

ÉLÉMENTS DE CORRIGÉ

— Partie 1 —

Étude de la phase de décollage de la fusée et validation de la nécessité d'orientation des axes des tuyères TG et TD du moteur Vulcain

Calculs préliminaires

$$\begin{aligned} \bullet \vec{\Omega}_{F/R_g} &= \dot{\varphi} \vec{z}_F + \dot{\theta} \vec{x}_2 + \dot{\Psi} \vec{z}_1 = \dot{\varphi} \vec{z}_F + \dot{\theta} (\cos \varphi \vec{x}_F - \sin \varphi \vec{y}_F) + \dot{\Psi} (\sin \theta \vec{y}_2 + \cos \theta \vec{z}_F) \\ \vec{\Omega}_{F/R_g} &= \dot{\varphi} \vec{z}_F + \dot{\theta} (\cos \varphi \vec{x}_F - \sin \varphi \vec{y}_F) + \dot{\Psi} (\sin \theta (\sin \varphi \vec{x}_F + \cos \varphi \vec{y}_F) + \cos \theta \vec{z}_F) \\ \vec{\Omega}_{F/R_g} &= (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\Psi} \sin \theta \sin \varphi) \vec{x}_F + (\dot{\Psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \vec{y}_F + (\dot{\varphi} + \dot{\Psi} \cos \theta) \vec{z}_F \end{aligned}$$

$$\bullet \vec{V}(G \in F/R_g) = \dot{x} \vec{x}_g + \dot{y} \vec{y}_g + \dot{z} \vec{z}_g. \text{ Or :}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_g &= (\cos \Psi \cos \varphi - \sin \Psi \cos \theta \sin \varphi) \vec{x}_F - (\cos \Psi \sin \varphi + \sin \Psi \cos \theta \cos \varphi) \vec{y}_F + \sin \Psi \sin \theta \vec{z}_F \\ \vec{y}_g &= (\sin \Psi \cos \varphi + \cos \Psi \cos \theta \sin \varphi) \vec{x}_F + (-\sin \Psi \sin \varphi + \cos \Psi \cos \theta \cos \varphi) \vec{y}_F - \cos \Psi \sin \theta \vec{z}_F \\ \vec{z}_g &= \sin \theta \sin \varphi \vec{x}_F + \sin \theta \cos \varphi \vec{y}_F + \cos \theta \vec{z}_F. \text{ Donc :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}(G \in F/R_g) &= \left(\dot{x} (\cos \Psi \cos \varphi - \sin \Psi \cos \theta \sin \varphi) + \dot{y} (\sin \Psi \cos \varphi + \cos \Psi \cos \theta \sin \varphi) + \dot{z} \sin \theta \sin \varphi \right) \vec{x}_F + \\ &\left(-\dot{x} (\cos \Psi \sin \varphi + \sin \Psi \cos \theta \cos \varphi) + \dot{y} (-\sin \Psi \sin \varphi + \cos \Psi \cos \theta \cos \varphi) + \dot{z} \sin \theta \cos \varphi \right) \vec{y}_F + \\ &\left(\dot{x} \sin \Psi \sin \theta - \dot{y} \cos \Psi \sin \theta + \dot{z} \cos \theta \right) \vec{z}_F \end{aligned}$$

1.1. Déterminons l'énergie cinétique $T(\Sigma/R_g)$

Comme les masses de la tuyère **TC** et de l'ensemble **3** sont négligeables devant celles de la fusée **F**, nous avons

$$T(\Sigma/R_g) = T(F/R_g) + T(TC/R_g) + T(3/R_g) = T(F/R_g).$$

$$\text{Or : } T(F/R_g) = \frac{1}{2} m_F \vec{V}(G \in F/R_g)^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{F/R_g} \cdot \overset{=}{I}(G, F) \vec{\Omega}_{F/R_g}. \text{ D'où :}$$

$$2T(\Sigma/R_g) = m_F (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + A_F (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\Psi} \sin \theta \sin \varphi)^2 +$$

$$B_F (\dot{\Psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 + C_F (\dot{\varphi} + \dot{\Psi} \cos \theta)^2$$

1.2. Déterminons les puissances développées par les actions extérieures s'appliquant sur l'ensemble Σ

• Pesanteur

Compte-tenu des hypothèses, seule l'action de la pesanteur sur l'ensemble F sera

prise en compte. Nous avons : $P(\text{pesanteur} \rightarrow F/R_g) = -m_F g \frac{\overrightarrow{OG}}{\|\overrightarrow{OG}\|} \cdot \overrightarrow{V}(G \in F/R_g)$.

En fonction du paramétrage et des résultats précédents, nous obtenons :

$$P(\text{pesanteur} \rightarrow F/R_g) = -m_F g \frac{\dot{x} \cdot \dot{x} + \dot{y} \cdot \dot{y} + \dot{z} \cdot \dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

• Action sur le propulseur gauche PG

Nous avons : $P(\text{gaz} \rightarrow PG/R_g) = F_G \overrightarrow{x}_F \cdot \overrightarrow{V}(A_G \in F/R_g)$.

Or $\overrightarrow{V}(A_G \in F/R_g) = \overrightarrow{V}(G \in F/R_g) + \overrightarrow{\Omega}_{F/R_g} \wedge \overrightarrow{GA}_G$ avec $\overrightarrow{GA}_G = -(a + x_G) \overrightarrow{x}_F + b \overrightarrow{y}_F$.

$\overrightarrow{V}(A_G \in F/R_g) = (\dot{x} \overrightarrow{x}_g + \dot{y} \overrightarrow{y}_g + \dot{z} \overrightarrow{z}_g) + ((\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\Psi} \sin \theta \sin \varphi) \overrightarrow{x}_F +$

$(\dot{\Psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \overrightarrow{y}_F + (\dot{\varphi} + \dot{\Psi} \cos \theta) \overrightarrow{z}_F) \wedge (-(a + x_G) \overrightarrow{x}_F + b \overrightarrow{y}_F)$

Donc :

$$P(\text{gaz} \rightarrow PG/R_g) = F_G \left(\begin{array}{l} -b(\dot{\varphi} + \dot{\Psi} \cos \theta) + \dot{x}(\cos \Psi \cos \varphi - \sin \Psi \cos \theta \sin \varphi) \\ + \dot{y}(\sin \Psi \cos \varphi + \cos \Psi \cos \theta \sin \varphi) + \dot{z} \sin \theta \sin \varphi \end{array} \right)$$

• Action sur le propulseur droit PD

Nous avons : $P(\text{gaz} \rightarrow PD/R_g) = F_D \overrightarrow{x}_F \cdot \overrightarrow{V}(A_D \in F/R_g)$.

Or $\overrightarrow{V}(A_D \in F/R_g) = \overrightarrow{V}(G \in F/R_g) + \overrightarrow{\Omega}_{F/R_g} \wedge \overrightarrow{GA}_D$ avec $\overrightarrow{GA}_D = -(a + x_G) \overrightarrow{x}_F - b \overrightarrow{y}_F$.

$\overrightarrow{V}(A_D \in F/R_g) = (\dot{x} \overrightarrow{x}_g + \dot{y} \overrightarrow{y}_g + \dot{z} \overrightarrow{z}_g) + ((\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\Psi} \sin \theta \sin \varphi) \overrightarrow{x}_F +$

$(\dot{\Psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \overrightarrow{y}_F + (\dot{\varphi} + \dot{\Psi} \cos \theta) \overrightarrow{z}_F) \wedge (-(a + x_G) \overrightarrow{x}_F - b \overrightarrow{y}_F)$

Donc :

$$P(\text{gaz} \rightarrow PD/R_g) = F_D \left(\begin{array}{l} b(\dot{\varphi} + \dot{\Psi} \cos \theta) + \dot{x}(\cos \Psi \cos \varphi - \sin \Psi \cos \theta \sin \varphi) + \\ \dot{y}(\sin \Psi \cos \varphi + \cos \Psi \cos \theta \sin \varphi) + \dot{z} \sin \theta \sin \varphi \end{array} \right)$$

• **Action sur la tuyère TC**

Nous avons : $P(\text{gaz} \rightarrow \text{TC}/R_g) = F_C \vec{x}_T \cdot \vec{V}(\text{O}_T \in \text{TC}/R_g)$. Or :

$$\vec{V}(\text{O}_T \in \text{TC}/R_g) = \vec{V}(\text{O}_F \in \text{TC}/R_g) + \vec{\Omega}_{\text{TC}/R_g} \wedge \overrightarrow{\text{O}_F \text{O}_T} = \vec{V}(\text{O}_F \in F/R_g) + \vec{\Omega}_{\text{TC}/R_g} \wedge \overrightarrow{\text{O}_F \text{O}_T}$$

$$P(\text{gaz} \rightarrow \text{TC}/R_g) = F_C \vec{x}_T \cdot (\vec{V}(\text{O}_F \in F/R_g) + \vec{\Omega}_{\text{TC}/R_g} \wedge \overrightarrow{\text{O}_F \text{O}_T}) = F_C \vec{x}_T \cdot \vec{V}(\text{O}_F \in F/R_g)$$

$$\text{car } F_C \vec{x}_T \cdot (\vec{\Omega}_{\text{TC}/R_g} \wedge \overrightarrow{\text{O}_F \text{O}_T}) = F_C \vec{x}_T \cdot (\vec{\Omega}_{\text{TC}/R_g} \wedge -d \vec{x}_T) = 0.$$

$$\vec{V}(\text{O}_F \in F/R_g) = \vec{V}(\text{G} \in F/R_g) + \vec{\Omega}_{F/R_g} \wedge \overrightarrow{\text{G} \text{O}_F}.$$

$$P(\text{gaz} \rightarrow T/R_g) = F_C \vec{x}_T \cdot (\dot{x} \vec{x}_g + \dot{y} \vec{y}_g + \dot{z} \vec{z}_g) + F_C \vec{x}_T \cdot ((\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\Psi} \sin \theta \cos \varphi) \vec{x}_F +$$

$$(\dot{\Psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \vec{y}_F + (\varphi + \dot{\Psi} \cos \theta) \vec{z}_F) \wedge -\vec{x}_G \vec{x}_F)$$

Comme $\vec{x}_T = \cos \varepsilon \cos \delta \vec{x}_F + \sin \varepsilon \vec{y}_F - \cos \varepsilon \sin \delta \vec{z}_F$ alors :

$$\begin{aligned} P(\text{gaz} \rightarrow \text{TC}/R_g) &= F_C \cos \varepsilon \cos \delta (\dot{x} (\cos \Psi \cos \varphi - \sin \Psi \cos \theta \sin \varphi) + \\ &\dot{y} (\sin \Psi \cos \varphi + \cos \Psi \cos \theta \sin \varphi) + \dot{z} \sin \theta \sin \varphi) + \\ &F_C \sin \varepsilon (-\dot{x} (\cos \Psi \sin \varphi + \sin \Psi \cos \theta \cos \varphi) + \dot{y} (-\sin \Psi \sin \varphi + \cos \Psi \cos \theta \cos \varphi) + \\ &\dot{z} \sin \theta \cos \varphi) - F_C \cos \varepsilon \sin \delta (\dot{x} \sin \Psi \sin \theta - \dot{y} \cos \Psi \sin \theta + \dot{z} \cos \theta) - \\ &F_C \vec{x}_G (\sin \varepsilon (\varphi + \dot{\Psi} \cos \theta) + \cos \varepsilon \sin \delta (\dot{\Psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)) \end{aligned}$$

• **Action due à l'environnement**

Nous avons : $P(E \rightarrow \Sigma/R_g) = \vec{R}(E \rightarrow F) \cdot \vec{V}(\text{G} \in F/R_g) + \vec{M}(G, E \rightarrow F) \cdot \vec{\Omega}_{F/R_g}$.

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} P(E \rightarrow \Sigma/R_g) &= L_E (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\Psi} \sin \theta \sin \varphi) + M_E (\dot{\Psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) + N_E (\varphi + \dot{\Psi} \cos \theta) + \\ &X_E \left(\dot{x} (\cos \Psi \cos \varphi - \sin \Psi \cos \theta \sin \varphi) + \dot{y} (\sin \Psi \cos \varphi + \cos \Psi \cos \theta \sin \varphi) + \dot{z} \sin \theta \sin \varphi \right) + \\ &Y_E \left(-\dot{x} (\cos \Psi \sin \varphi + \sin \Psi \cos \theta \cos \varphi) + \dot{y} (-\sin \Psi \sin \varphi + \cos \Psi \cos \theta \cos \varphi) + \dot{z} \sin \theta \cos \varphi \right) + \\ &Z_E \left(\dot{x} \sin \Psi \sin \theta - \dot{y} \cos \Psi \sin \theta + \dot{z} \cos \theta \right) \end{aligned}$$

Déterminons les puissances développées par les actions intérieures à l'ensemble Σ

Comme les liaisons sont modélisées comme parfaites, nous avons :

$$P_i(\Sigma) = P(\text{TC} \leftrightarrow 3) + P(3 \leftrightarrow F) = C_{M\varepsilon} \vec{z}_3 \cdot \dot{\varepsilon} \vec{z}_3 + C_{M\delta} \vec{y}_3 \cdot \dot{\delta} \vec{y}_3. \text{ Donc :}$$

$$P_i(\Sigma) = C_{M\varepsilon} \dot{\varepsilon} + C_{M\delta} \dot{\delta}$$

1.3. Écrivons les huit équations différentielles qui caractérisent le mouvement

L'équation de Lagrange L_x relative au paramètre x s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(m_F \dot{x} \right) = - \frac{m_F g x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + (F_G + F_D + F_C \cos \varepsilon \cos \delta + X_E)(\cos \Psi \cos \varphi - \sin \Psi \cos \theta \sin \varphi) - (F_C \sin \varepsilon + Y_E)(\cos \Psi \sin \varphi + \sin \Psi \cos \theta \cos \varphi) + (Z_E - F_C \cos \varepsilon \sin \delta) \sin \Psi \sin \theta$$

L'équation de Lagrange L_y relative au paramètre y s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(m_F \dot{y} \right) = - \frac{m_F g y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + (F_G + F_D + F_C \cos \varepsilon \cos \delta + X_E)(\sin \Psi \cos \varphi + \cos \Psi \cos \theta \sin \varphi) + (F_C \sin \varepsilon + Y_E)(\cos \Psi \cos \theta \cos \varphi - \sin \Psi \sin \varphi) + (F_C \cos \varepsilon \sin \delta - Z_E) \cos \Psi \sin \theta$$

L'équation de Lagrange L_z relative au paramètre z s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(m_F \dot{z} \right) = - \frac{m_F g z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + (F_G + F_D + F_C \cos \varepsilon \cos \delta + X_E) \sin \theta \sin \varphi + (F_C \sin \varepsilon + Y_E) \sin \theta \cos \varphi - (F_C \cos \varepsilon \sin \delta - Z_E) \cos \theta$$

L'équation de Lagrange L_ψ relative au paramètre ψ s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(A_F \sin \theta \sin \varphi (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\Psi} \sin \theta \sin \varphi) \right) + \frac{d}{dt} \left(B_F \sin \theta \cos \varphi (\dot{\Psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \right) + \frac{d}{dt} \left(C_F \cos \theta (\dot{\varphi} + \dot{\Psi} \cos \theta) \right) = (F_D - F_G) b \cos \theta - F_C x_G (\sin \varepsilon \cos \theta + \cos \varepsilon \sin \delta \sin \theta \cos \varphi) + L_E \sin \theta \sin \varphi + M_E \sin \theta \cos \varphi + N_E \cos \theta$$

L'équation de Lagrange L_θ relative au paramètre θ s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(A_F \cos \varphi (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\Psi} \sin \theta \sin \varphi) \right) - \frac{d}{dt} \left(B_F \sin \varphi (\dot{\Psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \right) - A_F (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\Psi} \sin \theta \sin \varphi) \dot{\Psi} \cos \theta \sin \varphi - B_F (\dot{\Psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \dot{\Psi} \cos \theta \cos \varphi + C_F (\dot{\varphi} + \dot{\Psi} \cos \theta) \dot{\Psi} \sin \theta = F_C x_G \cos \varepsilon \sin \delta \sin \varphi + L_E \cos \varphi - M_E \sin \varphi$$

L'équation de Lagrange L_φ relative au paramètre φ s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(C_F (\dot{\varphi} + \dot{\Psi} \cos \theta) \right) - A_F (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\Psi} \sin \theta \sin \varphi) (-\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\Psi} \sin \theta \cos \varphi) + B_F (\dot{\Psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) (\dot{\Psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) = (F_D - F_G) b - F_C x_G \sin \varepsilon + N_E$$

L'équation de Lagrange L_δ relative au paramètre δ s'écrit :

$$\mathbf{0} = \mathbf{C}_{M\delta}$$

L'équation de Lagrange L_ε relative au paramètre ε s'écrit :

$$\mathbf{0} = \mathbf{C}_{M\varepsilon}$$

1.4. Précisons les équivalences avec le théorèmes généraux de la dynamique

L'équation de Lagrange L_x est la projection sur la direction \vec{x}_g du théorème de la résultante dynamique appliqué à l'ensemble Σ en mouvement par rapport au repère galiléen R_g .

L'équation de Lagrange L_y est la projection sur la direction \vec{y}_g du théorème de la résultante dynamique appliqué à l'ensemble Σ en mouvement par rapport au repère galiléen R_g .

L'équation de Lagrange L_z est la projection sur la direction \vec{z}_g du théorème de la résultante dynamique appliqué à l'ensemble Σ en mouvement par rapport au repère galiléen R_g .

L'équation de Lagrange L_ψ est la projection sur la direction \vec{z}_g du théorème du moment dynamique en G appliqué à l'ensemble Σ en mouvement par rapport au repère galiléen R_g .

L'équation de Lagrange L_θ est la projection sur la direction \vec{x}_1 du théorème du moment dynamique en G appliqué à l'ensemble Σ en mouvement par rapport au repère galiléen R_g .

L'équation de Lagrange L_φ est la projection sur la direction \vec{z}_F du théorème du moment dynamique en G appliqué à l'ensemble Σ en mouvement par rapport au repère galiléen R_g .

L'équation de Lagrange L_δ est la projection sur la direction \vec{y}_3 du théorème du moment dynamique en O_F appliqué à l'ensemble $\mathbf{3} + \mathbf{TC}$ en mouvement par rapport au repère galiléen R_g .

L'équation de Lagrange L_ε est la projection sur la direction \vec{z}_3 du théorème du moment dynamique en O_F appliqué à l'ensemble \mathbf{TC} en mouvement par rapport au repère galiléen R_g .

1.5.a. Justifions que z et θ restent petits

Si on souhaite maintenir le plan $(G, \vec{x}_F, \vec{y}_F)$ au voisinage du plan $(O, \vec{x}_g, \vec{y}_g)$ de normale \vec{z}_g , on doit avoir :

- $\vec{OG} \cdot \vec{z}_g \approx 0$, donc il faut que $\mathbf{z} \approx \mathbf{0}$.
- $\vec{x}_F \cdot \vec{z}_g \approx 0$. Or $\vec{x}_F \cdot \vec{z}_g = \sin \varphi \sin \theta$
- $\vec{y}_F \cdot \vec{z}_g \approx 0$. Or $\vec{y}_F \cdot \vec{z}_g = \cos \varphi \sin \theta$.

Ces deux dernières conditions entraînent $\theta \approx 0$.

1.5.b. Écrivons les équations après linéarisation

Si z, θ et φ restent voisins de zéro et très petits en amplitude et en vitesse, nous avons : $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$. En négligeant les infiniment petits du second et du troisième ordre, les équations de Lagrange deviennent :

$$L_x : \frac{d}{dt} \left(m_F \dot{x} \right) = - \frac{m_F g x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + (F_G + F_D + F_C \cos \varepsilon \cos \delta + X_E) \cos(\Psi + \varphi) - (F_C \sin \varepsilon + Y_E) \sin(\Psi + \varphi) + (Z_E - F_C \cos \varepsilon \sin \delta) \theta \sin \Psi$$

$$L_y : \frac{d}{dt} \left(m_F \dot{y} \right) = - \frac{m_F g y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + (F_G + F_D + F_C \cos \varepsilon \cos \delta + X_E) \sin(\Psi + \varphi) + (F_C \sin \varepsilon + Y_E) \cos(\Psi + \varphi) + (F_C \cos \varepsilon \sin \delta - Z_E) \theta \cos \Psi$$

$$L_z : \frac{d}{dt} \left(m_F \dot{z} \right) = - \frac{m_F g z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + (F_C \sin \varepsilon + Y_E) \theta - (F_C \cos \varepsilon \sin \delta - Z_E)$$

$$L_\Psi : \frac{d}{dt} \left(C_F (\dot{\varphi} + \dot{\Psi}) \right) = (F_D - F_G) b - F_C x_G (\sin \varepsilon + \theta \cos \varepsilon \sin \delta) + M_E \theta + N_E$$

$$L_\theta : \frac{d}{dt} \left(A_F \dot{\theta} \right) = F_C x_G \varphi \cos \varepsilon \sin \delta + L_E - M_E \varphi$$

$$L_\varphi :$$

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{C}_F (\dot{\varphi} + \dot{\Psi}) \right) = (\mathbf{F}_D - \mathbf{F}_G) \mathbf{b} - \mathbf{F}_C \mathbf{x}_G \sin \varepsilon + \mathbf{N}_E$$

1.5.c. Déduisons-en que les deux rotations δ et ε sont nécessaires

Si on soustrait les équations L_ψ et L_φ , on obtient : $F_C x_G \cos \varepsilon \sin \delta = M_E$.

Par ailleurs comme les efforts F_C , F_D et F_G ne peuvent être réglés, on remarque en utilisant l'équation L_φ que le moment N_E influence directement les évolutions des deux angles Ψ et φ si on maintient l'orientation ε à la valeur nulle.

On en déduit donc que pour contrecarrer les composantes M_E et N_E du moment des actions mécaniques de l'environnement sur la fusée en vol les deux rotations δ et ε sont nécessaires.

Justifions alors la nécessité d'orienter les axes des tuyères TG et TD

L'équation L_θ peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left(A_F \dot{\theta} \right) = (F_C x_G \cos \varepsilon \sin \delta - M_E) \varphi + L_E. \quad \text{Comme } M_E = F_C x_G \cos \varepsilon \sin \delta \quad (\text{voir ci-}$$

dessus) alors $\frac{d}{dt} \left(A_F \dot{\theta} \right) = L_E$. Le moment L_E influence directement l'évolution de

l'angle de roulis θ qui doit rester très petit d'après le texte ! **Ceci justifie alors la nécessité d'orienter les axes des tuyères TG et TD.**

— Partie 2 —

Étude des modes de vibrations de la tuyère centrale TC, validation de leurs valeurs et vérification des conditions de résonance de la structure

2.1. Déterminons les trois équations différentielles faisant intervenir les paramètres x , y et θ

Isolons la tuyère centrale **TC** et faisons le bilan des actions extérieures.

• action à distance :

$$\left\{ T(\text{pesanteur} \rightarrow \text{TC}) \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{m g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

• actions de contact :

$$\left\{ T(\text{bâti 0} \rightarrow \text{TC}) \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(\text{bâti} \rightarrow \text{TC}) = -K_L y \vec{y}_0 - \lambda_L \dot{y} \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

$$\left\{ T(\text{bâti 0} \rightarrow \text{TC}) \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(\text{bâti} \rightarrow \text{TC}) = -K_A x \vec{x}_0 - \lambda_A \dot{x} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

$$\left\{ T(\text{forces de pression} \rightarrow \text{TC}) \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(\text{forces de pression} \rightarrow \text{TC}) = -F_f \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

$$\left\{ T(\text{vérin} \rightarrow \text{TC}) \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(\text{vérin} \rightarrow \text{TC}) = F_C \vec{n} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

$$\left\{ T(\text{timonerie} \rightarrow \text{TC}) \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(\text{timonerie} \rightarrow \text{TC}) = -K_B (y - L_3 \sin \theta) \vec{y}_0 - \lambda_B (\dot{y} - L_3 \dot{\theta} \cos \theta) \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

Appliquons le théorème de la résultante dynamique à la tuyère centrale **TC** en projection sur \vec{x}_0 et \vec{y}_0 :

$$\begin{aligned} m\vec{\Gamma}(G \in TC/0) \cdot \vec{x}_0 &= \vec{F}(\overline{TC} \rightarrow TC) \cdot \vec{x}_0 \\ m\vec{\Gamma}(G \in TC/0) \cdot \vec{y}_0 &= \vec{F}(\overline{TC} \rightarrow TC) \cdot \vec{y}_0 \end{aligned}$$

Calculons $\vec{\Gamma}(G \in TC/0)$

Nous avons : $\vec{V}(G \in TC/0) = \vec{V}(O \in TC/0) + \vec{\Omega}_{TC/0} \wedge \vec{OG}$.

$$\vec{V}(G \in TC/0) = \dot{x} \vec{x}_0 + \dot{y} \vec{y}_0 + \dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge L_4 \vec{x} = \dot{x} \vec{x}_0 + \dot{y} \vec{y}_0 + L_4 \dot{\theta} \vec{y}$$

$$\vec{\Gamma}(G \in TC/0) = \ddot{x} \vec{x}_0 + \ddot{y} \vec{y}_0 + L_4 \ddot{\theta} \vec{y} + L_4 \dot{\theta} \dot{\theta} \vec{z} \wedge \vec{y} = \ddot{x} \vec{x}_0 + \ddot{y} \vec{y}_0 + L_4 \ddot{\theta} \vec{y} - L_4 \dot{\theta}^2 \vec{x}$$

$$\vec{\Gamma}(G \in TC/0) = \ddot{x} \vec{x}_0 + \ddot{y} \vec{y}_0 - L_4 \dot{\theta}^2 \vec{x} + L_4 \ddot{\theta} \vec{y}$$

Nous obtenons en projetant sur \vec{x}_0 et \vec{y}_0 les deux équations différentielles suivantes :

$$m\ddot{x} - mL_4(\dot{\theta}^2 \cos\theta + \ddot{\theta} \sin\theta) = -K_A x - \lambda_A \dot{x} + mg \cos(\beta - \theta) + F_f \sin\theta - F_C \sin(\alpha + \theta)$$

$$m\ddot{y} - mL_4(\dot{\theta}^2 \sin\theta - \ddot{\theta} \cos\theta) = -K_L y - \lambda_L \dot{y} - K_B(y - L_3 \sin\theta) - \lambda_B(\dot{y} - L_3 \dot{\theta} \cos\theta) - mg \sin(\beta - \theta) - F_f \cos\theta + F_C \cos(\alpha + \theta)$$

Appliquons le théorème du moment dynamique en O à la tuyère centrale **TC** en projection sur \vec{z}_0 :

$$\vec{\delta}(O, TC/0) \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}(O, \overline{TC} \rightarrow TC) \cdot \vec{z}_0$$

Calculons $\vec{M}(O, \overline{TC} \rightarrow TC) \cdot \vec{z}_0$

$$\vec{M}(O, \overline{TC} \rightarrow TC) \cdot \vec{z}_0 = \left(\vec{OB} \wedge (-K_B(y - L_3 \sin\theta) \vec{y}_0 - \lambda_B(\dot{y} - L_3 \dot{\theta} \cos\theta) \vec{y}_0) \right) \cdot \vec{z}_0 +$$

$$(\vec{OG} \wedge m \vec{g}) \cdot \vec{z}_0 + (\vec{OC} \wedge F_C \vec{n}) \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{M}(O, \overline{TC} \rightarrow TC) \cdot \vec{z}_0 = \left(-L_3 \vec{x} \wedge (-K_B(y - L_3 \sin \theta) \vec{y}_0 - \lambda_B(\dot{y} - L_3 \dot{\theta} \cos \theta) \vec{y}_0) \right) \cdot \vec{z}_0 +$$

$$(L_4 \vec{x} \wedge m \vec{g}) \cdot \vec{z}_0 + \left((L_2 \vec{x} + L_1 \vec{y}) \wedge F_C \vec{n} \right) \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{M}(O, \overline{TC} \rightarrow TC) \cdot \vec{z}_0 = \left(K_B L_3 (y - L_3 \sin \theta) + \lambda_B L_3 (\dot{y} - L_3 \dot{\theta} \cos \theta) \right) \cos \theta - mg L_4 \sin \beta +$$

$$F_C (L_2 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha)$$

Calculons $\vec{\delta}(O, TC/O) \cdot \vec{z}_0$

Nous avons :

$$\vec{\delta}(O, TC/O) \cdot \vec{z}_0 = \left(\frac{d\vec{\mu}(O, TC/O)}{dt} \right)_{/0} \cdot \vec{z}_0 + (m \vec{V}(O/O) \wedge \vec{V}(G \in TC/O)) \cdot \vec{z}_0.$$

$$\text{Or : } \vec{\mu}(O, TC/O) = m \vec{OG} \wedge \vec{V}(O \in TC/O) + \vec{I}(O, TC) \vec{\Omega}_{TC/O}.$$

$$\vec{\mu}(O, TC/O) = mL_4 \vec{x} \wedge (\dot{x} \vec{x}_0 + \dot{y} \vec{y}_0) + C \dot{\theta} \vec{z}_0 = mL_4 (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) \vec{z}_0 + C \dot{\theta} \vec{z}_0$$

$$\text{Donc : } \left(\frac{d\vec{\mu}(O, TC/O)}{dt} \right)_{/0} \cdot \vec{z}_0 = \left(\frac{d\vec{\mu}(O, TC/O) \cdot \vec{z}_0}{dt} \right)_{/0}.$$

$$\text{Donc : } \left(\frac{d\vec{\mu}(O, TC/O)}{dt} \right)_{/0} \cdot \vec{z}_0 = mL_4 (-\ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta - \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta - \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta) + C \ddot{\theta}.$$

$$\text{Or : } m(\vec{V}(O/O) \wedge \vec{V}(G \in TC/O)) \cdot \vec{z}_0 = (m(\dot{x} \vec{x}_0 + \dot{y} \vec{y}_0) \wedge (\dot{x} \vec{x}_0 + \dot{y} \vec{y}_0 + L_4 \dot{\theta} \vec{y})) \cdot \vec{z}_0.$$

$$\text{D'où : } m(\vec{V}(O/O) \wedge \vec{V}(G \in TC/O)) \cdot \vec{z}_0 = mL_4 (\dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta). \text{ Nous obtenons donc :}$$

$$\vec{\delta}(O, TC/O) \cdot \vec{z}_0 = mL_4 (-\ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta) + C \ddot{\theta}$$

Nous obtenons la troisième équation différentielle :

$$mL_4 (-\ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta) + C \ddot{\theta} = \left(K_B L_3 (y - L_3 \sin \theta) + \lambda_B L_3 (\dot{y} - L_3 \dot{\theta} \cos \theta) \right) \cos \theta -$$

$$mg L_4 \sin \beta + F_C (L_2 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha)$$

2.2. Linéarisons ces trois équations différentielles

Si les paramètres x , y et θ sont très petits en amplitude et en vitesse, nous avons :

$\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta$, $\cos(\beta - \theta) = \cos \beta + \theta \sin \beta$, $\sin(\beta - \theta) = \sin \beta - \theta \cos \beta$,
 $\cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha - \theta \sin \alpha$, $\sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha + \theta \cos \alpha$.

En négligeant les infiniment petits du second et du troisième ordre, les trois équations différentielles deviennent :

$$m\ddot{x} + \lambda_A \dot{x} + K_A x + (F_C \cos \alpha - mg \sin \beta - F_f)\theta = mg \cos \beta - F_C \sin \alpha$$

$$m\ddot{y} + mL_4 \ddot{\theta} + (\lambda_L + \lambda_B) \dot{y} - \lambda_B L_3 \dot{\theta} + (K_L + K_B)y + (F_C \sin \alpha - K_B L_3 - mg \cos \beta)\theta = F_C \cos \alpha - mg \sin \beta - F_f$$

$$mL_4 \ddot{y} + C\ddot{\theta} - \lambda_B L_3 \dot{y} + \lambda_B L_3^2 \dot{\theta} - K_B L_3 y + K_B L_3^2 \theta = F_C (L_2 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha) - mg L_4 \sin \beta$$

Écrivons ces trois équations sous la forme : $[M](\ddot{q}) + [C](\dot{q}) + [K](q) = [A]$

Nous obtenons facilement à partir des trois équations précédentes :

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & mL_4 \\ 0 & mL_4 & C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_A & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_L + \lambda_B & -\lambda_B L_3 \\ 0 & -\lambda_B L_3 & \lambda_B L_3^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_A & 0 & K_{13} \\ 0 & K_L + K_B & K_{23} \\ 0 & -K_B L_3 & K_B L_3^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

avec :

$$K_{13} = F_C \cos \alpha - mg \sin \beta - F_f$$

$$K_{23} = F_C \sin \alpha - K_B L_3 - mg \cos \beta$$

$$A_1 = mg \cos \beta - F_C \sin \alpha$$

$$A_2 = F_C \cos \alpha - mg \sin \beta - F_f$$

$$A_3 = F_C (L_2 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha) - mg L_4 \sin \beta$$

Application numérique :

$$mL_4 = 6\,400.0,75 = 4\,800 \text{ N}$$

$$\lambda_L + \lambda_B = 3.10^5 + 18.10^4 = 48.10^4 \text{ N.s.m}^{-1}$$

$$\lambda_B L_3 = 18.10^4 . 1,10 \approx 2.10^5 \text{ N.s.}$$

$$\lambda_B L_3^2 = 18.10^4 . 1,10^2 \approx 22.10^4 \text{ N.s.m}$$

$$K_L + K_B = 55.10^6 + 24.10^4 \approx 55.10^6 \text{ N.m}^{-1}$$

$$K_B L_3 = 24.10^4 . 1,10 \approx 26.10^4 \text{ N}$$

$$K_B L_3^2 = 24.10^4 . 1,10^2 \approx 29.10^4 \text{ N.m}$$

$$K_{13} = F_C \cos \alpha - mg \sin \beta - F_f = 1.10^5 \cos 80^\circ - 6\,400.9,81 . \sin 10^\circ - 25.10^5 = -249.10^4 \text{ N}$$

$$K_{23} = F_C \sin \alpha - K_B L_3 - mg \cos \beta = 1.10^5 \sin 80^\circ - 24.10^4 . 1,10 - 6\,400.9,81 . \cos 10^\circ = -227.10^3 \text{ N}$$

$$A_1 = mg \cos \beta - F_C \sin \alpha = 6\,400.9,81 . \cos 10^\circ - 1.10^5 . \sin 80^\circ = -366.10^2 \text{ N}$$

$$A_2 = F_C \cos \alpha - mg \sin \beta - F_f = 1.10^5 . \cos 80^\circ - 6\,400.9,81 . \sin 10^\circ - 25.10^5 = -249.10^4 \text{ N}$$

$$A_3 = F_C(L_2 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha) - mgL_4 \sin \beta = 1.10^5(1,62. \cos 80^\circ + 1,35. \sin 80^\circ) - 6\,400.9,81.0,75. \sin 10^\circ$$

$$A_3 = 153.10^3 \text{ N.m}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{bmatrix} 64.10^2 & 0 & 0 \\ 0 & 64.10^2 & 48.10^2 \\ 0 & 48.10^2 & 11.10^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 5.10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 48.10^4 & -2.10^5 \\ 0 & -2.10^5 & 22.10^4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 58.10^6 & 0 & -249.10^4 \\ 0 & 55.10^6 & -227.10^3 \\ 0 & -26.10^4 & 29.10^4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -366.10^2 \\ -249.10^4 \\ 153.10^3 \end{pmatrix}$$

2.3. Calculons les pulsations propres non amorties les modes propres associés

Les pulsations propres sont obtenues à partir des valeurs propres de la matrice $[K'] = [M]^{-1}[K]$.

Les modes propres correspondent aux vecteurs propres de la matrice $[K']$.

Calculons $[K']$

Directement à la calculatrice, nous obtenons :

$$[K'] = \begin{bmatrix} 9\,062,50 & 0 & -389,06 \\ 0 & 12\,800,84 & -82,12 \\ 0 & -5\,509,46 & 62,205 \end{bmatrix}$$

À la calculatrice, nous obtenons les valeurs propres et vecteurs propres associés de la matrice $[K']$:

- $\lambda_{K1} = \omega_{01}^2 = 9\,062,50 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, de vecteur propre associé $[X_{K1}] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

- $\lambda_{K2} = \omega_{02}^2 = 12\,836,90 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, de vecteur propre associé

$$[X_{K2}] = \begin{pmatrix} 0,041 \\ 0,915 \\ -0,402 \end{pmatrix},$$

- $\lambda_{K3} = \omega_{03}^2 = 26,14 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, de vecteur propre associé $[X_{K3}] = \begin{pmatrix} 0,043 \\ 0,006 \\ 0,999 \end{pmatrix}$.

Ce calcul montre qu'il y a trois modes propres de vibration :

- un mode où seul x vibre, alors que y et θ restent nuls,
- deux modes où les vibrations en x, y et θ sont couplées.

Les deux derniers modes correspondent à des évolutions inverses : y et θ évoluent dans le même sens pour le second et dans des sens différents pour le troisième. Nous avons donc les pulsations propres non amorties suivantes :

$$\omega_{01} = \sqrt{9\,062,50} = 95,19 \text{ rad.s}^{-1} \quad \omega_{02} = \sqrt{12\,836,90} = 113,30 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega_{03} = \sqrt{26,14} = 5,11 \text{ rad.s}^{-1}$$

2.4. Calculons sous forme numérique les matrices $[M^*]$, $[C^*]$ et $[K^*]$

Soit $[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0,041 & 0,043 \\ 0 & 0,915 & 0,006 \\ 0 & -0,402 & 0,999 \end{bmatrix}$ la matrice des vecteurs propres dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$.

Nous obtenons directement à la calculatrice :

$$\bullet [M^*] = [P]^T [M] [P] = \begin{bmatrix} 6\,400 & 265,01 & 275,29 \\ 265,01 & 3\,614,35 & 9,04 \\ 275,29 & 9,04 & 11\,052,90 \end{bmatrix},$$

$$\bullet [C^*] = [P]^T [C] [P] = \begin{bmatrix} 500\,000 & 20\,703,90 & 21\,507,24 \\ 20\,703,90 & 585\,076,31 & -266\,858,82 \\ 21\,507,24 & -266\,858,82 & 217\,962,46 \end{bmatrix},$$

$$\bullet [K^*] = [P]^T [K] [P] = \begin{bmatrix} 0,58 \cdot 10^8 & 340,19 \cdot 10^4 & 7195,70 \\ 240\,165,24 \cdot 10^4 & 463,97 \cdot 10^5 & 236,25 \\ 249\,483,97 \cdot 10^4 & 116,02 \cdot 10^3 & 288,90 \cdot 10^3 \end{bmatrix}.$$

2.5. Déduisons-en les facteurs d'amortissement associés

Pour déterminer les fréquences de résonance, seuls les ξ_{ii} nous intéressent. Nous obtenons :

$$\xi_{11} = \frac{c_{11}^*}{2\sqrt{k_{11}^* m_{11}^*}} = \frac{500\,000}{2\sqrt{0,58 \cdot 10^8 \cdot 6\,400}} = 0,41 \quad \xi_{11} = 0,41$$

$$\xi_{22} = \frac{c_{22}^*}{2\sqrt{k_{22}^* m_{22}^*}} = \frac{585\,076,31}{2\sqrt{463,97 \cdot 10^5 \cdot 3\,614,35}} = 0,692 \quad \xi_{22} = 0,692$$

$$\xi_{33} = \frac{c_{33}^*}{2\sqrt{k_{33}^* m_{33}^*}} = \frac{217\,962,46}{2\sqrt{288,90 \cdot 10^3 \cdot 11\,052,90}} = 1,928 \quad \xi_{33} = 1,928$$

Cette démarche est approchée. En fait la relation utilisée est vraie si certaines conditions pour les matrices $[M]$, $[C]$ et $[K]$ sont vérifiées, en particulier si on peut simultanément les diagonaliser.

2.6. Concluons quant au respect du critère relatif aux fréquences de résonance imposé par le cahier des charges

Nous avons $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$, donc la fréquence de résonance s'obtient par la relation $f_r = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{1 - 2\xi^2}$. **Il ne faut pas tenir compte du facteur d'amortissement $\xi_{33} = 1,927$ pour lequel il n'y a pas résonance.**

Nous avons ξ_{ij} qui correspond à la pulsation propre non amortie ω_{0i} trouvée à la question 2.3..

Nous obtenons donc :

$$f_{r11} = \frac{95,19}{2\pi} \sqrt{1 - 2,0,41^2} = 12,34 \text{ Hz} \qquad f_{r11} = 12,34 \text{ Hz}$$
$$f_{r22} = \frac{113,30}{2\pi} \sqrt{1 - 2,0,692^2} = 3,70 \text{ Hz} \qquad f_{r22} = 3,70 \text{ Hz}$$

Nous pouvons conclure que les fréquences de résonance de la tuyère centrale TC du moteur Vulcain restent inférieures à 20 Hz lors de la phase de décollage sur une hauteur de 2 000 mètres.

— Partie 3 —

Étude des contraintes dans la tuyère centrale TC par une étude analytique sur un modèle de type « enveloppe mince »

3.1. Montrons que le modèle de déplacement retenu est cohérent

La tuyère centrale **TC** est soumise à l'action de la pression intérieure p_0 répartie de manière symétrique. En conséquence, on peut négliger la torsion selon (O, \vec{e}_z) : un point M ne se déplace pas suivant \vec{e}_θ mais uniquement selon les deux directions radiale \vec{e}_r et axiale \vec{e}_z .

De plus, le paramètre θ n'intervient pas car, dans une section à une cote z donnée, le déplacement est identique quel que soit le point M . D'où :

$$\vec{u}(M) = u_r(r, z) \vec{e}_r + u_z(r, z) \vec{e}_z$$

3.2. Vérifions la forme de la matrice associée au tenseur des contraintes

Comme $\vec{u}(M) = u_r(r, z) \vec{e}_r + u_z(r, z) \vec{e}_z$ alors :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\underline{\underline{\text{grad } u}} + \underline{\underline{\text{grad } u}}^t}{2} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & \varepsilon_{rz} \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ \varepsilon_{rz} & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)}$$

L'utilisation de la formule de Lamé $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$ permet d'obtenir la matrice associée au tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$. Comme la trace ne prend en compte que les termes diagonaux, la matrice $\underline{\underline{\sigma}}$ a la même forme que la matrice $\underline{\underline{\varepsilon}}$,

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)}$$

Le calcul permet de montrer que :

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{\text{grad}} \vec{u} + \vec{\text{grad}}^t \vec{u}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)}$$

La formule de Lamé $\vec{\sigma} = \lambda \text{trace}(\vec{\varepsilon}) \vec{I} + 2\mu \vec{\varepsilon}$ nous permet d'obtenir :

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} = 2\mu \frac{u_r}{r} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ \sigma_{zz} = 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \end{cases}$$

Remarque :

Pour écrire la matrice dans la base curviligne $(\vec{e}_n, \vec{e}_\theta, \vec{e}_s)$, on applique la formule de changement de base qui s'écrit : $\vec{\sigma}_{(\vec{e}_n, \vec{e}_\theta, \vec{e}_s)} = [\mathbf{P}]^{-1} \vec{\sigma}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)} [\mathbf{P}]$ où $[\mathbf{P}]$ est la matrice de passage de la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ à la base $(\vec{e}_n, \vec{e}_\theta, \vec{e}_s)$:

$$[\mathbf{P}] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)}$$

Nous obtenons alors : $\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{nn} & 0 & \sigma_{ns} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{sn} & 0 & \sigma_{ss} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_n, \vec{e}_\theta, \vec{e}_s)}$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_{nn} = \sigma_{rr} \cos^2 \alpha + \sigma_{zz} \sin^2 \alpha - 2\sigma_{rz} \sin \alpha \cos \alpha \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} = \sigma_{rr} \sin^2 \alpha + \sigma_{zz} \cos^2 \alpha + 2\sigma_{rz} \sin \alpha \cos \alpha \\ \sigma_{ns} = \sigma_{sn} = (\sigma_{rr} - \sigma_{zz}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{rz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{cases}$$

Négliger la composante σ_{ns} revient à dire que les deux contraintes σ_{rr} et σ_{zz} sont du même ordre de grandeur et que la contrainte σ_{rz} est négligeable, ce qui est confirmé par la suite.

3.3. Détermination de la valeur de la contrainte $\sigma_{nn}(s)$

Pour tout point M situé en surface intérieure de la tuyère, nous avons :

$$\vec{\sigma} \vec{n}_i = -\vec{p}_0 \vec{n}_i, \text{ où } \vec{n}_i \text{ est le vecteur normal à la surface intérieure au point M. Ici, } \vec{n}_i = -\vec{e}_n \text{ donc } \begin{pmatrix} \sigma_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ On en déduit que, pour un point M}$$

situé à l'intérieur de la tuyère : $\sigma_{nn}(\text{int}) = -p_0$.

Pour tout point M situé en surface extérieure de la tuyère, on peut écrire $\vec{\sigma} \vec{n}_e = \vec{0}$,

$$\text{où } \vec{n}_e \text{ est le vecteur normal à la surface extérieure au point M. Ici, } \vec{n}_e = \vec{e}_n \text{ donc } \begin{pmatrix} \sigma_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ On en déduit que, pour un point M situé à l'extérieur de}$$

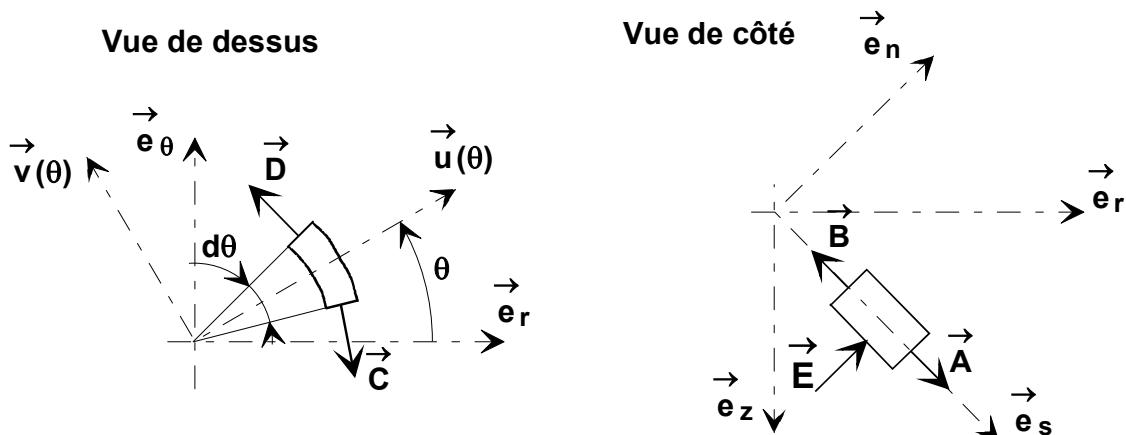
la tuyère : $\sigma_{nn}(\text{ext}) = 0$.

La contrainte à prendre en compte est la moyenne de ces deux valeurs. Nous obtenons donc :

$$\sigma_{nn}(s) = \frac{\sigma_{nn}(\text{int}) + \sigma_{nn}(\text{ext})}{2} = -\frac{p_0}{2}$$

3.4. Détermination de la contrainte $\sigma_{ss}(s)$

L'élément considéré est soumis aux actions mécaniques suivantes :



• $\vec{A} = [\sigma_{ss}(s) + d\sigma_{ss}(s)] dS_s \vec{e}_s = [\sigma_{ss}(s) + d\sigma_{ss}(s)] [r(s) + dr(s)] e d\theta \vec{e}_s$ sur sa partie inférieure,

• $\vec{B} = -\sigma_{ss}(s) dS_s \vec{e}_s = -\sigma_{ss}(s) r(s) e d\theta \vec{e}_s$ sur sa partie supérieure,

• $\vec{C} = -\sigma_{\theta\theta}(s) dS_\theta \vec{v}\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) = -\sigma_{\theta\theta}(s) e ds \vec{v}\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)$ sur la première face latérale,

- $\vec{D} = \sigma_{\theta\theta}(s) dS_{\theta} \vec{v}\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) = \sigma_{\theta\theta}(s) e ds \vec{v}\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)$ sur la deuxième face latérale,
- $\vec{E} = p_0 \left[r(s) + \frac{dr(s)}{2} \right] d\theta ds \vec{e}_n$.

Le théorème de la résultante statique s'écrit :

$$\begin{aligned} & [\sigma_{ss}(s) + d\sigma_{ss}(s)] [r(s) + dr(s)] e d\theta \vec{e}_s - \sigma_{ss}(s) r(s) e d\theta \vec{e}_s \\ & + p_0 \left[r(s) + \frac{dr(s)}{2} \right] d\theta ds \vec{e}_n + \sigma_{\theta\theta}(s) e ds \left(\vec{v}\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) - \vec{v}\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) \right) = \vec{0} \end{aligned}$$

En se limitant au développement à l'ordre 1, nous obtenons sachant que

$$\vec{v}\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) - \vec{v}\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) \cong -2 \sin \frac{d\theta}{2} \vec{u}(\theta) \cong -d\theta \vec{u}(\theta) :$$

$$[\sigma_{ss}(s) dr(s) + r(s) d\sigma_{ss}(s)] e d\theta \vec{e}_s + p_0 r(s) d\theta ds \vec{e}_n - \sigma_{\theta\theta}(s) e ds d\theta \vec{u}(\theta) = \vec{0}$$

La projection de cette équation sur la direction \vec{e}_z donne :

$$[\sigma_{ss}(s) dr(s) + r(s) d\sigma_{ss}(s)] e d\theta \cos \alpha = p_0 r(s) d\theta ds \sin \alpha$$

Comme $dr(s) = ds \sin \alpha$, l'expression précédente devient :

$$[\sigma_{ss}(s) ds \sin \alpha + r(s) d\sigma_{ss}(s)] e d\theta \cos \alpha = p_0 r(s) d\theta ds \sin \alpha$$

En divisant l'expression précédente par $r(s) e d\theta ds \cos \alpha$, on obtient :

$$\frac{\sigma_{ss}(s)}{r(s)} \sin \alpha + \frac{d\sigma_{ss}(s)}{ds} = \frac{p_0 \tan \alpha}{e}$$

En remarquant que, avec le paramétrage associé, $\frac{r(s)}{s} = \sin \alpha$, on obtient alors la formule attendue :

$$\frac{\sigma_{ss}(s)}{s} + \frac{d\sigma_{ss}(s)}{ds} = \frac{p_0}{e} \tan \alpha$$

La résolution de l'équation précédente passe par la recherche d'une solution générale de l'équation différentielle homogène associée (sans second membre) et d'une solution particulière de l'équation différentielle complète.

La solution générale est obtenue par la résolution de l'équation différentielle $\frac{\sigma_{ss}(s)}{s} + \frac{d\sigma_{ss}(s)}{ds} = 0$. Cette équation admet une solution de la forme $\sigma_{ssG}(s) = \frac{A}{s}$.

Une solution particulière de l'équation complète est obtenue en choisissant une solution de la forme $\sigma_{ss}(s) = a s + b$.

En reportant cette expression dans l'équation différentielle $\frac{\sigma_{ss}(s)}{s} + \frac{d\sigma_{ss}(s)}{ds} = \frac{p_0 \tan \alpha}{e}$, nous obtenons $b = 0$ et $a = \frac{p_0}{2e} \tan \alpha$; une solution

particulière de l'équation complète est donc $\sigma_{ssP}(s) = \frac{p_0}{2e} s \tan \alpha$.

La solution complète est donc : $\sigma_{ss}(s) = \sigma_{ssG}(s) + \sigma_{ssP}(s) = \frac{A}{s} + \frac{p_0}{2e} s \tan \alpha$.

En extrémité basse du divergent de la tuyère (correspondant au rayon r_{Maxi} , soit l'abscisse curviligne $s_{\text{Maxi}} = \frac{r_{\text{Maxi}}}{\sin \alpha}$), on a : $\sigma_{ss}(s_{\text{Maxi}}) = 0$.

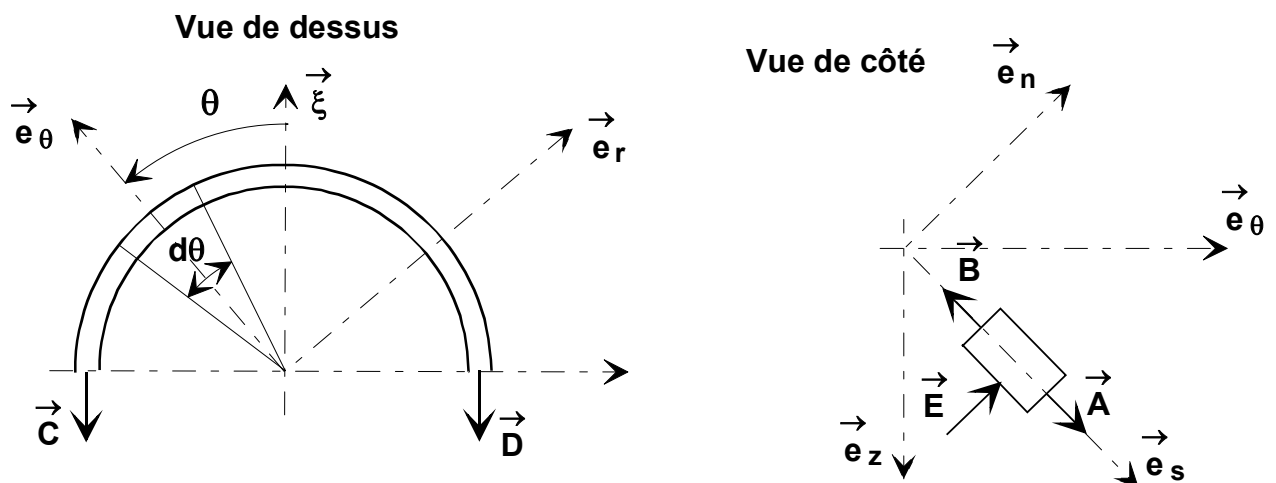
On en déduit donc que : $\frac{A}{s_{\text{Maxi}}} + \frac{p_0}{2e} s_{\text{Maxi}} \tan \alpha = 0$ et donc $A = -\frac{p_0}{2e} s_{\text{Maxi}}^2 \tan \alpha$.

Nous obtenons donc :

$$\sigma_{ss}(s) = \frac{p_0}{2e} \tan \alpha \frac{s^2 - s_{\text{Maxi}}^2}{s} = \frac{p_0}{2e \cos \alpha} \frac{r(s)^2 - r_{\text{Maxi}}^2}{r(s)}$$

3.5. Détermination de la contrainte $\sigma_{\theta\theta}(s)$

L'élément considéré est soumis aux actions mécaniques suivantes :



- $\vec{A} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\sigma_{ss}(s) + d\sigma_{ss}(s)] dS_s \vec{e}_s = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\sigma_{ss}(s) + d\sigma_{ss}(s)] e [r(s) + dr(s)] d\theta \vec{e}_s$

sur sa partie inférieure,

- $\vec{B} = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_{ss}(s) dS_s \vec{e}_s = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_{ss}(s) e r(s) d\theta \vec{e}_s$ sur sa partie supérieure,

- $\vec{C} = -\sigma_{\theta\theta}(s) dS_\theta \vec{\xi} = -\sigma_{\theta\theta}(s) e ds \vec{\xi}$ sur la première face latérale,

- $\vec{D} = -\sigma_{\theta\theta}(s) dS_\theta \vec{\xi} = -\sigma_{\theta\theta}(s) e ds \vec{\xi}$ sur la deuxième face latérale,

- $\vec{E} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_0 \left[r(s) + \frac{dr(s)}{2} \right] d\theta ds \vec{e}_n$.

Le théorème de la résultante statique s'écrit :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\sigma_{ss}(s) + d\sigma_{ss}(s)] e[r(s) + dr(s)] d\theta \vec{e}_s - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_{ss}(s) e r(s) d\theta \vec{e}_s - 2\sigma_{\theta\theta}(s) e ds \vec{\xi} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_0 \left[r(s) + \frac{dr(s)}{2} \right] d\theta ds \vec{e}_n = \vec{0}$$

En se limitant au développement à l'ordre 1, nous obtenons :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\sigma_{ss}(s) dr(s) + r(s) d\sigma_{ss}(s)] e d\theta \vec{e}_s - 2\sigma_{\theta\theta}(s) e ds \vec{\xi} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_0 r(s) d\theta ds \vec{e}_n = \vec{0}.$$

Sachant que $\vec{e}_s \cdot \vec{\xi} = \sin \alpha \cos \theta$ et $\vec{e}_n \cdot \vec{\xi} = \cos \alpha \cos \theta$, projetons cette équation

vectorielle selon la direction $\vec{\xi}$:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\sigma_{ss}(s) dr(s) + r(s) d\sigma_{ss}(s)] e \sin \alpha \cos \theta d\theta - 2\sigma_{\theta\theta}(s) e ds + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_0 r(s) ds \cos \alpha \cos \theta d\theta = 0$$

soit, $2(p_0 r(s) ds \cos \alpha + [\sigma_{ss}(s) dr(s) + r(s) d\sigma_{ss}(s)] e \sin \alpha) - 2\sigma_{\theta\theta}(s) e ds = 0$.

Or $[\sigma_{ss}(s) dr(s) + r(s) d\sigma_{ss}(s)] e d\theta \cos \alpha = p_0 r(s) d\theta ds \sin \alpha$ (voir question 3.4.), soit

$[\sigma_{ss}(s) dr(s) + r(s) d\sigma_{ss}(s)] e = p_0 r(s) ds \tan \alpha$. D'où :

$$\left[p_0 r(s) ds \cos \alpha + p_0 r(s) ds \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right] - \sigma_{\theta\theta}(s) e ds = 0. \text{ Nous obtenons donc :}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(s) = p_0 \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{e \cos \alpha} r(s). \text{ D'où :}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(s) = \frac{p_0}{e \cos \alpha} r(s)$$

3.6. Vérifions que la contrainte normale $\sigma_{nn}(s)$ reste très inférieure, en valeur absolue, aux deux autres contraintes $\sigma_{\theta\theta}(s)$ et $\sigma_{ss}(s)$

Nous avons obtenu :

$$\sigma_{nn}(s) = \frac{\sigma_{nn}(\text{int}) + \sigma_{nn}(\text{ext})}{2} = -\frac{p_0}{2}$$

$$\sigma_{ss}(s) = \frac{p_0}{2 e \cos \alpha} \frac{r(s)^2 - r_{\text{Maxi}}^2}{r(s)}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(s) = \frac{p_0}{e \cos \alpha} r(s)$$

Le rapport $\frac{\sigma_{\theta\theta}(s)}{\sigma_{nn}(s)} = -\frac{2r(s)}{e \cos \alpha}$ est très grand de même que le rapport

$\frac{\sigma_{ss}(s)}{\sigma_{nn}(s)} = \frac{r_{\text{Maxi}}^2 - r(s)^2}{er(s)\cos \alpha}$, donc la contrainte normale $\sigma_{nn}(s)$ peut donc être

négligée par rapport aux deux autres.

3.7. Déterminons la contrainte équivalente de Von Mises en fonction de $\sigma_{\theta\theta}(s)$ et $\sigma_{ss}(s)$ puis en fonction de p_0 , e , α , $r(s)$ et r_{Maxi}

Nous devons avoir $\sigma_{VM} \leq \sigma_{0,2}$. Si on néglige la contrainte normale $\sigma_{nn}(s)$, la contrainte de Von Mises s'écrit : $\sigma_{VM} \cong \sqrt{\sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{ss}^2 - \sigma_{\theta\theta} \sigma_{ss}}$.

$$\text{Ce qui donne : } \sigma_{VM} \cong \frac{p_0}{e \cos \alpha} \sqrt{r(s)^2 + \left(\frac{r(s)^2 - r_{\text{Maxi}}^2}{2r(s)} \right)^2 - \frac{r(s)^2 - r_{\text{Maxi}}^2}{2}}$$

Et donc :

$$\sigma_{VM} \cong \frac{p_0}{2 e \cos \alpha} \sqrt{3r(s)^2 + \frac{r_{\text{Maxi}}^4}{r(s)^2}}$$

Déduisons-en la zone la plus contrainte et donnons l'expression de la contrainte équivalente de Von Mises dans cette zone

Nous avons :

$$\frac{d\sigma_{VM}}{dr(s)} = \frac{p_0}{2 e \cos \alpha} \frac{6r(s) - \frac{2r_{\text{Maxi}}^4}{r(s)^3}}{2\sqrt{3r(s)^2 + \frac{r_{\text{Maxi}}^4}{r(s)^2}}} = \frac{p_0}{2 e \cos \alpha} \frac{3r(s)^4 - r_{\text{Maxi}}^4}{r(s)^3 \sqrt{3r(s)^2 + \frac{r_{\text{Maxi}}^4}{r(s)^2}}}$$

Quand $r(s)$ varie de r_{mini} à r_{Maxi} , la dérivée $\frac{d\sigma_{VM}}{dr(s)}$ est d'abord négative, s'annule

pour $r(s) = \frac{r_{\text{Maxi}}}{\sqrt[4]{3}}$ puis change de signe. Donc la zone la plus contrainte correspond

soit à s maximal soit à s minimal. Or :

$$\sqrt{3r_{\text{Maxi}}^2 + \frac{r_{\text{Maxi}}^4}{r_{\text{Maxi}}^2}} = 2r_{\text{Maxi}} = 2.0,88012 = 1,760 \text{ m.}$$

$$\sqrt{3r_{\text{mini}}^2 + \frac{r_{\text{Maxi}}^4}{r_{\text{mini}}^2}} = \sqrt{3.0,29365^2 + \frac{0,88012^4}{0,29365^2}} = 2,686 \text{ m.}$$

Donc la zone la plus contrainte correspond à s minimal :

$$\sigma_{VM_{\text{Maxi}}} \cong \frac{p_0}{2 e \cos \alpha} \sqrt{3r_{\text{mini}}^2 + \frac{r_{\text{Maxi}}^4}{r_{\text{mini}}^2}}$$

3.8. Vérifions que la limite élastique $\sigma_{0,2} = 600.10^6$ Pa n'est pas atteinte

$$\sigma_{VM_{maxi}} \cong \frac{110.10^5}{2.30.10^{-3} \cos(\arctan \frac{0,88012 - 0,29365}{1,796})} \sqrt{3.0,29365^2 + \frac{0,88012^4}{0,29365^2}}$$

$$\sigma_{VM_{maxi}} \cong 518.10^6 \text{ Pa}$$

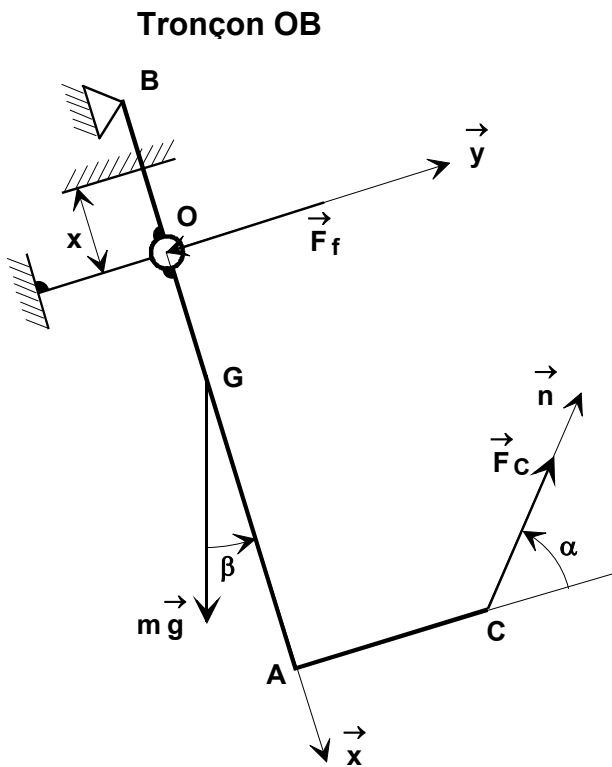
Nous avons bien $\sigma_{VM_{maxi}} \leq \sigma_{0,2}$. Donc la limite élastique $\sigma_{0,2} = 600.10^6$ Pa selon le critère de Von Mises n'est pas atteinte.

— Partie 4 —

Étude de la déformée angulaire de la tuyère centrale TC par une étude analytique sur un modèle de type poutre

4.1. Déterminons la déformée angulaire au voisinage du point O

Pour déterminer la déformée angulaire $\theta_z = \dot{y}(x)$ autour de l'axe (O, \vec{z}) de la tuyère centrale TC, nous allons déterminer le moment fléchissant $M_{f_z} = EI(G, \vec{z}) \frac{d^2 y(x)}{dx^2}$ sur le tronçon OB.



Soit $Y_B \vec{y}$ la réaction à l'appui en B.

Nous obtenons :

$$M_{f_z} = Y_B(L_3 - x)$$

Nous avons $EI(G, \vec{z}) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = M_{f_z} = Y_B(L_3 - x)$. D'où en intégrant :

- $EI(G, \vec{z}) \frac{dy(x)}{dx} = \frac{-Y_B(L_3 - x)^2}{2} + A$;
- $EI(G, \vec{z}) y(x) = \frac{Y_B(L_3 - x)^3}{6} + Ax + B$.

Les conditions aux limites sont telles que :

- pour $x = 0$ alors $y(x = 0) = 0$;
- pour $x = L_3$ alors $y(x = L_3) = 0$.

Nous avons donc :

- $EI(\vec{G}, \vec{z})y(x=0) = \frac{Y_B L_3^3}{6} + B = 0$, donc $B = -\frac{Y_B L_3^3}{6}$;
- $EI(\vec{G}, \vec{z})y(x=L_3) = AL_3 + B = 0$, donc $A = \frac{Y_B L_3^2}{6}$.

$$\text{Soit : } EI(\vec{G}, \vec{z})\ddot{y}(x) = \frac{-Y_B(L_3 - x)^2}{2} + \frac{Y_B L_3^2}{6}.$$

$$\text{Nous obtenons donc : } \theta_z = \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)_{x=0} = \frac{1}{EI(\vec{G}, \vec{z})} \left(\frac{-Y_B L_3^2}{2} + \frac{Y_B L_3^2}{6} \right) = -\frac{Y_B L_3^2}{3EI(\vec{G}, \vec{z})}$$

Déterminons la réaction Y_B . L'application du théorème de la résultante statique à la tuyère donne :

- en projection sur \vec{x} : $X_O + mg \cos \beta - F_C \sin \alpha = 0$
- en projection sur \vec{y} : $Y_B + Y_O - F_f - mg \sin \beta + F_C \cos \alpha = 0$

L'application du théorème du moment statique, en O, à la tuyère en projection sur \vec{z} donne : $(\vec{OB} \wedge Y_B \vec{y}) \cdot \vec{z} + (\vec{OG} \wedge m \vec{g}) \cdot \vec{z} + (\vec{OC} \wedge F_C \vec{n}) \cdot \vec{z} = 0$. Soit :

$$(-L_3 \vec{x} \wedge Y_B \vec{y}) \cdot \vec{z} + (L_4 \vec{x} \wedge m \vec{g}) \cdot \vec{z} + \left((L_2 \vec{x} + L_1 \vec{y}) \wedge F_C \vec{n} \right) \cdot \vec{z} = 0.$$

Nous obtenons donc : $Y_B = \frac{F_C(L_2 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha) - mgL_4 \sin \beta}{L_3}$. D'où :

$$\theta_z = -\frac{F_C(L_2 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha) - mgL_4 \sin \beta}{3EI(\vec{G}, \vec{z})} L_3$$

4.2. Faisons l'application numérique et concluons quant au respect du critère relatif à la déformée angulaire au voisinage du point O

$$\theta_z = -\frac{1.10^5(1,62 \cos 80^\circ + 1,35 \sin 80^\circ) - 6\,400.9,81.0,75 \sin 10^\circ}{3.20.10^{10}.1.10^{-2}} 1,10 = -2,80.10^{-5} \text{ rad.}$$

$$\theta_z = -2,80.10^{-5} \text{ rad} = -0,0016^\circ$$

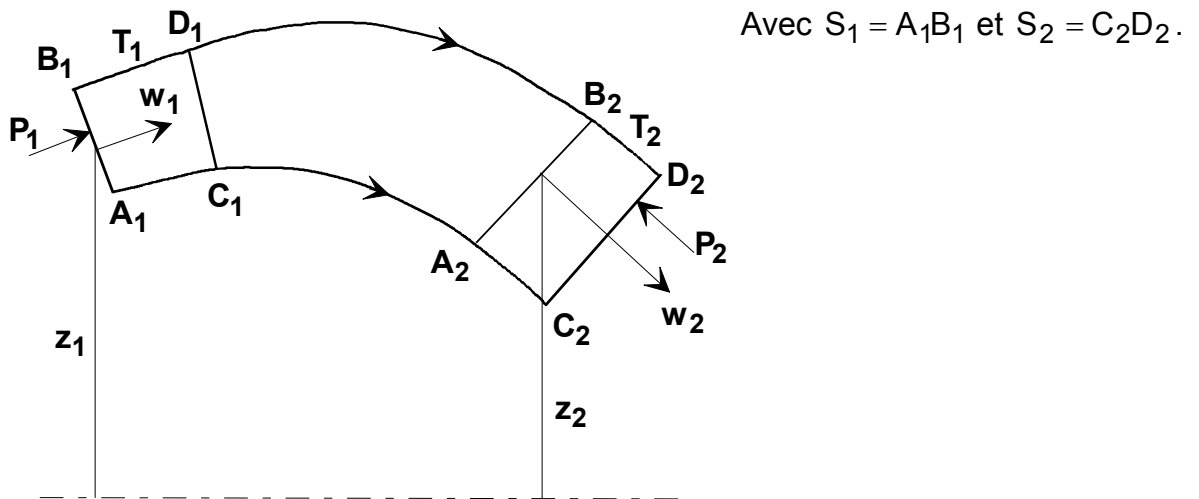
Avec le modèle retenu, le cahier de charges est respecté car θ_z reste très faible et inférieur en valeur absolue à $0,5^\circ$. L'asservissement en orientation de la tuyère centrale TC n'est pas perturbé.

— Partie 5 —

Étude thermodynamique des écoulements dans la tuyère

5.1. Exprimons le travail des forces des forces de pression W_p

Elles ne concernent que les faces terminales. Les forces de pression extérieures agissent uniquement sur les faces terminales des volumes de contrôle correspondant à un même élément de masse dm . Soit, avec les notations définies en annexe 1 et sur la figure 11 :



Notons dm la masse du volume élémentaire $A_1B_1C_1D_1$ ou $A_2B_2C_2D_2$ (conservation de la masse en régime permanent). Elle s'exprime par :

$$dm = \rho_1 S_1 w_1 dt = \rho_2 S_2 w_2 dt = \text{cte}$$

Le travail des forces de pression s'exprime par : $W_p = P_1 S_1 A_1 C_1 - P_2 S_2 A_2 C_2$.

Mais : $S_1 A_1 C_1 = \frac{dm}{\rho_1}$ et $S_2 A_2 C_2 = \frac{dm}{\rho_2}$. Donc :

$$W_p = \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right) dm = (p_1 v_1 - p_2 v_2) dm$$

5.2. Déterminons l'équation différentielle entre w et enthalpie H

Compte tenu de la conservation de l'énergie (fluide parfait) nous pouvons écrire que la variation de l'énergie interne et de l'énergie cinétique est égale à la chaleur et au travail reçus de l'extérieur : $\Delta U + \Delta E_c = Q + W$.

La masse dm reçoit une quantité d'énergie extérieure W_p se transformant en une variation d'énergie interne et d'énergie cinétique. D'où :

$$(U_2 - U_1)dm + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} dm = (P_1 v_1 - P_2 v_2) dm$$

$$\frac{w_2^2}{2} + U_2 + P_2 v_2 = \frac{w_1^2}{2} + U_1 + P_1 v_1$$

Ceci s'écrit encore sous la forme différentielle : $w dw + d(U + Pv) = 0$.

$U + Pv$ n'est autre que l'enthalpie. Donc :

$$w dw + dH = 0$$

5.3. Déterminons la relation entre la vitesse w et la pression P

Écrivons que : $dU = dQ + dW$, soit $dU = dQ - Pdv$. Comme l'évolution est isentropique alors $dU = -Pdv$.

En reportant dans l'expression obtenue à la question 5.2., nous obtenons :

$$w dw + dU + d(Pv) = w dw - Pdv + Pdv + vdP = 0, \text{ soit } w dw + vdP = 0.$$

Donc :
$$\frac{dw}{w} = -\frac{v}{w^2} dP.$$

En appliquant la relation liant la vitesse, le nombre de Mach et la vitesse sonique,

donnée en annexe, $w = \frac{M}{\sqrt{\gamma Pv}}$, et en la reportant dans l'équation ci-dessus, nous

obtenons :

$$\frac{dw}{w} = \frac{-v}{pv \gamma M^2} dP = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{dP}{P}$$

5.4. Démontrons la relation $\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dw}{w}$

Par conservation du débit masse on a : $\frac{Aw}{v} = \text{cte} \Rightarrow \frac{dA}{A} + \frac{dw}{w} - \frac{dv}{v} = 0$.

L'évolution étant isentropique, nous avons $Pv^\gamma = \text{cste}$, donc $\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dv}{v} = 0$, d'où

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dw}{w} - \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{P}.$$

En exprimant $\frac{dP}{P}$ en fonction de l'expression obtenue à la question 5.3., nous

obtenons $\frac{dA}{A} = -\frac{dw}{w} + M^2 \frac{dw}{w}$, soit :

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dw}{w}$$

5.5. Déduisons des relations précédentes la relation liant $\frac{dA}{A}$ à $\frac{dP}{P}$

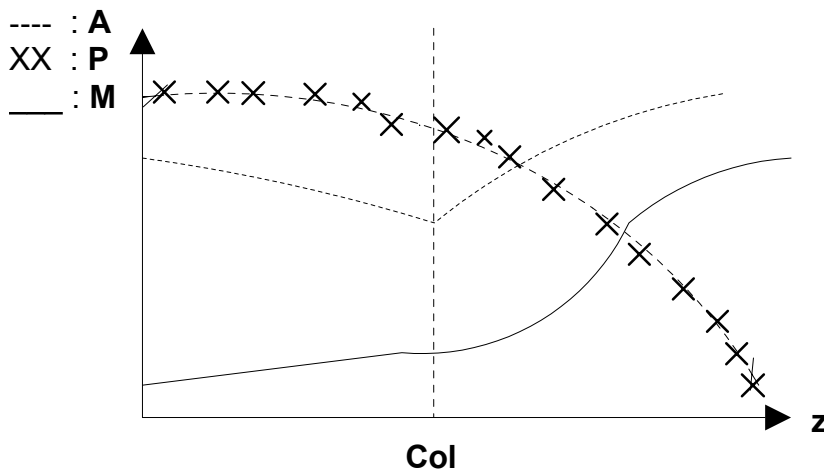
L'expression obtenue à la question 5.4. s'écrit encore, à l'aide des résultats de la question 5.3. :

$$\frac{dA}{A} = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} \frac{dP}{P}$$

En zone subsonique ($M < 1$) $\frac{dA}{A}$ et $\frac{dP}{P}$ varient dans le même sens alors que $\frac{dA}{A}$ et $\frac{dw}{w}$ varient en sens contraire. Augmenter la vitesse w jusqu'à la vitesse sonique demande donc une diminution de la section jusqu'à une valeur minimale A_{col} .

Si $M = 1$ alors $\frac{dA}{A} = 0$.

Pour obtenir une vitesse toujours croissante $\frac{dw}{w} > 0$ avec $M > 1$, il faut $\frac{dA}{A} > 0$ donc un élargissement au-delà du col.



5.6. Exprimons la vitesse w des gaz en fonction des caractéristiques amont

À la question 5.3., nous avons obtenu $w dw + v dP = 0$. L'évolution est isentropique donc $Pv^\gamma = \text{cste}$, et la loi des gaz parfaits s'écrit $Pv = rT$.

Nous avons donc $Pv^\gamma = P_1 v_1^\gamma \Rightarrow v = v_1 \left(\frac{P_1}{P} \right)^{1/\gamma}$, d'où $w dw = -v_1 P_1^{1/\gamma} \frac{dP}{P^{1/\gamma}}$.

Intégrons cette expression entre la section d'entrée 1 et une section quelconque. Nous obtenons :

$$\frac{w^2 - w_1^2}{2} = -\frac{rT_1}{P_1} P_1^{1/\gamma} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - P_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right], \text{ soit :}$$

$$w^2 = w_1^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} r T_1 \left[1 - \left(\frac{P}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

5.7. Montrons que $w_s = \left(w_1^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} r T_1 \right)^{1/2}$

Lorsque $P \rightarrow 0$ $\left(\frac{P}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \rightarrow 0$ alors :

$$w_s = \left(w_1^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} r T_1 \right)^{1/2}$$

5.8. Calculons la force de poussée du moteur Vulcain dans le vide

Exprimons que la force de poussée correspond à la variation de quantité de mouvement entre l'entrée des gaz en entrée de la tuyère (en début de convergent) et la sortie. En entrée, la vitesse est quasi négligeable ; en sortie la pression tend vers 0 et la vitesse se calcule donc par la relation obtenue à la question 5.7. :

$$F = \dot{m}(w_s - w_i) \text{ avec } w_s = \left(w_1^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} r T_1 \right)^{1/2}. \text{ D'où :}$$

$$\dot{m} = \dot{m} H_2 + \dot{m} O_2$$

A.N. :

- $\dot{m} = 36 + 224 = 260 \text{ kg.s}^{-1}$.

- $w_1 = \frac{\dot{m}_1}{\rho_1 A_1}$ donc $w_1 = \frac{r T_1 \dot{m}_1}{P_1 A_1} \Rightarrow w_1 = \frac{565,5 \cdot 3600}{130 \cdot 10^5} \times \frac{260}{\pi \cdot 0,207^2} = 302,5 \text{ ms}^{-1}$.

- $w_s = \left(302,5^2 + \frac{2 \times 1,23}{0,23} 565,5 \cdot 3600 \right)^{1/2} = 4\,676 \text{ m.s}^{-1}$.

- $F = 260 \cdot (4\,676 - 302,5) = 1,14 \cdot 10^6 \text{ N}$

F = 1,14.10⁶ N

5.9. Exprimons la température moyenne T_c

Au col la vitesse sonique s'écrit $w_c = \gamma r T_c$, soit : $w_c^2 - w_1^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} r T_1 \left[1 - \left(\frac{P_c}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$.

En inversant cette équation, nous obtenons : $\left(\frac{P_c}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{w_c^2 - w_1^2}{r T_1} \right]$. Donc

$$\left(\frac{P_c}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{w_1^2}{r T_1} \frac{\gamma-1}{2\gamma} - \frac{w_c^2}{r T_1} \frac{\gamma-1}{2\gamma} = 1 + \frac{w_1^2}{a_1^2} \frac{\gamma-1}{2} - \frac{w_c^2}{\gamma r T_c} \frac{\gamma-1}{2}$$

En introduisant le nombre de Mach et avec $M_c = 1$, nous avons :

$$\left(\frac{P_c}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + M_1^2 \frac{\gamma-1}{2} - \frac{T_c}{T_1} \frac{\gamma-1}{2}$$

Or la détente isentropique donne $\frac{T_c}{T_1} = \left(\frac{P_c}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, soit $\frac{T_c}{T_1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \right) = 1 + M_1^2 \frac{\gamma-1}{2}$.

Donc :

$$T_c = \frac{T_1}{\gamma+1} (2 + (\gamma-1)M_1^2)$$

A.N. :

$$T_c = \frac{3\,600}{1,23+1} \left[2 + 0,23 \cdot \frac{302,5^2}{1,23 \cdot 565,5 \cdot 3\,600} \right] = 3\,242,3 \text{ K} \qquad \qquad \qquad T_c = 3\,242,3 \text{ K}$$

5.10. Montrons que $T_s = \frac{2T_1}{2 + M_s^2(\gamma-1)}$

En reprenant la démonstration de la question 5.9. nous avons :

$$\frac{T_s}{T_1} = \left(\frac{P_s}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + M_1^2 \frac{\gamma-1}{2} - M_s^2 \frac{T_s}{T_1} \frac{\gamma-1}{2}. \text{ Si } M_1 \approx 0 \text{ alors } \frac{T_s}{T_1} \left(1 + \frac{M_s^2(\gamma-1)}{2} \right) = 1.$$

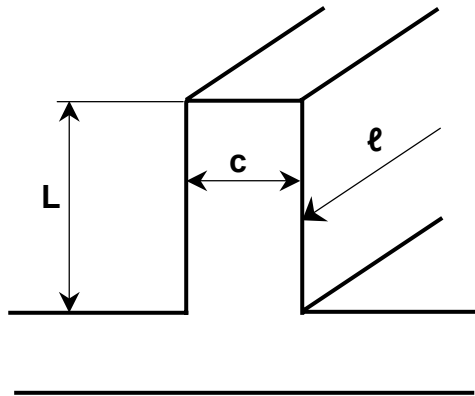
$$T_s = T_1 \left[\frac{2}{2 + M_s^2(\gamma-1)} \right]$$

— Partie 6 —

Étude des transferts thermiques à la paroi dans le circuit régénératif et dans le dump cooling

6.1. Calculons le nombre de Biot Bi

L'ailette constituée par une paroi entre deux canaux est représentée partiellement ci-dessous :



Cette paroi d'épaisseur c constitue une ailette de hauteur L et de longueur l . Cette longueur l correspond au développement longitudinal de la paroi entre deux canaux. L'aire de la section A est donc égale à $c l$.

L'ailette étant réalisée par un ruban continu, son périmètre n'est constitué que par les développements axiaux latéraux de longueur l et vaut $p = 2 l$ car il y a 2 faces seulement.

Le nombre de Biot est adimensionnel et s'exprime donc, avec les notations demandées, par :

$$B_i = \frac{c l h}{2 l \lambda} = \frac{c h}{2 \lambda}$$

A.N. :

$$B_i = \frac{2 \cdot 10^{-3} \times 38\,000}{2 \cdot 380} = 0,10$$

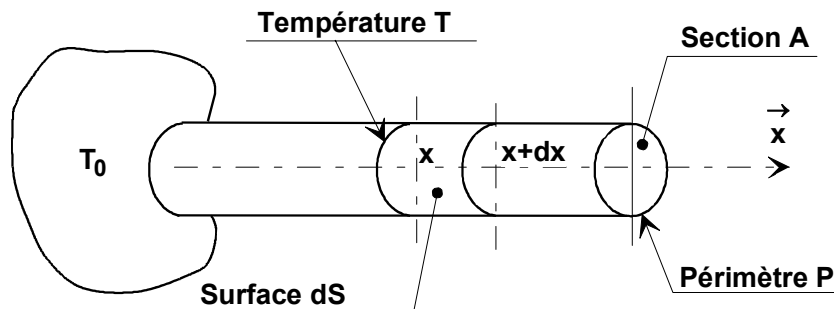
$$B_i = 0,10$$

Le nombre de Biot B_i respecte donc bien la condition d'uniformité de la température dans une tranche d'ailette.

6.2. Écrivons l'équation de la conservation du flux entre les sections x et $x + dx$

La température pouvant être considérée comme uniforme dans une section, on écrit

la conduction unidirectionnelle et le bilan d'énergie sur le volume élémentaire avec les notations de la figure ci-dessous et celles fixées en annexe.



Nous avons : $\phi_x - \phi_{x+dx} = hP dx (T_x - T_F)$.

Le flux conductif est donné par la loi de Fourier et s'écrit :

$\frac{d}{dx} \left(\lambda S \frac{dT}{dx} \right) dx - h P dx (T_x - T_F) = 0$. Avec l'hypothèse d'une conductivité thermique λ constante et d'une ailette de section S constante, nous avons : $\lambda S \frac{d^2T}{dx^2} - h P dx (T_x - T_F) = 0$ donc $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h P}{\lambda S} (T_x - T_F) = 0$. Nous obtenons donc l'équation de conservation du flux entre les sections x et $x + dx$:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - m^2 (T_x - T_F) = 0 \quad \text{avec} \quad m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}}$$

6.3. Intégrons l'équation obtenue à la question 6.2.

En pratiquant le changement de variable $\theta = T_x - T_F$, l'équation précédente devient $\ddot{\theta} - m^2 \theta = 0$. On reconnaît une équation différentielle dont la solution est :

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

C1 et C2 étant deux constantes d'intégration dépendant des conditions limites.

6.4. Montrons que $\phi = (T_0 - T_f) \sqrt{hp\lambda A} \tanh (mL)$

Les conditions limites nous permettent d'écrire :

- pour $x = 0$, $\theta = T_0 - T_F$;
- pour $x = \infty$, $\theta = 0$; la barre, si elle est infiniment longue, est à la température du fluide qui la baigne.

Ici la longueur L est finie, mais le flux est nul en extrémité, ce qui veut dire que le gradient longitudinal est nul, donc $\theta'_L = 0$.

Donc pour $x = 0 \Rightarrow T_0 - T_F = C_1 + C_2$.

Or $\theta' = C_1 m e^{mx} - C_2 m e^{-mx}$; donc pour $x = L, \theta'_L = C_1 m e^{mL} - C_2 m e^{-mL} = 0$.

Ce qui conduit à $C_1 = (T_0 - T_F) \frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$ et $C_2 = (T_0 - T_F) \frac{e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$.

Le champ de température vérifie $\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{e^{-mL} e^{mx} + e^{mL} e^{-mx}}{e^{mL} + e^{-mL}}$. Le flux quittant

l'ailette est mesuré en $x = 0$: $\phi = -\lambda A \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda \theta'_0 A$. Donc :

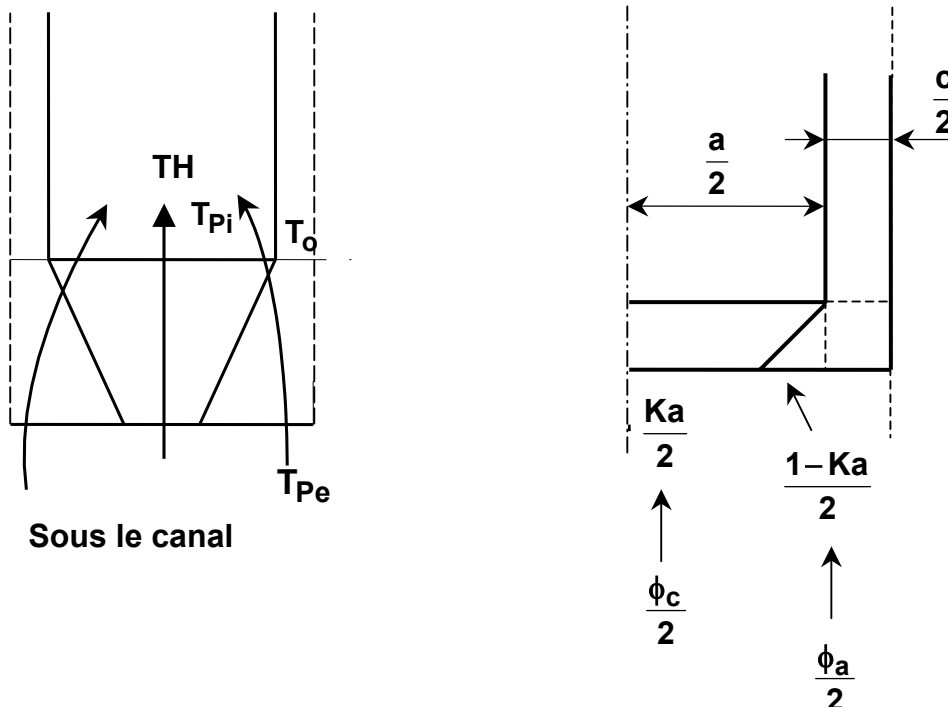
$$\phi = \lambda A (C_2 m - C_1 m) = \sqrt{hP\lambda A} (C_2 - C_1), \text{ soit}$$

$$\phi = \sqrt{hP\lambda A} \left(\frac{e^{mL} (T_0 - T_F) - e^{-mL} (T_0 - T_F)}{e^{mL} + e^{-mL}} \right), \text{ d'où}$$

$$\phi = \sqrt{hP\lambda A} (T_0 - T_F) \text{th } mL$$

6.5. Exprimons, sous la forme $\phi_c = f(K)(T_g - T_h)$, le flux par canal et par unité de longueur

Le flux transmis suit les 2 chemins suivants (par canal et par mode de longueur) :



Le schéma de gauche représente les flux ϕ_a et ϕ_c alimentant l'hydrogène à partir des gaz brûlés pour un canal (ϕ_a pour le flux passant par l'ailette réalisée par la paroi entre canaux et ϕ_c pour le flux passant directement sous le canal).

Nous avons :

$$\phi_c = \underbrace{h_g Ka (T_G - T_{Pe})}_{\text{convection gaz brûlés}} = \underbrace{\frac{\lambda(a - Ka)}{e \text{Ln} \frac{a}{Ka}} (T_{Pe} - T_{Pi})}_{\text{conduction sous le canal}} = \underbrace{h_h a (T_{Pi} - T_h)}_{\text{convection vers hydrogène}}$$

$$\phi_a = \underbrace{h_g [(1-K)a + c] (T_G - T_{Pe})}_{\text{convection gaz brûlés}} = \underbrace{\lambda \frac{[(1-K)a + c - c]}{e \text{Ln} \frac{(1-K)a + c}{c}} (T_{Pe} - T_o)}_{\text{conduction vers la paroi latérale}} = \underbrace{\sqrt{hP\lambda A} (T_o - T_h) \text{th} mL}_{\text{flux évacué par l'ailette}}$$

Comme pour une ailette, $P = 2 \cdot \text{longueur}$, $A = c \cdot \text{longueur}$ et $m = \sqrt{\frac{2h}{\lambda c}}$, par sommation nous obtenons :

$$\phi_c = \frac{T_G - T_h}{\frac{1}{h_g ka} + \frac{1}{h_h a} + \frac{e \text{Ln} \left(\frac{1}{K} \right)}{\lambda a (1-K)}}$$

$$\phi_a = \frac{T_G - T_h}{\frac{1}{h_g [(1-K)a + c]} + \frac{e \text{Ln} \left(\frac{(1-K)a + c}{c} \right)}{\lambda (1-K) a} + \frac{1}{\sqrt{h_h \lambda 2c} \text{th} mL}}$$

6.6. Exprimons l'équation en K

Le fait d'avoir des températures de paroi coté gaz brûlés identiques sous le canal et sous la paroi de séparation (quelques millimètres d'écart) conduit aux relations suivantes :

$$\phi_c = f(K) (T_g - T_h) = h_g ka (T_g - T_{Pe})$$

$$\phi_a = g(K) (T_g - T_h) = h_g [(1-K)a + c] (T_g - T_{Pe})$$

D'où :

$$\frac{f(K)}{g(K)} = \frac{Ka}{(1-K)a + c}$$

6.7. Évaluons ϕ_a et ϕ_c

$$\bullet \phi_c = \frac{1941 - 35}{\frac{1}{7550 \cdot 0,51 \cdot 2,6 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{38\,000 \times 2,6 \cdot 10^{-3}} + \frac{2,5 \cdot 10^{-3} \cdot \ln\left(\frac{1}{0,51}\right)}{380 \cdot 2,6 \cdot 10^{-3} \times (1 - 0,51)}}$$

$$\phi_c = \frac{1906}{0,01 + 3,48 \cdot 10^{-3}} = 16\,796 \text{ W.m}^{-1} \quad \phi_c = 16\,796 \text{ W.m}^{-1}$$

$$\bullet \phi_a = \frac{1941 - 35}{\frac{1}{7\,550 \left[0,49 \cdot 2,6 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3}\right]} + \frac{2,5 \cdot 10^{-3} \cdot \ln\left(\frac{0,49 \cdot 2,6 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}\right)}{380 \cdot 0,49 \cdot 2,6 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{\sqrt{38\,000 \cdot 380 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \cdot \text{th} \sqrt{\frac{38\,000 \cdot 2}{380 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \cdot 12 \cdot 10^{-3}}}}$$

$$\phi_a = \frac{1906}{0,04 + 2,545 \cdot 10^{-3} + 4,17 \cdot 10^{-3}} = 40\,800 \text{ W.m}^{-1} \quad \phi_a = 40\,800 \text{ W.m}^{-1}$$

Vérifions la validité de la valeur de K

Nous avons $\frac{\phi_c}{\phi_a} = 0,41$ et $\frac{Ka}{(1-K)a+c} = 0,40$. La valeur de K proposée est donc bonne.

Évaluons ensuite la température de paroi obtenue coté gaz brûlés

Reprenons l'expression du flux passant sous le canal parcouru par l'hydrogène

$$\phi_c = \frac{T_G - T_P}{\frac{1}{h_g Ka}}. \text{ On est conduit à la température de paroi sous le canal de :}$$

$$T_P = T_G - \frac{\phi_c}{h_g Ka}$$

A.N. :

$$T_P = T_G - \frac{\phi_c}{h_g Ka} = 1941 - \frac{16\,796}{7\,550 \cdot 0,51 \cdot 2,6 \cdot 10^{-3}} = 263,3 \text{ K} \quad T_P = 263,3 \text{ K}$$

Le même calcul mené avec ϕ_a , mesuré entre les gaz brûlés et la paroi léchée par ceux-ci, s'écrit :

$$T_P = T_G - \frac{\phi_a}{h_g[(1-K)a + c]}$$

A.N. :

$$T_P = 1941 - \frac{40\,800}{7\,550[(1-0,51)2,6 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3}]} = 290,4 \text{ K} \quad T_P = \mathbf{290,4 \text{ K}}$$

L'écart constaté provient des valeurs arrondies à la première décimale concernant K.

Le nombre, qui doit être entier, de canaux présents tout autour du circuit régénératif s'obtient par la relation :

$$N_c = \frac{2\pi R_i}{(a + c)}$$

A.N. :

$$N_c = \frac{2\pi \cdot 0,293}{(2,6 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3})} = 400,2 = 400 \text{ canaux} \quad N_c = \mathbf{400 \text{ canaux}}$$

Déterminons le flux transféré à la paroi de la tuyère sur toute sa circonférence par mètre de longueur

Le flux extrait par mètre de longueur vaut :

$$\phi = (\phi_a + \phi_c) \cdot N_c$$

A.N. :

$$\phi = (40\,800 + 16\,796) \cdot 400 = 23 \cdot 10^6 \text{ W.m}^{-1} \quad \phi = \mathbf{23 \cdot 10^6 \text{ W.m}^{-1}}$$

6.8. Calculons la température de la paroi inter canaux en son extrémité supérieure

L'hypothèse de calcul faite considère que le flux est nul en extrémité d'ailette. Vérifions cette hypothèse.

Nous avons : $\phi_a = \sqrt{h_h \lambda 2c} \text{ th mL} (T_o - T_h) = 40\,800 \text{ W.m}^{-1}$.

$$\text{Donc } \frac{T_L - T_h}{T_o - T_h} = \frac{e^{-mL}e^{mL} + e^{mL}e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} = \frac{2}{e^{mL} + e^{-mL}}. \text{ Nous obtenons :}$$

$$T_L = T_h + (T_0 - T_h) \frac{2}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

A.N. :

$$T_L = 35 + \frac{170 \times 2}{e^{3,79} + e^{-3,79}} = 35 + 7,7 = 42,7 \text{ K} \qquad T_L = 42,7 \text{ K}$$

Cette température en extrémité d'ailette (extrémité de la paroi entre deux canaux) très basse et très proche de celle de l'hydrogène n'entraîne que peu d'échanges vers l'extérieur et vers l'hydrogène. **L'hypothèse de calcul faite est donc valable.**

6.9. Exprimons littéralement la température d'hydrogène au bout d'un parcours de longueur l dans les canaux

Réalisons un simple bilan énergétique sur le flux reçu par l'hydrogène :

$$\dot{m}_h C_{pH} (T_h - T_{ho}) = \phi_a + \phi_c, \quad \dot{m}_h \text{ représente ici le débit dans un canal.}$$

Sur toute la longueur et pour tous les canaux (débit total d'hydrogène), nous avons

$$\dot{m}_{th} C_{pH} (T_h - T_{ho}) = 20 \text{ MW} . \text{ Donc :}$$

$$T_h = T_{ho} + \frac{20 \cdot 10^6}{\dot{m}_{th} C_{pH}}$$

Déterminons la température d'hydrogène en entrée d'injecteur du moteur Vulcain

$$\text{Donc } T_h = + \frac{20 \cdot 10^6}{36 \cdot 12 \ 800} = T_{ho} + 43,4 \text{ K} . \text{ Nous avons donc } T_h = 35 + 43,4 = 78,4 \text{ K} .$$

L'hydrogène est donc injecté à 78,4 K dans le moteur.