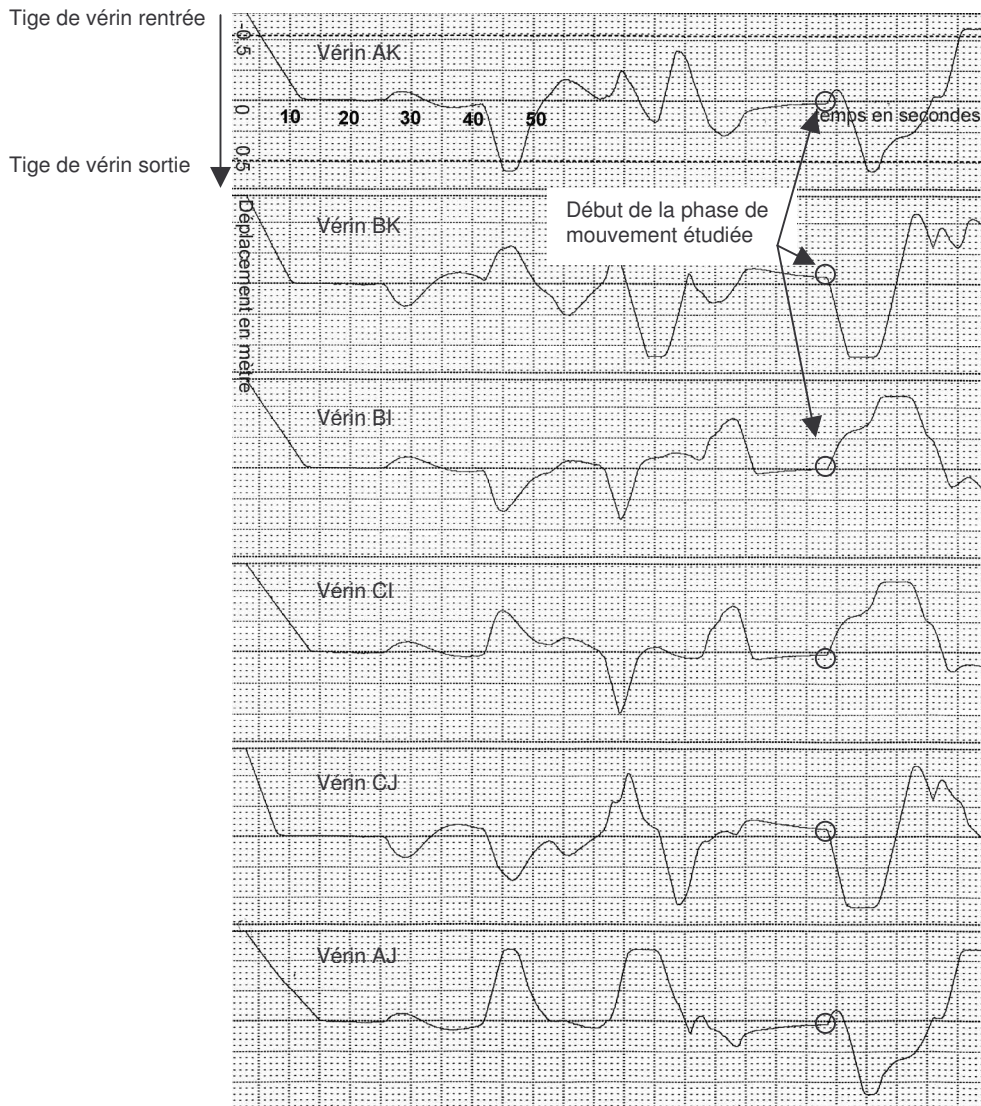


Figure 12-1 : Evolution des positions des 6 vérins de la plate-forme

**Q12.1** Déterminer la matrice de rotation [R] pour ce type de mouvement. Que deviennent les coordonnées des points I, J et K dans le repère fixe du sol ? Montrer que pour imposer un tel mouvement, il faut que :

$$z_{AJ} = z_{AK} = z_1 ; z_{CI} = z_{BI} = z_2 ; z_{BK} = z_{CJ} = z_3$$

**Q12.2** La figure 12-1 représente l'évolution au cours du temps des positions des 6 vérins pour la première phase de l'attraction. Sur le graphique, la position 0 du vérin correspond à la longueur moyenne entre  $z_m$  et  $z_M$ . Le début de la période de mouvement étudié est indiqué sur le graphique ( $t_i = 98$  s). Décrire qualitativement le mouvement de la cabine durant cette phase et indiquer à quel instant le mouvement redevient 3D.

**Q12.3** Compte tenu des simplifications dues au mouvement particulier étudié, écrire le système de 3 équations géométriques obtenu sous la forme :

$$F_i(x, z, \theta) = z_i^2 + f_i(x, z, \theta) = 0$$

où  $z_i$  est la longueur d'un des 3 vérins et  $f_i(x, z, \theta)$  la fonction non linéaire associée à cette longueur.

Les longueurs  $z_i(t)$  sont déterminées sur le graphe. On suppose aussi connues les fonctions  $\dot{z}_i(t)$  et  $\ddot{z}_i(t)$  qui sont les dérivées successives de  $z_i(t)$  par rapport au temps.

**Q12.4** On suit une démarche identique à celle de la section 10. Calculer l'opérateur  $\text{grad}[F]$  et proposer sous forme d'organigramme une méthode itérative de résolution de ce système d'équations non linéaires partant de la position initiale du mouvement étudié (on supposera que les valeurs de  $x_0, y_0, z_0, \psi_0, \theta_0, \varphi_0$  sont toutes nulles lorsque le mouvement débute) vers une position quelconque de l'espace accessible.

On considère l'effet du mouvement sur le passager dans le cas d'une simulation d'accélération brutale (Figure 12-2 cas 1). Le passager est en train de visionner le passage en « vitesse lumière » de son vaisseau et ressent cette accélération qui le plaque à son siège. Les capacités d'accélération des vérins étant limitées on procède différemment dans ce simulateur : tout en pouvant jouer sur les débattements horizontaux « x » et verticaux « z », on incline la plate-forme d'un angle  $\theta$  (figure 12-2 cas 2). Nous allons comparer les deux mouvements afin de déterminer les conditions à vérifier pour que la sensation soit la plus réaliste possible.

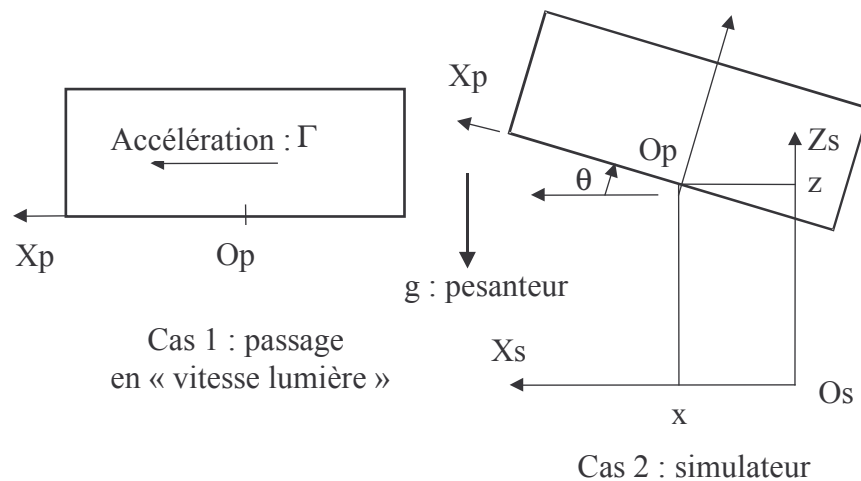


Figure 12-2 : Paramétrages des deux types de mouvement comparés. Attention, l'angle  $\theta$  est négatif. Il est conseillé de travailler sur une figure de calcul annexe où  $\theta$  serait positif compris entre 0 et  $\pi/2$ .

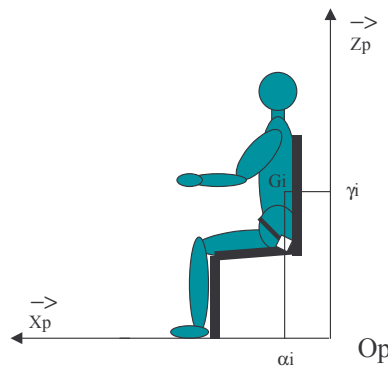


Figure 12-3 : Paramétrage de la position du passager du siège (i)

**Q12.5** On considère le passager installé dans la navette de la figure 12-2. Le mouvement de la navette par rapport à un référentiel Galiléen est une translation rectiligne d'accélération  $\Gamma$  très forte mais constante. La masse du passager est notée  $m_i$  et le moment d'inertie du passager par rapport à l'axe  $G_i \vec{Y}_p$  est noté  $I_{G_i}$ . Déterminer le torseur des actions de liaison entre le passager et son siège. Le passager, rigidifié par l'appréhension de ce saut dans l'espace, est supposé se comporter comme un solide indéformable. On précisera le moment en  $G_i$  et la résultante du torseur d'effort : siège  $\rightarrow$  passager. *Données* :  $m_i = 90 \text{ kg}$

**Q12.6** Dans le simulateur, l'accélération est simulée en inclinant la plate-forme vers l'arrière (figure 12-2 cas 2). Le passager, assis sur un siège situé à la position (i), est positionné de telle sorte que son centre d'inertie  $G_i$  se trouve aux coordonnées  $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$  dans la base de la plate-forme. Il est toujours rigidement lié à son siège et ressent les effets du mouvement par l'intermédiaire de son siège. Déterminer dans ce cas, le torseur de la liaison entre le passager et le siège. On précisera le moment en  $G_i$  et la résultante du torseur d'effort : siège  $\rightarrow$  passager. *Données* :  $I_{G_i} = 7,8 \text{ kg.m}^2$

**Q12.7** Déterminer les 3 conditions à vérifier si on souhaite que le passager ait les mêmes sensations entre les deux situations étudiées. Ces conditions ne peuvent être satisfaites exactement. Quelles doivent être les amplitudes en vitesse et en accélération à ne pas dépasser pour que les différences entre les valeurs non nulles de ces torseurs ne dépassent pas 5% ?

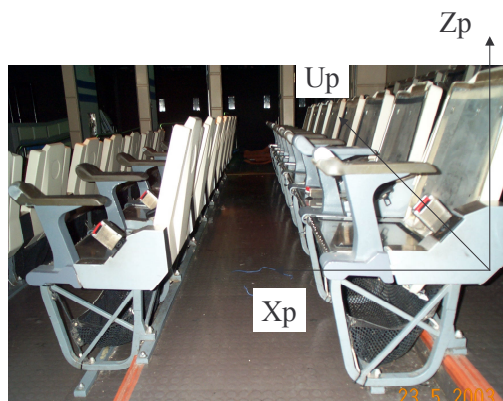


Figure 12-4 : Structure des sièges passagers

**Q12.8** On considère maintenant le cas du freinage brutal de la navette spatiale (dû à un choc contre une paroi par exemple). Une fois de plus, pour augmenter l'effet la plate-forme est inclinée vers l'avant d'un angle  $\theta$ . Au moment le plus critique, les conditions de vitesse et d'accélération sont les suivantes :

$$\theta = 40^\circ ; \dot{\theta} = 0 \text{ rd/s} ; \ddot{\theta} = 0 \text{ rd/s}^2$$

$$\ddot{x} = -4 \text{ m/s}^2 \text{ et } \ddot{z} = -2 \text{ m/s}^2$$

On demande de déterminer la tension dans la ceinture au niveau de l'attache. On supposera que la ceinture est alignée avec le vecteur  $U_p$  de coordonnées  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$  dans la base attachée à la plate-forme et que le passager n'est plus en contact avec le siège (il est projeté vers l'avant et légèrement vers le haut).