Simulation des systèmes de solides rigides polyarticulés

5- Algèbre spatiale

Charles Pontonnier

Problématique

	Analytique	**Numérique**
Global	Méthode de Lagrange adaptée	Composite Rigid Body Algorithm
Itératif	N.A.	Newton-Euler Articulated Body Algorithm

- Plus de calcul « formel » des quantités associées aux équations du mouvement
- Description systématique des modèles
- Choix de calculs pour les quantités dynamiques (Algèbre spatiale)

Principe

L'algèbre spatiale est une notation permettant d'exprimer la **cinématique et la dynamique** des solides rigides de manière concise et efficace. Pour cela, on exploite des **vecteurs ainsi que des tenseurs à 6 dimensions**

Cette notion peut être approchée de celle des torseurs, exprimant à la fois les quantités fixes et variables associées aux solides

Structure mathématique

Les vecteurs spatiaux peuvent être séparés en deux espaces

M^6 → vecteurs mouvement
F^6 → vecteurs force

Le produit scalaire de deux vecteurs issus de chacun de ces espaces définissant le travail:

$$m \cdot f = travail$$

Produit scalaire

Bases

Un vecteur de coordonnées $\boldsymbol{m} = [m_1\ m_2\ \ldots m_6]^t$ représente un vecteur de mouvement dans la base $\{\boldsymbol{d_1}, \ldots, \boldsymbol{d_6}\}$ de M^6
Si il peut s'exprimer

$$\boldsymbol{m} = \sum_{i=1}^{6} m_i \boldsymbol{d_i}$$

Un vecteur de coordonnées $\boldsymbol{f} = [f_1\ f_2\ \ldots f_6]^t$ représente un vecteur de mouvement dans la base $\{\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_6}\}$ de F^6
Si il peut s'exprimer

$$\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{6} f_i \boldsymbol{e_i}$$

Bases

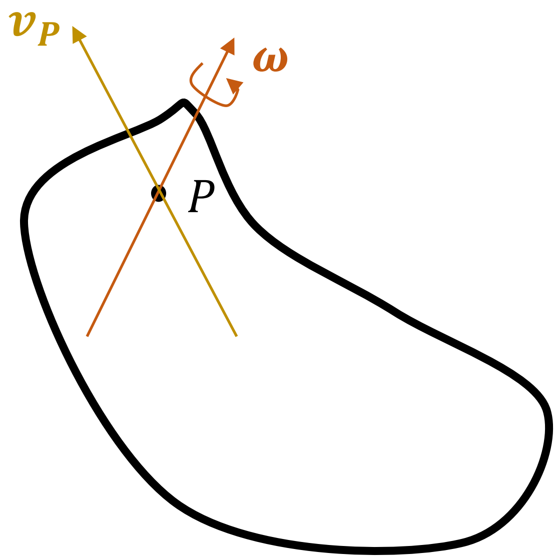
Si $\{\boldsymbol{d_1}, \dots, \boldsymbol{d_6}\}$ est une base quelconque sur M^6, alors il existe une unique base réciproque $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_6}\}$ sur F^6 permettant

$$\boldsymbol{d_i}.\boldsymbol{e_j} = \begin{cases} 0 : i \neq j \\ 1 : i = j \end{cases}$$

De fait, le produit scalaire de deux vecteurs de coordonnées exprimés dans ces bases s'écrit simplement

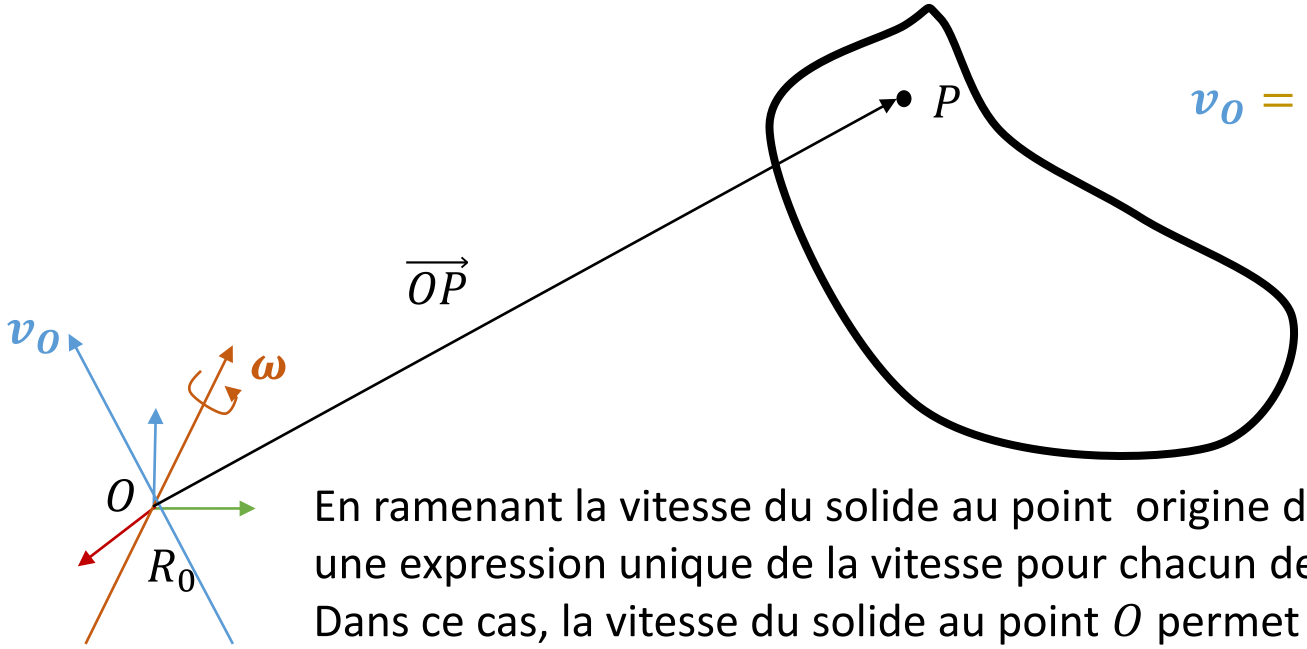
$$\boldsymbol{m}.\boldsymbol{f} = \boldsymbol{m}^t \boldsymbol{f}$$

Vitesse spatiale



Classiquement, la vitesse d'un solide rigide est définie comme étant une vitesse de rotation $\boldsymbol{\omega}$ et une vitesse de translation $\boldsymbol{v_P}$ exprimée en un point P quelconque du solide.

Vitesse spatiale



$$v_O = v_P + \overrightarrow{OP} \times \omega$$

Produit vectoriel

En ramenant la vitesse du solide au point origine du repère de référence O, on peut alors obtenir une expression unique de la vitesse pour chacun des solides.
Dans ce cas, la vitesse du solide au point O permet d'exprimer la vitesse spatiale du solide, définie par un vecteur de coordonnées sur M^6 :

$$\xi = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ v_{O_x} \\ v_{O_y} \\ v_{O_z} \end{bmatrix}$$

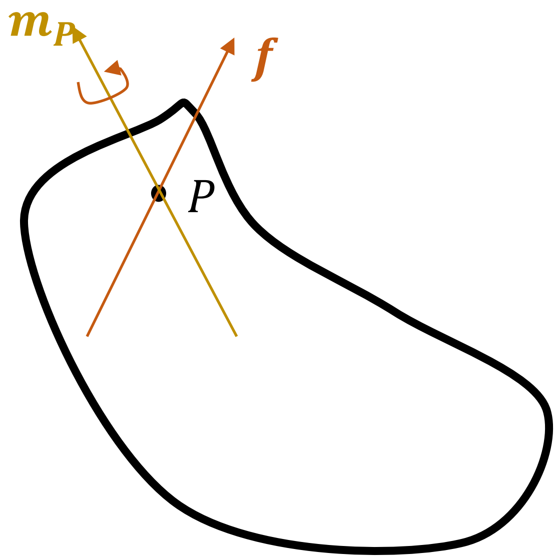
Vitesse spatiale

La vitesse spatiale du solide peut alors être résumée à la somme de 6 mouvements élémentaires

Une vitesse linéaire v_{O_x} dans la direction $\boldsymbol{x}$
Une vitesse linéaire v_{O_y} dans la direction $\boldsymbol{y}$
Une vitesse linéaire v_{O_z} dans la direction $\boldsymbol{z}$
Une vitesse angulaire ω_x autour de $\mathrm{O}\boldsymbol{x}$
Une vitesse angulaire ω_y autour de $\mathrm{O}\boldsymbol{y}$
Une vitesse angulaire ω_z autour de $\mathrm{O}\boldsymbol{z}$

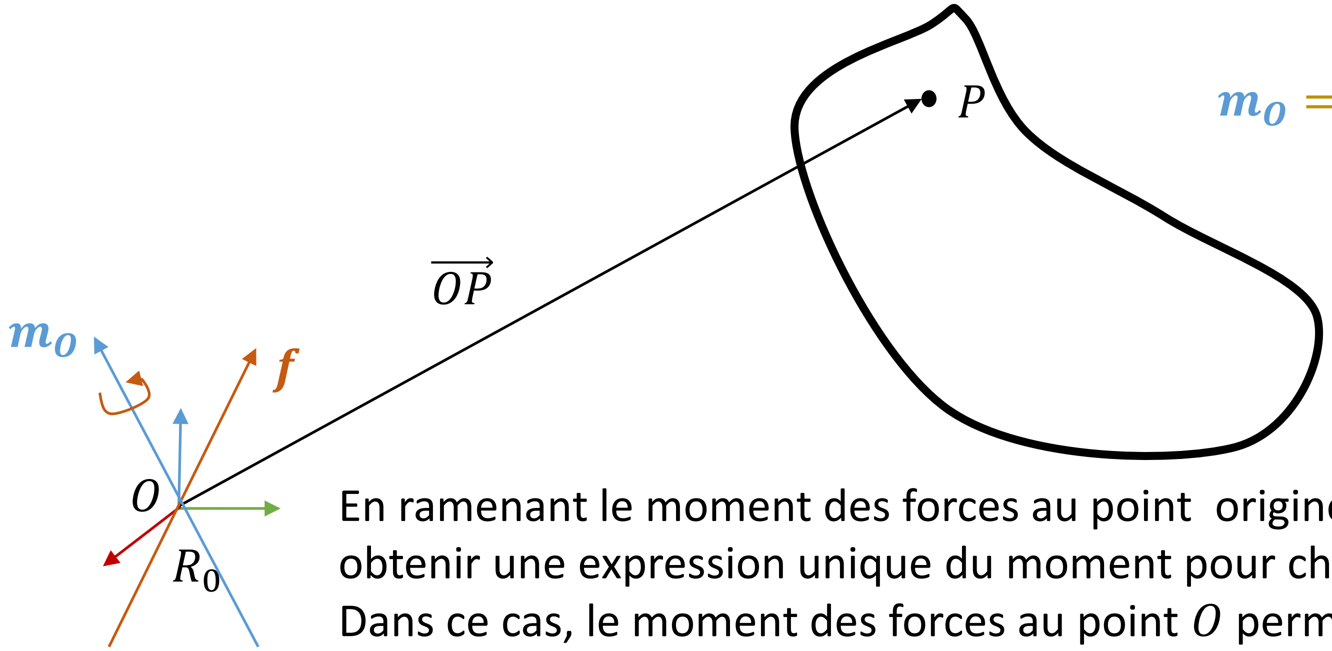
La vitesse spatiale fournit une description complete des vitesses du solide, et est invariante en regard de la position du repère de coordonnées.

Force spatiale



Classiquement, les efforts extérieurs résultants sur un solide peuvent s’exprimer sous la forme d’une force linéaire (résultante) f agissant en un point quelconque du solide P et un moment m_P associé à ce point

Force spatiale



$$\boldsymbol{m_O} = \boldsymbol{m_p} + \overrightarrow{OP} \underbrace{\times}_{\text{Produit vectoriel}} \boldsymbol{f}$$

En ramenant le moment des forces au point origine du repère de référence O, on peut alors obtenir une expression unique du moment pour chacun des solides.
Dans ce cas, le moment des forces au point O permet d'exprimer la force spatiale s'appliquant sur le solide, définie par un vecteur de coordonnées sur F^6 :

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} m_{O_x} \\ m_{O_y} \\ m_{O_z} \\ f_y \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

Force spatiale

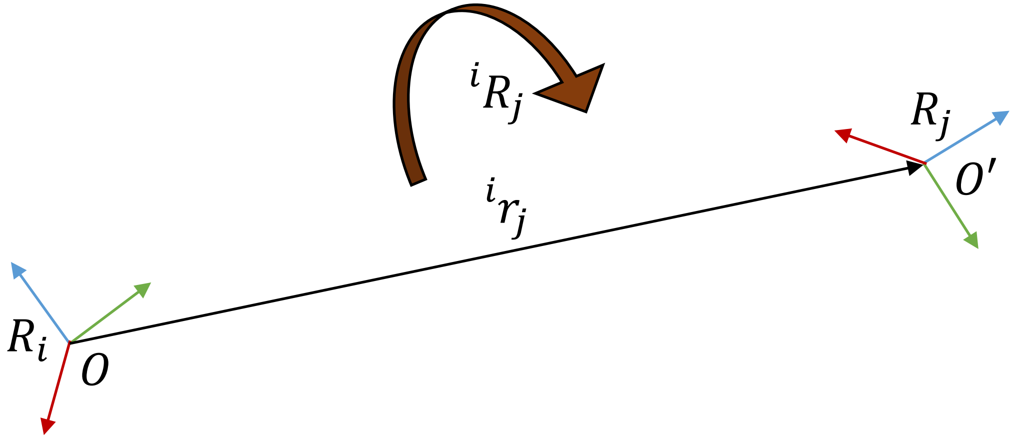
La force spatiale s’appliquant sur le solide peut alors être résumée à la somme de 6 forces élémentaires

Un moment m_{O_x} autour de $\boldsymbol{x}$
Un moment m_{O_y} autour de $\boldsymbol{y}$
Un moment m_{O_z} autour de $\boldsymbol{z}$
Une force f_x le long de $O\boldsymbol{x}$
Une force f_y le long de $O\boldsymbol{y}$
Une force f_z le long de $O\boldsymbol{z}$

La force spatiale fournit une description complete des forces s’appliquant sur le solide, et est invariante en regard de la position du repère de coordonnées.

Expression d’un vecteur spatial dans un repère quelconque

On peut définir une matrice de transformation 6 x6 permettant d’exprimer la rotation et la translation d’un repère à un autre pour pouvoir changer l’expression d’un vecteur spatial mouvement d’un repère à un autre.



$$ {}^i\boldsymbol{X}_j = \begin{bmatrix} {}^i\boldsymbol{R}_j & \mathbf{0} \\ {}^i\boldsymbol{R}_j \; {}^i\hat{\boldsymbol{r}}_j{}^t & {}^i\boldsymbol{R}_j \end{bmatrix} $$

On change également le point de référence de la vitesse spatiale (le point de référence devient O au lieu de O’)

Avec

$$ {}^i\hat{\boldsymbol{r}}_j = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix} $$

L’opérateur produit vectoriel

Pour les vecteurs **forces** $\;{}^i\boldsymbol{X}_j^* = \left({}^i\boldsymbol{X}_j \right)^{-\mathbf{t}}$

Opérations de base avec les vecteurs spatiaux

Vitesse relative

Si les solides A et B ont des vitesses spatiales $\boldsymbol{\xi_A}$ et $\boldsymbol{\xi_B}$ alors la vitesse relative de B par rapport à A s'écrit simplement

$$\boldsymbol{\xi_{rel}} = \boldsymbol{\xi_B} - \boldsymbol{\xi_A}$$

Connection rigide

Si deux solides sont liés rigidement, leur Vitesse spatiale est identique

Opérations de base avec les vecteurs spatiaux

Somme de forces
Un solide soumis à deux forces $\boldsymbol{f_1}$ et $\boldsymbol{f_2}$ est soumis, de manière equivalente, à une force totale qui s'écrit

$$\boldsymbol{f_{tot}} = \boldsymbol{f_1} + \boldsymbol{f_2}$$

Action- Réaction
Si le solide A exerce une force $\boldsymbol{f}$ sur le solide B, alors le solide B exerce une force $-\boldsymbol{f}$ sur le solide A

Produit scalaire
Si une force $\boldsymbol{f}$ agit sur un solide se déplaçant à une vitesse $\boldsymbol{\xi}$, alors la puissance délivrée par cette force s'exprimera

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\xi}.\boldsymbol{f}$$

Produits vectoriels spatiaux

Nécessité de définir 2 produits vectoriels spatiaux: un pour les vecteurs mouvements, un pour les vecteurs force

$$\boldsymbol{\xi}_1 \times \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega_1} \\ \boldsymbol{v_{O_1}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega_2} \\ \boldsymbol{v_{O_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega_1} \times \boldsymbol{\omega_2} \\ \boldsymbol{\omega_1} \times \boldsymbol{v_{O_2}} + \boldsymbol{\omega_2} \times \boldsymbol{v_{O_1}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v_O} \end{bmatrix} \times^* \begin{bmatrix} \boldsymbol{m_O} \\ \boldsymbol{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{m_O} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{f} \end{bmatrix}$$

Dérivées

La dérivée d'un vecteur spatial est un vecteur spatial

De manière générale $\frac{d}{dt}\boldsymbol{s} = \lim_{\boldsymbol{\delta t \to 0}} \frac{\boldsymbol{s}(t+\delta t)-\boldsymbol{s}(t)}{\delta t}$

La dérivée d'un vecteur spatial fixe dans un solide bougeant à une vitesse ξ est donnée par

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{s} = \begin{cases} \boldsymbol{\xi} \times s & \text{Si } \boldsymbol{s} \text{ est un vecteur mouvement} \\ \boldsymbol{\xi} \times^* s & \text{Si } \boldsymbol{s} \text{ est un vecteur force} \end{cases}$$

Dérivée en base mobile

La dérivée en base mobile nous donne $\left[\frac{d}{dt}\boldsymbol{s}\right]_0 = \frac{d}{dt}\boldsymbol{s}_0 + \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{s}_0$

Vecteur de coordonnées $\frac{d}{dt}\boldsymbol{s}$

Vitesse de la base mobile

Dérivée par composante du veceur de coordonées

Accélération

C'est le taux de variation de la vitesse $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{O}} \end{bmatrix}$

Cette quantité n'est pas l'acceleration linéaire du point O appartenant au solide…

O est un point fixe dans l'espace
Et v_O est la Vitesse du point du solide considéré coincidant avec le point O à l'instant t
Donc v_O est la Vitesse à laquelle les points du solide défilent en O
En conclusion, $\dot{v_O}$ est le taux de variation de la Vitesse de défilement

Calcul de l'accéleration spatiale

Soit r le vecteur 3D donnant la position du point du solide coincidant avec O à un instant t, donnant sa position par rapport à n'importe quel point fixe de l'espace

On a alors

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v_O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\boldsymbol{r}} \end{bmatrix}$$

Ce qui donne

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\boldsymbol{v_O}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \ddot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}$$

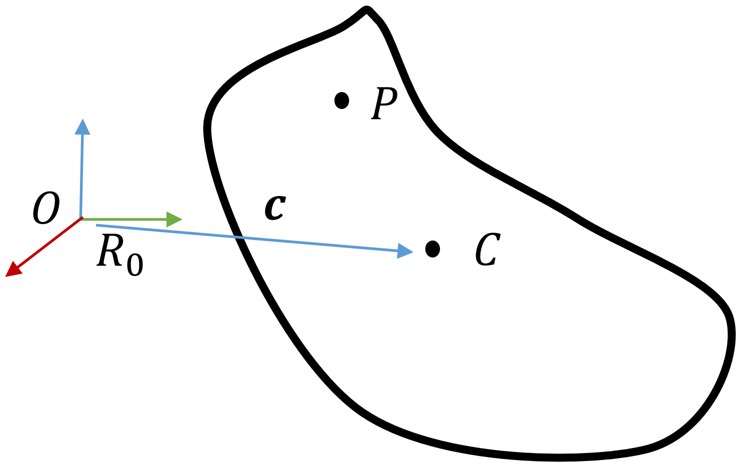
L'acceleration est donc la dérivée de la vitesse

L'acceleration est un veritable vecteur spatial de mouvement, ayant les mêmes propriétés algébriques que la Vitesse

Les formules pour l'accélérations sont les dérivées des formules pour la Vitesse

Si $\boldsymbol{\xi_{tot}} = \boldsymbol{\xi_1} + \boldsymbol{\xi_2}$ alors $\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{tot}} = \dot{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{1}} + \dot{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{2}}$

Inertie spatiale et accélération spatiale



Inertie Spatiale : Matrice 6 x 6 définie symétrique qui s'écrit:

$$\boldsymbol{I}^s = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} - m\hat{\boldsymbol{c}}\hat{\boldsymbol{c}} & m\hat{\boldsymbol{c}} \\ m\hat{\boldsymbol{c}}^t & \boldsymbol{m}\mathbb{I} \end{bmatrix}$$

Avec l'inertie $\boldsymbol{I}$ définie au centre de masse C et la masse m

$\mathbb{I}$ matrice identité

Composition d'inerties spatiales

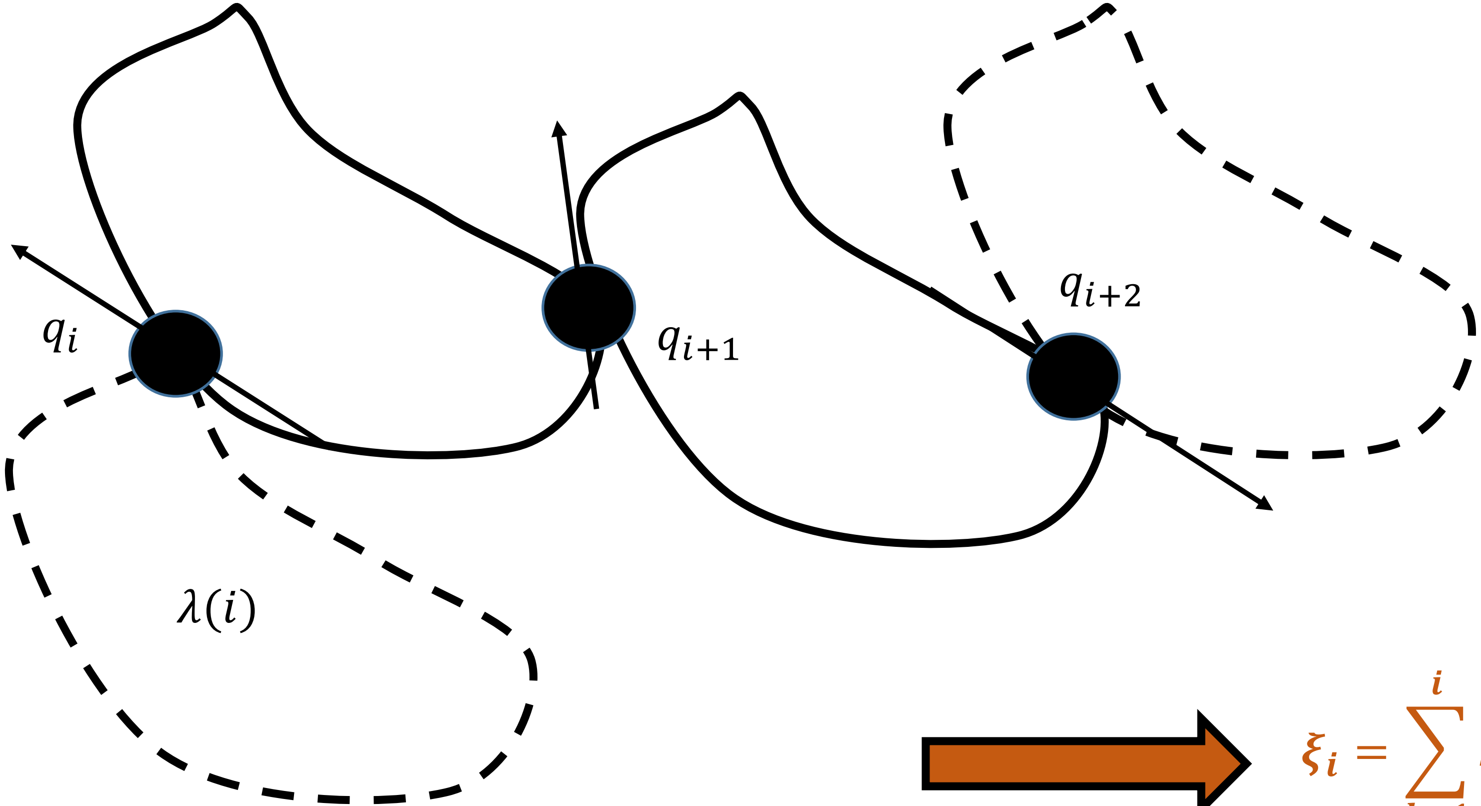
En supposant deux solides A et B d'inertie spatiale respective $\boldsymbol{I}_A^s$ et $\boldsymbol{I}_B^s$, alors l'assemblage des deux solides donne un solide d'inertie spatiale composite

$$\boldsymbol{I}_{tot}^s = \boldsymbol{I}_A^s + \boldsymbol{I}_B^s$$

Transformation de l'inertie spatiale

$${}^2\boldsymbol{I}_A^s = {}^2\boldsymbol{X}_1^* \; {}^1\boldsymbol{I}_A^s \; {}^1\boldsymbol{X}_2 = {}^1\boldsymbol{X}_2^t \; {}^1\boldsymbol{I}_A^s \; {}^1\boldsymbol{X}_2$$

La vitesse spatiale pour une chaine de solides



Sous espace du mouvement associé à la liaison i (décrits dans R_0) → $\boldsymbol{s_i}$

$$\boldsymbol{\xi_i} = \boldsymbol{\xi_{\lambda(i)}} + \overbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{u_i} \\ \boldsymbol{p_i} \times \boldsymbol{u_i} \end{bmatrix}} \boldsymbol{\dot{q}_i}$$

$$\boldsymbol{\xi_{i+1}} = \boldsymbol{\xi_i} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_{i+1}} \\ \boldsymbol{p_{i+1}} \times \boldsymbol{u_{i+1}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\dot{q}_{i+1}}$$

$$\boldsymbol{\xi_i} = \sum_{k=1}^{i} \boldsymbol{s_k}\,\boldsymbol{\dot{q}_k}$$

$\boldsymbol{p_i}$ position de la liaison i dans R_0
$\boldsymbol{u_i}$ orientation de la liaison I dans R_0