

Sujet de Mécanique des Systèmes et des Milieux Déformables

1	Mécanique des solides indéformables	4
1.1	Analyse de la structure parallèle	5
1.2	Torseurs unitaires et torseurs réciproques	5
1.3	Modèle cinématique du CT-Bot	6
1.4	Détermination des efforts aux articulations	8
1.5	Analyse d'une configuration spécifique	10
2	Mécanique des solides déformables	13
2.1	Étude préliminaire	13
2.2	Application au montage des segments du robot	15
2.3	Modèle numérique	16
3	Mécanique des fluides	18
3.1	Écoulement 3D non newtonien	18
3.2	Écoulement de Poiseuille plan	20
3.3	Recherche des paramètres d'injection optimum	22
3.4	Refroidissement et déformation d'une pièce injectée	23
4	Annexes	25
1	Figures	25
2	Torseurs unitaires	29
3	Torseur réciproque \mathcal{V}^r à une liaison pivot	30
4	Modélisation numérique	31

Introduction - Robot médical CT-Bot

Le **CT-Bot** est un assistant robotique en cours de développement destiné à la réalisation de procédures abdominales minimalement invasives.

Le champ d'application des procédures minimalement invasives va du diagnostic au traitement de tumeurs localisées dans des organes internes. Ces modalités thérapeutiques présentent notamment l'intérêt d'être moins douloureuses pour le patient que la chirurgie classique et permettent ainsi un rétablissement plus rapide. Les scanners à rayons X récents rendent possible la détection de tumeurs d'une taille inférieure au centimètre. En raison de leur précision limitée, les interventions manuelles ne sont aujourd'hui pratiquées que sur des tumeurs dont la taille varie entre 30 et 60 mm. D'autre part, la répétition d'actes d'insertion d'aiguille sous imagerie scanner expose le praticien à des doses de rayons X potentiellement dangereuses pour sa santé. Les besoins en précision et protection aux rayons X sont principalement à l'origine du développement de nouveaux dispositifs d'assistance à ces gestes médico-chirurgicaux.

L'utilisation de robots pour réaliser des interventions sous imagerie scanner n'est pas une pratique nouvelle. Toutefois, bien que des essais cliniques aient été réalisés dans certains cas, les systèmes actuels sont mal adaptés aux interventions sur l'abdomen où les mouvements et la respiration du patient sont des sources importantes de perturbation.

L'utilisation d'un système robotisé tel que **CT-Bot** pour la réalisation de procédures percutanées a pour objectif d'améliorer la précision des interventions, de limiter l'exposition du radiologue et du personnel médical aux rayons X et de réduire la durée des opérations.

Pour favoriser la précision du positionnement et la rigidité, un mécanisme à structure parallèle a été proposé. Le **CT-Bot** est un mécanisme à structure parallèle original à cinq degrés de liberté prévu pour le positionnement et l'orientation d'une aiguille (voir figures 8 et 9 en annexe 1) dans le cadre de procédures percutanées de destruction de tumeurs.

Dans la phase de pénétration, le mécanisme de positionnement et d'orientation de l'aiguille doit pouvoir reprendre, sans se déformer, un effort d'insertion maximum de l'ordre de 20 N. Cette rigidité doit aussi favoriser l'acquisition de l'effort d'insertion, mesuré entre le positionneur et le système porte-aiguille. Le porte-aiguille ne fait pas partie du périmètre de cette étude.

La structure parallèle proposée comporte trois jambes articulées reliant la base du robot à une plate-forme commune qui correspond à l'organe terminal du positionneur auquel est attaché le porte-aiguille.

Deux jambes opposées (chaîne C_1 et C_2 cinématiquement identiques) connectées par la plate-forme constituent un premier mécanisme plan à six barres (voir figure 10). Dans ce plan sont pilotés trois degrés de liberté. Les deux degrés de liberté restants sont, tout d'abord, une rotation du système 6-barres autour de l'axe d_1 et une rotation de la plate-forme autour de l'axe d_2 . La troisième jambe reliée à plate-forme permet, grâce à deux actionneurs, d'imposer les angles de rotation autour de d_1 et d_2 .

La conception et le développement du **CT-Bot** ont été réalisés par une équipe de cher-

cheurs (INSA et Université Louis Pasteur de Strasbourg) en collaboration étroite avec le service de radiologie interventionnelle des hôpitaux universitaires de Strasbourg.

Le sujet comporte **trois parties** indépendantes.

Après une phase introductive sur le fonctionnement du mécanisme, la **première partie** est consacrée à la modélisation cinématique du **CT-Bot** en vue de pré-dimensionner ses actionneurs. La démarche de résolution utilisée est basée sur l'écriture du principe des puissances virtuelles à l'aide de torseurs réciproques judicieusement choisis. La définition des notions de torseurs unitaires et réciproques est exposée en annexes 2 et 3. Cette méthode de résolution est classique en robotique et permet d'obtenir très directement les modèles cinématiques.

La section 1.5, consacrée à l'analyse d'une configuration spécifique du mécanisme peut être traitée indépendamment du reste de la première partie.

L'étude du dimensionnement partiel des segments du robot est réalisée en **seconde partie**. La création d'un modèle analytique simplifié suivi de l'analyse d'un modèle 3D éléments finis sont demandés. L'étude de ces deux modèles permet de définir les caractéristiques mécaniques attendues des segments.

La réalisation d'un premier prototype du **CT-Bot** a permis de mettre en évidence un manque de rigidité des segments du robot. L'analyse de la fabrication de ces segments par un autre mode de fabrication tel que l'injection est abordée dans la **troisième partie**. Cette étude permet de faire un choix de matériau répondant à la fois aux exigences de rigidité (définies en partie 2) et aux exigences de fabrication.

Il est recommandé de répondre aux trois parties sur des copies séparées.

Partie 1 - Mécanique des solides indéformables

Le mécanisme proposé permet de positionner dans l'espace un point O_f de l'aiguille dont l'axe a pour vecteur directeur \vec{z}_f et d'orienter l'aiguille suivant deux angles α et β définis de la manière suivante :

- α rotation autour de \vec{x}_0 (voir figures 11-a₁ et 11-a₂) avec α compris entre -25° et 25° ;
- β rotation autour de \vec{y}_0 (voir figure 11-b) avec β est compris entre 0° et 60° .

Le robot comporte donc cinq degrés de liberté (les deux rotations α et β et le déplacement de O_f).

L'objectif de cette partie est de réaliser une modélisation cinématique du mécanisme en vue de pré-dimensionner ses actionneurs.

- ★ Section 1.1 : analyse de la structure parallèle ;
- ★ Section 1.2 et 1.3 : modélisation cinématique basée sur l'utilisation de torseurs unitaires et réciproques ;
- ★ Section 1.4 : détermination des efforts aux articulations ;
- ★ Section 1.5 : analyse d'une configuration spécifique ;

Paramétrage du système

Le mécanisme comporte 16 liaisons de type pivot dont cinq sont motorisées (voir figure 12 pour le modèle cinématique adopté dans l'étude).

- ✓ Soient \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}_f deux repères orthonormés directs liés respectivement au bâti et à la plate-forme mobile du robot (voir figures 11 et 12). On note $\mathcal{R}_0 \equiv (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $\mathcal{R}_f \equiv (O_f, \vec{x}_f, \vec{y}_f, \vec{z}_f)$.
- ✓ Le vecteur de configuration X du robot représente la position et l'orientation de la plate-forme par rapport à \mathcal{R}_0 . On construit X à l'aide des coordonnées de l'origine O_f et du vecteur \vec{z}_f de \mathcal{R}_f exprimées dans \mathcal{R}_0 . Ainsi (O_f, \vec{z}_f) définit la droite support de l'instrument porté par le robot.

On note également X la matrice colonne des composantes du vecteur de configuration du robot¹ :

$$X = [x_{O_f} \quad y_{O_f} \quad z_{O_f} \quad x_{z_f} \quad y_{z_f} \quad z_{z_f}]^T$$

où

$$\overrightarrow{O_0O_f} = x_{O_f} \vec{x}_0 + y_{O_f} \vec{y}_0 + z_{O_f} \vec{z}_0 \quad \text{et} \quad \vec{z}_f = x_{z_f} \vec{x}_0 + y_{z_f} \vec{y}_0 + z_{z_f} \vec{z}_0.$$

Remarque \vec{z}_f est un vecteur unitaire donc $\|\vec{z}_f\|^2 = x_{z_f}^2 + y_{z_f}^2 + z_{z_f}^2 = 1$.
Le vecteur de configuration X est donc décrit à l'aide de $6 - 1 = 5$ paramètres indépendants.

¹Le vecteur de configuration d'un robot est un élément de \mathbb{R}^n où n correspond au nombre de degrés de liberté du robot. Les composantes de X sont aussi appelées coordonnées opérationnelles.

- ✓ On note q_3, q_4, q_8, q_{14} et q_{15} les paramètres d'orientation angulaire des cinq liaisons motorisées et $p_1, p_2, p_5, p_6, p_7, p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12}, p_{13}$ et p_{16} les paramètres d'orientation angulaire des onze liaisons passives.
- ✓ Le vecteur des coordonnées articulaires q regroupe tous les paramètres de liaisons motorisées. On note également q la matrice colonne des composantes du vecteur des coordonnées articulaires² : $q = [q_3 \quad q_4 \quad q_8 \quad q_{14} \quad q_{15}]^T$.

Le modèle cinématique recherché correspond à une relation entre la vitesse \dot{X} de la plateforme et les vitesses articulaires motorisées \dot{q} . La démarche envisagée pour le trouver consiste à mettre en évidence des torseurs réciproques au plus grand nombre de liaisons passives du mécanisme afin d'éliminer les contributions des vitesses \dot{p}_i .

Section 1.1 - Analyse de la structure parallèle

Question 1.1.1 Mettre en place le graphe des liaisons du modèle cinématique adopté pour le robot. On indiquera avec précision et pour chaque liaison, son type, ses caractéristiques cinématiques (point, direction, axe, etc.) et son nombre de paramètres cinématiques.

Question 1.1.2 On se propose dans cette question d'étudier les propriétés structurales du mécanisme par une approche globale (i.e. sans résolution des équations de fermeture). Pour le modèle cinématique adopté, déterminer, en indiquant précisément la démarche, le degré d'hyperstaticité h du modèle mécanique. Quel est l'intérêt, dans le cadre du système étudié, d'avoir $h > 0$?

Question 1.1.3 Justifier par une analyse simple du mécanisme la valeur de ce degré d'hyperstaticité : on indiquera par exemple la ou les contraintes géométriques correspondant à ce degré d'hyperstaticité par un ou plusieurs dessin(s) judicieusement choisis.

Remarque On rappelle que, dans ce mécanisme, les chaînes C_1 et C_2 doivent rester dans un même plan.

Question 1.1.4 Proposer une ou des modification(s) de la modélisation pour rendre ce modèle isostatique en respectant les deux contraintes constructives suivantes :

- ne pas modifier les liaisons motorisées ;
- ne pas modifier les liaisons avec la structure porteuse posée sur le patient.

Proposer alors une solution technologique de réglage de la liaison choisie afin d'assurer un montage aisé.

Section 1.2 - Torseurs unitaires et torseurs réciproques

Un rappel des notions de torseurs unitaires et réciproques est donné en annexes 2 et 3.

Description des liaisons d'un mécanisme à l'aide de torseurs unitaires

On désigne par $\mathcal{V}_{i/i-1}$ le torseur cinématique du solide i en mouvement par rapport au solide $i - 1$ (voir annexe 2).

²Les composantes de q sont aussi appelées coordonnées généralisées.

Question 1.2.1 Soit A un point de l'axe central Δ_i du torseur $\mathcal{V}_{i/i-1}$ de pas λ_i . Écrire la vitesse du solide i en mouvement par rapport au solide $i-1$, en fonction des invariants du torseur cinématique. Exprimer cette vitesse au point A puis en un point M quelconque.

Question 1.2.2 Montrer que λ_i est égal à l'automoment de $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}$.

Question 1.2.3 Quels sont les mouvements associés à un torseur cinématique $\mathcal{V}_{i/i-1}$ de pas nul et un torseur cinématique $\mathcal{V}_{i/i-1}$ de pas infini ?

Construction d'une base de torseurs réciproques \mathcal{V}^r à une liaison pivot

On rappelle que le système est constitué uniquement de liaisons pivots notées $\mathcal{L}_{i(i \in [1,16])}$ caractérisées par leur torseur cinématique unitaire $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}$. Pour les questions 1.2.4 à 1.2.6, on notera $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}^r$ un torseur unitaire et réciproque à $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}$ représentant la liaison pivot \mathcal{L}_i .

Question 1.2.4 Caractériser l'axe central d'un torseur de pas nul, unitaire et réciproque à $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}$. Donner une interprétation géométrique de ce torseur réciproque.

Question 1.2.5 Caractériser l'axe central d'un torseur, de pas infini, unitaire et réciproque à $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}$. Donner une interprétation géométrique de ce torseur réciproque.

Question 1.2.6 Combien existe-t-il de torseurs réciproques à $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}$ linéairement indépendants ?

Remarque On rappelle que deux torseurs $\mathcal{V}_{i/i-1}^a$ et $\mathcal{V}_{i/i-1}^b$ sont dits linéairement dépendants si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad / \quad \mathcal{V}_{i/i-1}^a = k \cdot \mathcal{V}_{i/i-1}^b.$$

Section 1.3 - Modèle cinématique du CT-Bot

Dans le mécanisme proposé, toutes les liaisons $\mathcal{L}_{i(i \in [1,16])}$ sont des liaisons pivots supposées parfaites (voir figure 17). Les figures 13 à 14 présentent la définition des repères pour chacune des trois chaînes placées dans une configuration de référence simple (chaînes en configuration étendue).

Équations de fermeture du mécanisme

Le mouvement de la plate-forme par rapport à \mathcal{R}_0 est décrit au moyen du torseur cinématique, exprimé en un point F quelconque :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \\ \vec{V}_{F,\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \end{array} \right\}_F.$$

On souhaite exprimer $\mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0}$ de trois manières différentes en considérant successivement les équations de fermeture des chaînes C_1 , C_2 et C_3 .

Question 1.3.1 Pour chaque chaîne, donner l'expression torsorielle de $\mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0}$ en fonction des \dot{q}_i , \dot{p}_j et des torseurs cinématiques unitaires $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}$. On notera les relations relatives aux chaînes C_1 , C_2 et C_3 respectivement (1), (2) et (3).

Remarque Les équations torsorielles (1) à (3) correspondent chacune à deux équations vectorielles qui ne doivent pas être développées (équation vectorielle de la résultante et équation vectorielle du moment).

Torseurs réciproques pour les chaînes C_1 , C_2 et C_3

Les torseurs réciproques à une chaîne cinématique peuvent être obtenus par l'intersection des torseurs réciproques associés à chacune des liaisons composant la chaîne.

On rappelle que dans le mécanisme assemblé, les chaînes C_1 et C_2 sont coplanaires. En particulier, \vec{z}_1 et \vec{z}_6 sont des vecteurs de ce plan commun.

Question 1.3.2 Trouver les torseurs unitaires de pas nul et de pas infini simultanément réciproques aux liaisons passives \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_5 . Cet ensemble de torseurs réciproques devra constituer une base quelle que soit la configuration du mécanisme. On note $\underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_j}$ chacun de ces torseurs à exprimer au point de réalisation le plus simple.

Question 1.3.3 Par un raisonnement analogue, trouver les torseurs unitaires de pas nul et de pas infini simultanément réciproques aux liaisons passives \mathcal{L}_6 et \mathcal{L}_{10} . Cet ensemble de torseurs réciproques devra constituer une base quelle que soit la configuration du mécanisme. On note $\underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_j}$ chacun de ces torseurs à exprimer au point de réalisation le plus simple.

Pour l'écriture du modèle cinématique complet du robot, on donne une famille de torseurs unitaires réciproques aux liaisons passives de la chaîne C_3 :

$$\underline{\mathcal{V}}_{C_3}^{r_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{z}_{13} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_{11}} \quad \underline{\mathcal{V}}_{C_3}^{r_2} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{x}_{13} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_{11}} . \quad (\text{Tors-1})$$

Les équations du modèle cinématique pour la chaîne C_i sont obtenues en effectuant le comoment de l'équation (i) avec la famille $\underline{\mathcal{V}}_{C_i}^{r_j}$ des torseurs unitaires réciproques à la chaîne C_i .

Modèle cinématique pour la chaîne C_1

Question 1.3.4 Écrire le système d'équations permettant de calculer la vitesse opérationnelle en fonction des seules vitesses articulaires \dot{q}_3 , \dot{q}_4 et \dot{p}_2 de la chaîne C_1 . Les résultats obtenus seront présentés sous leur **forme vectorielle** sans développer les produits vectoriels et scalaires.

Question 1.3.5 Écrire les équations précédentes sous la forme matricielle suivante :

$$J_q^1 \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = J_x^1 \begin{bmatrix} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \\ \vec{V}_{O_1, \mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \end{bmatrix}$$

où J_q^1 et J_x^1 représentent respectivement les matrices jacobiennes partielles en vitesses articulaires et vitesses opérationnelles de la chaîne C_1 .

Modèle cinématique pour la chaîne C_2

Question 1.3.6 Écrire le système d'équations permettant de calculer la vitesse opérationnelle en fonction des vitesses articulaires \dot{q}_8 , \dot{p}_7 et \dot{p}_9 de la chaîne C_2 . Les résultats obtenus seront présentés sous leur **forme vectorielle** sans développer les produits vectoriels et scalaires.

Question 1.3.7 Écrire les équations précédentes sous la forme matricielle suivante :

$$J_q^2 \dot{q}_8 = J_x^2 \begin{bmatrix} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \\ \vec{V}_{O_6, \mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \end{bmatrix}$$

où J_q^2 et J_x^2 représentent respectivement les matrices jacobiennes partielles en vitesses articulaires et vitesses opérationnelles de la chaîne C_2 .

Modèle cinématique pour la chaîne C_3

Question 1.3.8 Écrire le système d'équations permettant de calculer la vitesse opérationnelle en fonction des vitesses articulaires \dot{q}_{14} et \dot{q}_{15} de la chaîne C_3 . Utiliser pour cela les torseurs réciproques unitaires (Tors-1). Les résultats obtenus seront présentés sous leur **forme vectorielle** sans développer les produits vectoriels et scalaires.

Question 1.3.9 Écrire les équations précédentes sous la forme matricielle suivante :

$$J_q^3 \begin{bmatrix} \dot{q}_{14} \\ \dot{q}_{15} \end{bmatrix} = J_x^3 \begin{bmatrix} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \\ \vec{V}_{O_1, \mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \end{bmatrix}$$

où J_q^3 et J_x^3 représentent respectivement les matrices jacobiennes partielles en vitesses articulaires et vitesses opérationnelles de la chaîne C_3 .

Section 1.4 - Détermination des efforts aux articulations

L'objectif poursuivi dans cette section est d'évaluer les couples articulaires τ_3 , τ_4 , τ_8 , τ_{14} et τ_{15} nécessaires au maintien de l'équilibre du mécanisme lorsque la plate-forme est soumise à une action extérieure. La contribution des actions de pesanteur est négligée dans ce calcul de pré-dimensionnement. On rappelle que toutes les liaisons sont considérées comme parfaites.

Pour le traitement de cette partie, on adopte les notations matricielles suivantes :

✓ $\mathbf{V}_{R_f} = [\Omega_x \ \Omega_y \ \Omega_z \ v_x \ v_y \ v_z]^T$ représente la matrice colonne des composantes du torseur cinématique de la plate-forme dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_0 , exprimé au point O_f .

✓ $\mathbf{F} = [0 \ 0 \ 0 \ f_x \ f_y \ f_z]^T$ représente la matrice colonne des composantes du torseur des actions extérieures appliquées à la plate-forme. Ce torseur s'écrit : $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_f}$.

✓ \mathbf{z}_4 représente la matrice colonne des composantes du vecteur \vec{z}_4 .

L'ensemble de ces grandeurs matricielles sont exprimées dans un même repère de projection \mathcal{R}_P . La poursuite des calculs cinématiques sur les chaînes C_1, C_2, C_3 nécessite la projection dans \mathcal{R}_P des expressions vectorielles élaborées en section 1.3 et la composition de ces résultats intermédiaires conduit au modèle cinématique complet du mécanisme :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_q^1(O_f) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_q^2(O_f) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_q^3(O_f) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J_q(q)} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_8 \\ \dot{q}_{14} \\ \dot{q}_{15} \end{bmatrix}}_{\dot{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_x^1(O_f) \\ J_x^2(O_f) \\ J_x^3(O_f) \\ \mathbf{z}_4^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J_x(q)} \mathbf{V}_{R_f}.$$

où J_q et J_x représentent respectivement les matrices jacobiennes partielles en vitesses articulaires et vitesses opérationnelles du mécanisme. Dans les situations où le mécanisme n'est pas dans une configuration dite singulière, il est possible d'obtenir la matrice jacobienne du mécanisme par la relation

$$J(q) = \left(J_x(q) \right)^{-1} J_q(q).$$

Le calcul de $J(q)$ est d'une grande importance à la fois pour la conception du mécanisme, le choix des actionneurs, la commande du système et l'étude des efforts statiques.

Question 1.4.1 Écrire le théorème des puissances virtuelles appliqué au robot en équilibre statique soumis à un effort extérieur \vec{F} appliqué en O_f et aux actions motrices $\tau = [\tau_3 \quad \tau_4 \quad \tau_8 \quad \tau_{14} \quad \tau_{15}]^T$.

Le théorème sera formulé en écrivant toutes les grandeurs participantes sous leur forme matricielle. En déduire l'expression des couples articulaires τ .

Un calcul des couples articulaires sur un ensemble de configurations articulaires représentatif de l'espace de travail du robot a permis d'évaluer les valeurs moyenne et maximale ainsi que l'écart type des couples articulaires (en Nm) :

$$\tau_{\text{moyen}} = \begin{bmatrix} 0,47 \\ 0,27 \\ 1,07 \\ 1,88 \\ 0,95 \end{bmatrix}, \quad \tau_{\text{écart-type}} = \begin{bmatrix} 0,66 \\ 0,54 \\ 1,21 \\ 2,60 \\ 1,53 \end{bmatrix}, \quad \tau_{\text{max}} = \begin{bmatrix} -5,28 \\ -4,02 \\ -4,98 \\ -13,87 \\ -9,10 \end{bmatrix}.$$

Le choix des actionneurs s'est porté sur des moteurs piézo-électriques du type USR-30 de la société Shinsei et dont les principales caractéristiques figurent dans le tableau 1. Chaque moteur est associé à un unique type de réducteur à déterminer.

Question 1.4.2 Pour le type de moteur choisi, évaluer le rapport de réduction du réducteur à monter entre le robot et chaque moteur. On formulera précisément l'hypothèse retenue pour ce dimensionnement.

Tension d'alimentation	110 Vrms
Puissance nominale	1,3 W
Couple de maintien	0,1 Nm
Couple en fonctionnement	0,05 Nm
Couple maximal	0,1 Nm
Vitesse minimale	30 tr/min
Vitesse maximale	280 tr/min
Temps de réponse	15 ms
Temps de réponse en commutation de vitesse	1 ms
Courant en fonctionnement à plein régime	0,5 mA

TAB. 1 – Caractéristiques techniques du moteur USR-30.

Section 1.5 - Analyse d'une configuration spécifique

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au cas particulier d'un mouvement plan de l'aiguille ce qui correspond à un acte classique dans le cas de la radiothérapie. Nous allons de plus imposer que l'extrémité de l'aiguille se déplace de manière rectiligne. Lors de ce mouvement, le corps du patient sera supposé parfaitement fixe (ce qui correspond presque au cas attendu sachant que le robot est fixé sur le patient et suit donc les mouvements respiratoires de ce dernier).

Ce mouvement sera réalisé dans le plan de normale \vec{y}_0 passant par le point O_0 alors que le robot se trouve dans la configuration spécifique où \vec{y}_f reste colinéaire à \vec{y}_0 et où la droite (O_f, \vec{z}_f) est contenue dans le plan $(O_0, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$. Le modèle cinématique simplifié est proposé en annexe, figure 16. Le bras S_4 correspond aux chaînes C_1 et C_2 supposées parfaitement rigides par blocage des moteurs. L'extrémité K de l'aiguille se déplace verticalement sur une plaque définie par l'opération à effectuer.

Paramétrage des solides

Tous les repères associés aux solides sont supposés orthonormés directs. Toutes les liaisons du modèle d'étude sont des articulations parfaites.

- ✓ On associe au bâti S_0 le repère $\mathcal{F}_0 \equiv (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. On pose $\vec{OD} = L\vec{x}_0$.
- ✓ On associe au bras inférieur S_1 le repère $\mathcal{F}_1 \equiv (O, \vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1)$. On pose $\vec{OA} = e\vec{w}_1$. La masse de S_1 est négligée.
- ✓ On associe au bras supérieur S_2 le repère $\mathcal{F}_2 \equiv (A, \vec{u}_2, \vec{v}_2, \vec{w}_2)$. On pose $\vec{AB} = e\vec{w}_2$. La masse de S_2 est négligée.
- ✓ On associe au plateau porte-aiguille S_3 le repère $\mathcal{F}_3 \equiv (B, \vec{u}_3, \vec{v}_3, \vec{w}_3)$. On pose $\vec{BC} = a\vec{u}_3 + b\vec{w}_3$ et $\vec{KC} = c\vec{u}_3 + d\vec{w}_3$. Le centre de gravité du plateau porte-aiguille est noté G_3 tel que $\vec{BG}_3 = x_{G_3}\vec{u}_3 + z_{G_3}\vec{w}_3$. On note m_3 la masse du plateau porte-aiguille S_3 supposée concentrée en G_3 .
- ✓ On modélise l'ensemble des chaînes C_1 et C_2 par un bras S_4 coïncidant avec le segment CD . On associe à S_4 le repère $\mathcal{F}_4 \equiv (D, \vec{u}_4, \vec{v}_4, \vec{w}_4)$. Le centre de gravité de S_4 est noté G_4 tel que $\vec{DG}_4 = z_{G_4}\vec{w}_4$. On note m_4 la masse de S_4 . On pose $\vec{DC} = h\vec{w}_4$.

Le point K se déplace verticalement en quasi-statique (succession de positions d'équilibre) : on paramètre sa position par le vecteur $\overrightarrow{OK} = H\vec{x}_0 + z\vec{z}_0$.

Paramétrage des liaisons

On associe à chaque liaison un paramètre angulaire d'orientation. Comme les liaisons sont des articulations, on définit les paramètres angulaires de la manière suivante :

$$\alpha = (\vec{z}_0, \vec{w}_1) = (\vec{x}_0, \vec{u}_1), \quad \beta = (\vec{w}_1, \vec{w}_2) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2), \quad \delta = (\vec{w}_2, \vec{w}_3) = (\vec{u}_2, \vec{u}_3), \\ \theta = (\vec{w}_3, \vec{w}_4) = (\vec{u}_3, \vec{u}_4), \quad \varepsilon = (\vec{z}_0, \vec{w}_3) = (\vec{x}_0, \vec{u}_3), \quad \varphi = (\vec{z}_0, \vec{w}_4) = (\vec{x}_0, \vec{u}_4).$$

Modélisation des actions mécaniques extérieures

Deux motoréducteurs d'entraînement identiques sont placés d'une part entre les bras S_1 et S_2 , et d'autre part, entre le bras S_2 et le plateau porte-aiguille S_3 afin de mouvoir le système. Ces motoréducteurs sont modélisés par un stator de masse négligeable fixé sur la pièce amont et un rotor de masse m fixé à la pièce aval. Ainsi, on a une masse ponctuelle m sur S_2 en A et une autre masse ponctuelle m sur S_3 en B.

Outre l'action mécanique de guidage, les rotors des motoréducteurs exercent sur les stators des actions mécaniques assimilables à des couples purs qui seront notés :

- $C_{12} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{y}_0$ pour le motoréducteur placé entre S_1 et S_2 ;
- $C_{23} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_B(S_2 \rightarrow S_3) \cdot \vec{y}_0$ pour le motoréducteur placé entre S_2 et S_3 .

L'action mécanique des éléments corporels sur l'aiguille est modélisée par un glisseur en K de résultante $\vec{F} = F_u\vec{u}_3 + F_w\vec{w}_3$.

On pose $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ avec g l'accélération de la pesanteur (supposée connue).

Question 1.5.1 Tracer les figures de calcul (dites aussi de position) correspondant au paramétrage proposé et donné par les angles $\alpha, \beta, \delta, \theta, \varphi$ et ε .

Question 1.5.2 Tracer le graphe des liaisons et des actions mécaniques du modèle d'étude proposé.

Question 1.5.3 Déterminer le degré d'hyperstaticité de ce modèle bidimensionnel.

Question 1.5.4 Écrire la fermeture linéaire sur la boucle $S_0 - S_1 - S_2 - S_3 - S_0$, puis en déduire les deux équations scalaires obtenues par projection de cette relation vectorielle sur les vecteurs \vec{x}_0 et \vec{z}_0 . Écrire la fermeture angulaire sur cette boucle.

Question 1.5.5 Mêmes questions sur la boucle $S_0 - S_3 - S_4 - S_0$.

Question 1.5.6 Déterminer par un raisonnement géométrique le nombre de solutions d'assemblage du mécanisme réalisables à l'aide des deux motoréducteurs en A et B pour atteindre une configuration imposée à l'aiguille (solide S_3).

Pour la suite du problème, on imposera $\beta > 0$.

On souhaite déterminer les expressions des couples C_{12} et C_{23} en sortie des motoréducteurs en fonction des masses m_3, m_4 et m , de l'accélération de la pesanteur g , des efforts F_u et

F_w , de la géométrie (longueurs) et des angles et correspondant aux positions angulaires des arbres des motoréducteurs.

Question 1.5.7 Proposer une démarche de résolution permettant de déterminer efficacement les expressions de ces deux couples : on indiquera avec précision les isolements, les théorèmes utilisés, etc.

Question 1.5.8 Mettre en œuvre cette démarche de calcul et déterminer les expressions de C_{12} et C_{23} en fonction des données : on fera intervenir le minimum de données angulaires en utilisant les expressions issues des fermetures géométriques obtenues aux questions 1.5.4 et 1.5.5.

Question 1.5.9 On rappelle que $\beta > 0$: existe-t-il une position pour laquelle un de ces deux couples est nul ? si oui, indiquer laquelle, sinon indiquer pourquoi et conclure.

On peut observer que pour ce type d'architecture mécanique construite à partir de liaisons pivots, la génération d'une trajectoire rectiligne dans l'espace opérationnel nécessite la commande coordonnée des motoréducteurs selon des lois d'évolutions non triviales. On peut également vérifier que sur l'ensemble du domaine de travail atteignable du robot les couples articulaires moteurs connaissent des variations importantes. Le dimensionnement définitif des motoréducteurs peut être fait grâce au modèle cinématique présenté en section 1.4.

Partie 2 - Mécanique des solides déformables

Dans sa version actuelle, les différents segments du **CT-Bot** ont été réalisés par frittage de poudre métallique. Comme il est précisé dans le cahier des charges, les matériaux métalliques doivent être évités dans le plan de coupe de l'imageur. Le but de cette partie est donc d'étudier la possibilité de réaliser les segments du robot en matière non métallique. Pour cela, il est nécessaire de contrôler la tenue sous charge des segments pour les efforts de liaisons (calculés dans la première partie) et pour les efforts générés par le montage des moyeux. Seul le comportement des segments au montage sera étudié dans cette partie.

Les conditions de montage des segments du robot s'apparentent à un chargement appliqué à un composant ayant la forme d'un cylindre creux à paroi épaisse. On se propose de construire, dans un premier temps, le modèle analytique de calcul des contraintes et déformations d'un tel composant. Ces résultats seront ensuite appliqués aux conditions de montage des segments du robot.

Dans un second temps, on se propose de préciser la mise en données d'un modèle de simulation numérique par la méthode des éléments finis et de faire l'analyse comparative des résultats de simulation avec ceux obtenus à partir du modèle analytique simplifié.

Section 2.1 - Étude préliminaire

On considère une enveloppe cylindrique épaisse, homogène, isotrope, d'axe (O, \vec{e}_z) , de longueur l , de diamètre intérieur $2a$, de diamètre extérieur $2b$, soumise à l'action d'une pression intérieure p_i et d'une pression extérieure p_e , uniformément réparties sur les surfaces latérales (voir figure 1). L'enveloppe n'est pas chargée axialement.

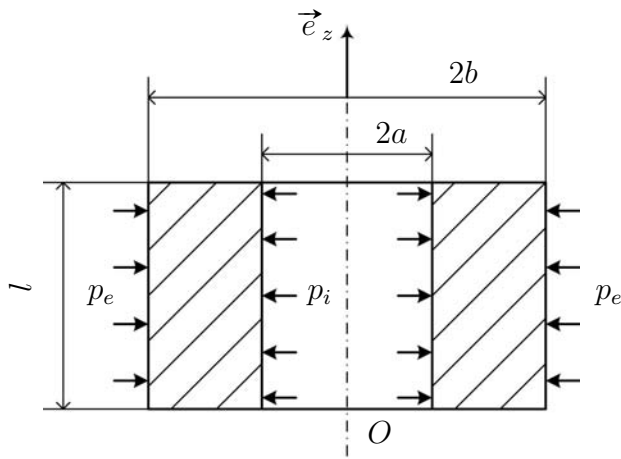


FIG. 1 – Chargement d'un cylindre creux à paroi épaisse.

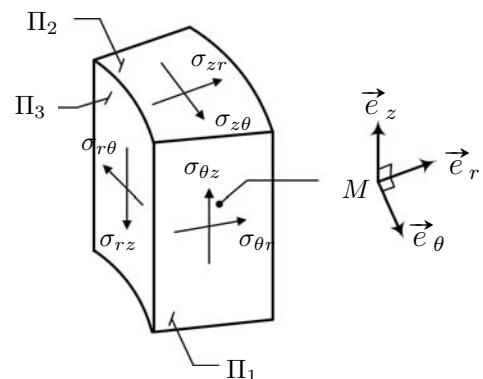


FIG. 2 – Contraintes autour de M .

On définit, dans le système de coordonnées cylindriques représenté par le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$,

le champ de déplacement d'un point matériel M de cette enveloppe par

$$\vec{u}(M) = u \vec{e}_r + v \vec{e}_\theta + w \vec{e}_z.$$

On note (r, θ, z) les coordonnées du point M dans ce système. Les matrices représentatives des tenseurs des contraintes et des déformations sont notées

$$\left[\overline{\overline{\sigma}} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)}, \quad \left[\overline{\overline{\varepsilon}} \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\theta} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)}.$$

Les glissements et les extensions s'expriment de la manière suivante dans le système de coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}, & 2\varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}, & 2\varepsilon_{rz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned}$$

On suppose que les sections droites restent planes et que le déplacement radial u ainsi que les contraintes normales σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ ne dépendent que de r .

Question 2.1.1 Compte tenu des symétries du problème (géométrie et sollicitation), définir les hypothèses cinématiques.

Question 2.1.2 À l'aide du volume élémentaire défini figure 2 montrer que le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est un repère principal d'inertie et caractériser l'état de contrainte.

On suppose que le matériau possède un comportement élastique linéaire. On note E et ν respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau. Les coefficients de Lamé λ et μ sont tels que

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Question 2.1.3 Écrire, sous forme tensorielle puis sous forme scalaire, les relations de comportement relatives à ce problème. Montrer que l'expression du déplacement u , d'un point M situé à une distance r de l'axe de révolution porté par $(0, \vec{e}_z)$, est de la forme

$$u(r) = \frac{K}{r} + \widetilde{K}r$$

où K et \widetilde{K} sont deux constantes.

Question 2.1.4 Définir les contraintes normales σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de r , E , ν , K et \widetilde{K} .

Question 2.1.5 À l'aide des conditions aux limites sur les surfaces latérales, définir le système d'équations linéaires permettant de déterminer les constantes K et \widetilde{K} .

Question 2.1.6 Exprimer les constantes K et \tilde{K} en fonction de p_i , p_e , a , b , E et de ν .

Question 2.1.7 Donner l'expression des contraintes normales σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de a , b , p_e , p_i et r .

Question 2.1.8 Montrer que σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont des fonctions linéaires de $\frac{1}{r^2}$.

Question 2.1.9 Donner une interprétation graphique de l'évolution des contraintes normales σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ dans le cas général d'un serrage d'un moyeu puis dans le cas général d'un serrage d'un arbre.

Question 2.1.10 Déterminer le déplacement radial u en fonction a , b , E , ν et r .

Section 2.2 - Application au montage des segments du robot

Les cinq motoréducteurs sont montés au niveau des liaisons grâce à des moyeux expansibles (voir figure 3). Les données constructeur stipulent que le couple de serrage de l'écrou doit être de 14,1 Nm. Dans ces conditions, la pression exercée sur l'alésage vaut 35 MPa.

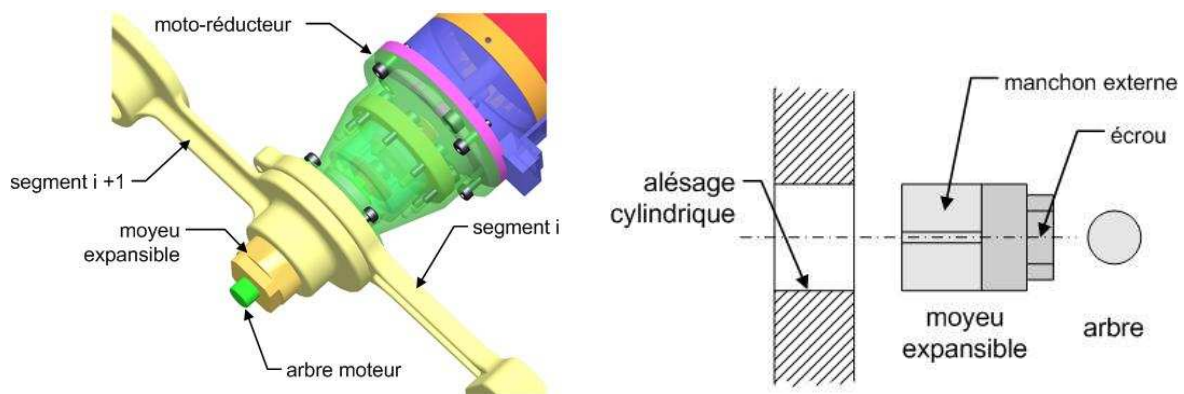


FIG. 3 – Moyeu expansible.

Dans un premier temps, on assimile l'extrémité d'un segment à un cylindre creux à paroi épaisse de rayon intérieur a et de rayon extérieur b . On suppose que les segments sur lesquels sont montés les moyeux sont homogènes et isotropes et qu'ils sont simplement soumis au chargement induit par les conditions de montage. On suppose également qu'ils répondent à la loi de Hooke généralisée.

Question 2.2.1 Exprimer les contraintes normales et le déplacement d'un point M de l'extrémité du segment.

On souhaite étudier les conditions de résistance de l'extrémité d'un segment sur lequel est monté un moyeu expansible. Pour cela, on utilise le critère de Von Mises. On note σ_{vm} la contrainte équivalente de Von Mises et σ_{limite} la contrainte limite à ne pas dépasser.

Question 2.2.2 Écrire le critère de Von Mises en précisant la définition de la contrainte σ_{vm} en fonction des contraintes principales dans la pièce au point considéré.

Question 2.2.3 Exprimer la contrainte σ_{vm} , en un point M situé à une distance r de l'axe du moyeu expansible, en fonction de p_i , a et b .

Question 2.2.4 Calculer les valeurs maximales de σ_{vm} et $u(r)$ en fonction de p_i , a et b . Déterminer numériquement la valeur maximale de σ_{vm} sachant que $a = 8$ mm et $b = 11$ mm.

Question 2.2.5 Définir la contrainte limite sachant que le calcul ne prend pas en compte l'augmentation de contraintes due à l'effet d'encastrement aux extrémités de la portée.

Section 2.3 - Modèle numérique

En complément du modèle analytique, on souhaite construire un modèle numérique permettant de vérifier le comportement des segments lors du montage des moyeux expansibles. On souhaite réaliser le modèle numérique à l'aide d'un logiciel de calcul par éléments finis. Pour cela on dispose d'un modèle CAO complet des motoréducteurs assemblés aux segments (voir figure 3).

Question 2.3.1 Présenter le choix de(s) pièce(s) étudiée(s) support pour la réalisation du maillage. Justifier votre choix.

Avant de réaliser le maillage de(s) pièce(s) choisie(s), il est classique de procéder à certaines modifications de la géométrie étudiée. Ces modifications sont effectuées dans le but soit d'introduire facilement les conditions aux limites et le chargement soit de simplifier les opérations de maillage et d'améliorer ainsi la qualité des résultats.

Question 2.3.2 Quelle(s) modification(s) du modèle CAO peut-on faire avant de réaliser le maillage.

Question 2.3.3 Définir la topologie des éléments finis les plus appropriés pour mener le calcul.

Question 2.3.4 Présenter les conditions limites et chargement appliqués à la géométrie choisie (nature et localisation). Sachant qu'il n'existe de solution que si la structure possède suffisamment de conditions limites pour empêcher les mouvements d'ensemble, préciser comment éliminer ces modes rigides.

Question 2.3.5 Définir la loi de comportement la plus appropriée. Quelles sont les caractéristiques à renseigner pour mener le calcul ?

Question 2.3.6 Quel type de résolution peut-on choisir ?

Les calculs ont été menés sur un logiciel commercial où l'ensemble des étapes définies précédemment a pu être contrôlé pas à pas. Les cartographies de la contrainte équivalente de

Von Mises et du déplacement sur l'extrémité du segment sont représentés respectivement figure 18 et 19. Le matériau choisi est un acier standard allié.

Question 2.3.7 Analyser la répartition de la contrainte équivalente de Von Mises sur la géométrie sélectionnée. On constate que la contrainte maximale de Von Mises est égale à 136 MPa. Comparer cette valeur à celle obtenue par le modèle analytique.

Question 2.3.8 Indiquer l'influence du matériau sur le champ de la contrainte équivalente de Von Mises.

Question 2.3.9 Analyser les déplacements de la géométrie sélectionnée.

Le tableau 2 montre les résultats numériques obtenus pour trois matières différentes :

- ✓ acier standard ;
- ✓ polyamide (PA) chargé de 80% de poudre céramique ;
- ✓ polyamide 66 (PA66) chargé de 30% de fibres de verre courtes

	$\max \sigma_{\text{vm}}$ (MPa)	$\max \ \vec{u}\ $ (mm)	$\max \varepsilon_{\text{I}}$ (%)	σ_{e} (MPa)
Acier : $\begin{cases} E = 200 \text{ GPa} \\ \nu = 0,3 \end{cases}$	136	0,02	0,06	1000
PA chargé 80% poudre céramique : $\begin{cases} E = 60 \text{ GPa} \\ \nu = 0,45 \end{cases}$	136	0,07	0,21	500
PA 66 chargé 30% fibres de verre : $\begin{cases} E = 25 \text{ GPa} \\ \nu = 0,35 \end{cases}$	136	0,17	0,5	215

TAB. 2 – Comparaison entre différents matériaux.

Les pièces en polymères chargés peuvent être obtenues par le procédé d'injection (voir partie 3). La présence de fibres de verre confère aux pièces injectées des propriétés locales anisotropes. Le calcul de dimensionnement a été réalisé à l'aide de propriétés mécaniques moyennes (E et ν).

Question 2.3.10 Discuter le choix des matériaux possibles pour satisfaire aux conditions de montage des moyeux expansibles. Quel(s) matériau(x) peut-on retenir en vue de réaliser les segments du **CT-Bot**.

Partie 3 - Mécanique des fluides

La conception des pièces plastiques est un processus complexe pour lequel il existe un fort couplage entre les propriétés attendues du produit conçu, les paramètres du procédé de fabrication et les paramètres produit.

Nous allons étudier dans cette partie la fabrication par injection des segments du robot. Rappelons que le cycle physique de transformation de la matière plastique au cours du moulage par injection comprend essentiellement quatre phases :

- ★ la **plastification** - les granulés de polymères solides sont cisailés, fondus puis transportés par une vis de plastification en entrée du moule d'injection.
- ★ le **remplissage** de l'empreinte elle-même contenue dans le moule - il y a progression d'une surface, le front de matière, dans une cavité de forme complexe. On suppose que l'écoulement s'effectue à débit constant.
- ★ le **maintien** et le **refroidissement** - une pression (de maintien) est appliquée à partir du seuil d'injection pendant que le polymère refroidit grâce aux parois du moule régulées en température.
- ★ l'**éjection** de la pièce moulée - lorsque la température de la pièce a atteint en tout point une température dite d'éjection, le moule s'ouvre et la pièce est éjectée.

Les différentes phases de transformation par injection conditionnent non seulement l'aspect mais aussi les propriétés mécaniques des pièces moulées. Nous allons étudier dans cette section la faisabilité des jambes du robot en matière plastique.

Section 3.1 - Écoulement 3D non newtonien

Le comportement des fluides non newtoniens, tels que les plastiques en écoulement dans une empreinte, est régi par un système d'équations différentielles traduisant des bilans de conservation de la masse, quantité de mouvement, quantité de chaleur et la loi de comportement.

On note (x, y, z) (coordonnées cartésiennes) et t (temps) les variables indépendantes. Les variables dépendantes ρ (masse volumique), \vec{v} (vecteur vitesse), $\bar{\sigma}$ (tenseur des contraintes) et T (température) satisfont les équations de conservation suivantes :

⇒ *Équation de continuité*

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (2)$$

⇒ *Équations du mouvement*

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma} \quad (3)$$

⇒ *Équation de la chaleur*

$$\rho \frac{de}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot (-k \vec{\nabla} T) + T \beta \frac{dp}{dt} + \phi_v \quad (4)$$

Le vecteur \vec{f} représente les actions volumiques extérieures. Les fonctions e et ϕ_V désignent respectivement l'énergie interne spécifique et la puissance des efforts internes par unité de volume. On note c_p la capacité calorifique à pression constante telle que $e = c_p T$. Le coefficient k symbolise la conductivité thermique du matériau. Enfin, le terme $T\beta \frac{dp}{dt}$ représente le travail adiabatique réversible. Notons que ce terme est négligeable en écoulement incompressible.

Par ailleurs, on définit le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ en fonction de la pression au sein du fluide et du tenseur des extra-contraintes $\bar{\tau}$ par la relation :

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + \bar{\tau}$$

Le tenseur des taux de déformations, noté \bar{D} , est quant à lui défini de la manière suivante :

$$\bar{D} = \frac{1}{2} \left(\overline{\nabla} \vec{v} + \overline{\nabla}^T \vec{v} \right)$$

⇒ La loi de comportement, qui relie contraintes et déformations s'écrit dans le cas d'un fluide non newtonien purement visqueux :

$$\bar{\tau} = 2\eta\bar{D} - \frac{2}{3}\eta(\overline{\nabla} \cdot \vec{v})\bar{I} \quad (5)$$

où η représente la viscosité dynamique du fluide et \bar{I} le tenseur identité. Ici, η dépend des conditions d'écoulement (cisaillement) et de la température du fluide.

Les opérateurs classiques gradient³, divergence et laplacien sont notés :

$\overline{\nabla} \cdot$ = divergence d'un vecteur ou d'un tenseur

$\vec{\nabla}$ = gradient d'une fonction

$\overline{\nabla}$ = gradient d'un vecteur

Δ = laplacien d'une fonction ou d'un vecteur

Question 3.1.1 Quelles sont les inconnues scalaires et équations disponibles pour décrire un écoulement non newtonien purement visqueux et incompressible ? On rappelle qu'un écoulement est dit incompressible lorsque la masse volumique ρ est considérée constante.

Question 3.1.2 Pendant la phase de remplissage des empreintes d'un moule, on peut considérer que l'écoulement est incompressible. Que deviennent les équations (2) et (3) ? Écrire ces équations en fonction uniquement des variables dépendantes p et \vec{v} .

Question 3.1.3 Bien que les débits d'écoulements soient élevés (plusieurs centaines de cm^3/s) pendant la phase de remplissage d'une empreinte, l'effort de pesanteur et les effets dynamiques peuvent être négligés devant les forces de viscosité. C'est une hypothèse courante pour les écoulements confinés⁴ de polymères. Que devient dans ce cas l'équation de conservation de la quantité de mouvement (3) ?

³L'opérateur $\overline{\nabla}^T$ désigne l'opérateur gradient transposé.

⁴Écoulements dans un espace fermé.

La puissance développée par les efforts internes par unité de volume ϕ_V est égale au double produit contracté (noté $:$) du tenseur des contraintes par le tenseur des taux de déformations. On a

$$\begin{aligned}\phi_V &= \bar{\sigma} : \bar{D} \\ \Leftrightarrow \phi_V &= \sum_{i,j} \sigma_{ij} \cdot \mathcal{D}_{ij}\end{aligned}$$

On note $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement généralisé. Il est fonction du deuxième invariant du tenseur des taux de déformations et s'écrit

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 \sum_{i,j} \mathcal{D}_{ij}^2}$$

Question 3.1.4 Calculer la puissance ϕ_V en fonction de p , \vec{v} et $\dot{\gamma}$ pour un fluide purement visqueux. Que devient cette puissance lorsque l'écoulement est supposé incompressible.

Question 3.1.5 Écrire l'équation d'énergie (4) en fonction T , \vec{v} et $\dot{\gamma}$ lorsque l'écoulement est supposé incompressible.

Section 3.2 - Écoulement de Poiseuille plan

Écoulement de Poiseuille plan newtonien

Nous allons évaluer la pression nécessaire au remplissage des empreintes en supposant l'écoulement plan, stationnaire et incompressible. On suppose également que le problème thermique est découplé du problème dynamique.

Considérons un fluide en écoulement entre deux plaques fixes représentant les parois du moule et distantes d'un entrefer h (voir figures 4 et 5).

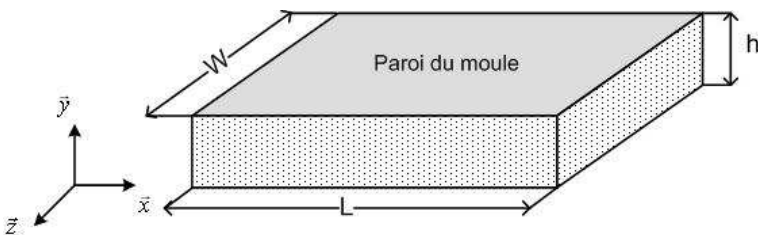


FIG. 4 – Dimensions de l'écoulement.

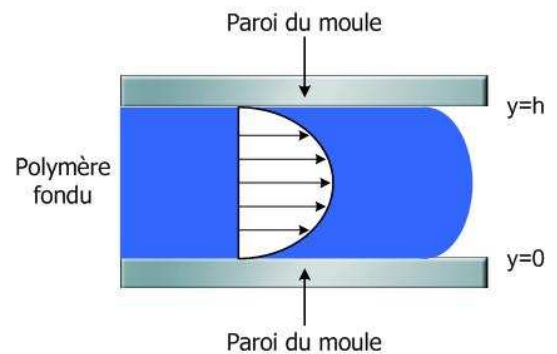


FIG. 5 – Écoulement dans une empreinte.

La rapport h/W est tel ($< 0,1$) que l'on peut supposer l'écoulement non perturbé par la présence de parois latérales. On suppose qu'il n'y a pas de glissement aux parois du moule. L'écoulement est régi par la perte de charge ΔP constante entre l'entrée ($x = 0$) et l'extrémité de l'empreinte ($x = L$).

Question 3.2.1 Définir les hypothèses cinématiques pour un écoulement de Poiseuille plan. On note u , v et w les composantes de la vitesse \vec{v} en un point (x, y, z) .

Question 3.2.2 Écrire les équations (2) et (3) pour un écoulement de Poiseuille plan et pour un fluide newtonien de viscosité η_0 .

Question 3.2.3 Calculer le profil de la vitesse dans la veine fluide.

Question 3.2.4 Calculer le débit volumique Q et en déduire l'expression de la perte de charge ΔP en fonction des données du problème.

On suppose que le polymère retenue en partie 2 (i.e satisfaisant aux critères de rigidité et de résistance des segments) possède une viscosité équivalente newtonienne égale à 200 Pa.s à la température d'injection.

Question 3.2.5 Calculer la pression nécessaire pour remplir une pièce d'épaisseur 2,5 mm, de largeur 3,2 cm et de longueur 10 cm et pour un débit $Q = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$.

Écoulement de Poiseuille plan non newtonien

Nous souhaitons prendre en compte le comportement rhéofluidifiant du polymère en écoulement c'est à dire la dépendance de la viscosité η en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. On suppose maintenant que la viscosité obéit à la loi d'Ostwald suivante

$$\eta(\dot{\gamma}) = K\dot{\gamma}^{n-1}.$$

Les indices K et n sont des constantes caractéristiques du polymère à l'état fondu. Le coefficient n est appelé indice de plasticité ($n \in [0, 1]$) et K consistance.

Question 3.2.6 Calculer le taux de cisaillement généralisé pour un écoulement de Poiseuille plan (voir figures 4 et 5). En déduire la matrice représentative des contraintes lorsque le fluide suit la loi d'Ostwald.

Question 3.2.7 Écrire les équations (3) pour un fluide obéissant à la loi d'Ostwald en écoulement de Poiseuille plan. En déduire l'expression de la vitesse en fonction de ΔP , K , n , L , h et y .

Question 3.2.8 Montrer que le débit volumique vaut

$$Q = \frac{n}{2(2n+1)} Wh^{(1+2n)/n} \left(\frac{\Delta P}{2KL} \right)^{1/n}.$$

La viscosité du polymère sélectionné en partie 2 suit en fait une loi d'Ostwald telle que $K = 7500 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ et $n = 0,31$ à la température d'injection.

Question 3.2.9 Calculer la pression nécessaire pour remplir une pièce d'épaisseur 2,5 mm, de largeur 3,2 cm et de longueur 10 cm et pour un débit $Q = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$. Commenter le résultat.

Section 3.3 - Recherche des paramètres d'injection optimum

Au cours de la phase de remplissage le polymère au contact des parois du moule se refroidit et crée une zone solidifiée appelée *gaine solide*. En réalité, l'écoulement s'effectue dans une zone de hauteur réduite \tilde{h} . On note e l'épaisseur de polymère solidifié (voir figure 6).

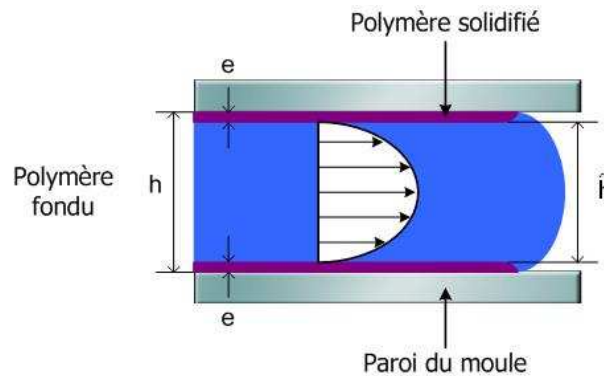


FIG. 6 – Écoulement réel dans une empreinte.

Il est possible de montrer que l'épaisseur de la gaine solide est fonction du temps de remplissage t_r telle que

$$e = \sqrt{at_r}$$

où a représente la diffusivité thermique du polymère c'est à dire $a = \frac{k}{\rho c_p}$.

Question 3.3.1 Définir la nouvelle perte de charge ΔP , toujours pour un écoulement plan de type Poiseuille et pour un fluide suivant une loi d'Ostwald, en tenant compte de l'existence d'une gaine solide. On note x la longueur réelle de la gaine solide (dans le sens d'écoulement). Exprimer ΔP en fonction de x , h , n , K , a et t_r .

Question 3.3.2 Calculer ΔP sachant que le polymère étudié possède une diffusivité thermique $a = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$. On suppose que la gaine solide est présente sur toute la longueur de l'empreinte.

Question 3.3.3 Exprimer, pour un fluide suivant la loi d'Ostwald, le taux de cisaillement et la contrainte de cisaillement à la paroi du moule en fonction de ΔP , K , n , h , e et L . Montrer que cette dernière est indépendante de la loi de comportement choisie.

Question 3.3.4 Le fournisseur matière préconise de ne pas cisailier le polymère en écoulement au delà de 50000 s^{-1} et de 0,3 MPa. Ces préconisations sont-elles respectées?

La figure 7 représente la variation de la pression d'injection en fonction du temps de remplissage d'une pièce injectée de géométrie quelconque.

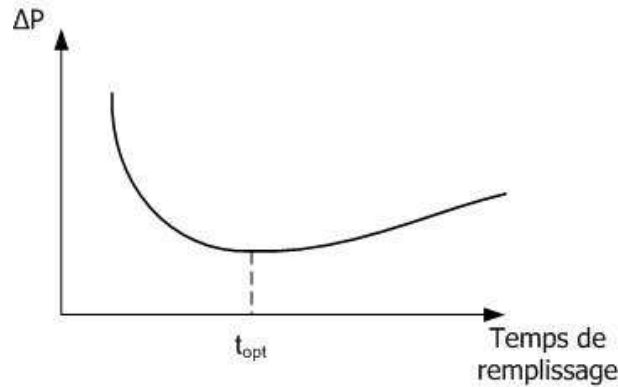


FIG. 7 – Pression d’injection en fonction du temps de remplissage.

Question 3.3.5 Commenter cette courbe et définir le temps optimum de remplissage t_{opt} correspondant à la pression d’injection minimum en fonction de h , a et n dans le cas d’une empreinte de section rectangulaire.

Question 3.3.6 Déterminer le temps d’injection optimum et la pression d’injection optimum pour remplir une empreinte de longueur 10 cm, de largeur 3,2 cm et d’épaisseur 2,5 mm.

La figure 20 représente le maillage d’un segment du robot et le champ de pression de l’empreinte totalement remplie. Le polymère choisi est celui sélectionné en partie 2. L’épaisseur moyenne de la cavité est h , sa longueur L et son volume égale à $L \times W \times h$. Le temps total d’injection est égale à t_{opt} calculé à la question précédente.

Question 3.3.7 Commenter le résultat présenté figure 21.

Section 3.4 - Refroidissement et déformation d’une pièce injectée

Lorsque le seuil d’injection est gelé (entrée de l’écoulement dans l’empreinte), la phase de refroidissement se poursuit sans qu’aucune pression ne soit appliquée au sein du fluide. On suppose qu’à partir de cet instant, noté t_0 , le polymère dans l’empreinte est immobile. On suppose également que la diffusivité thermique du polymère est constante.

Question 3.4.1 Écrire l’équation (4) lorsque l’empreinte est remplie, à partir de t_0 dans la cavité de dimension $L \times W \times h$.

On note T_M la température du moule (maintenue constante au cours du temps) et T_I la température du fluide au seuil d’injection. Le temps d’injection est tel que l’on peut supposer qu’en fin de remplissage la température dans la cavité est uniforme et égale à T_I . Dans ces conditions, il est possible de déterminer la solution de l’équation (4) au centre de la pièce :

$$\frac{T_M - T(h/2, t)}{T_M - T_I} = \frac{8}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2 at}{h^2}\right)$$

Question 3.4.2 Calculer le temps de refroidissement, t_{ref} , temps au bout duquel l'écart de température du polymère a chuté d'au moins 50% en tout point de la pièce injectée.

On se propose d'utiliser la méthode des différences finies pour approcher le champ de température d'une plaque de faible épaisseur initialement à la température T_I et soumis à la température T_M aux parois.

Question 3.4.3 Proposer une discrétisation de l'équation différentielle (4) et ses conditions aux limites et écrire le système linéaire associé.

La pièce est éjectée du moule à la température supposée uniforme T_E . La température T_S de solidification du matériau est supérieure à T_E et est atteinte au cours du refroidissement dans le moule. On suppose qu'en dessous de T_S le polymère se comporte comme un solide élastique isotrope. On note E le module d'Young, ν le coefficient de Poisson et α le coefficient de dilatation du polymère.

Question 3.4.4 Écrire la loi de comportement reliant le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ et le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$ de la pièce solide.

Question 3.4.5 En supposant que le contact entre le polymère et la cavité est collant, calculer les contraintes et les déformations dans la pièce juste avant son éjection du moule.

Après éjection du moule, la pièce subit un refroidissement libre. Notons T_A la température ambiante et h_T le coefficient de transfert thermique du polymère.

Question 3.4.6 Écrire l'équation de la chaleur (4) et les conditions aux limites permettant de décrire le refroidissement libre d'une plaque de dimension $L \times W \times h$ initialement à la température T_E .

Question 3.4.7 La figure 22 présente les déformations de la pièce après éjection des empreintes et refroidissement à l'air libre. Le matériau étudié est toujours celui choisi dans la partie 2. Commenter ce résultat et discuter le choix du matériau.

Annexes

Annexe 1 - Figures

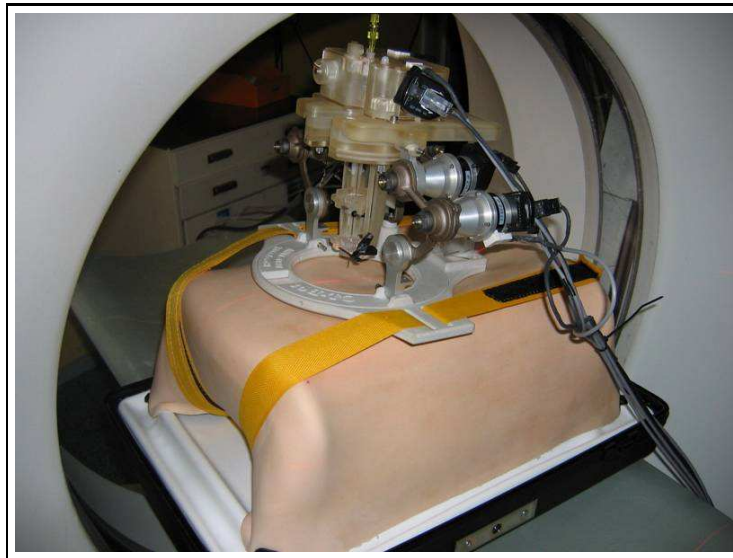


FIG. 8 – Position du robot sur un mannequin.

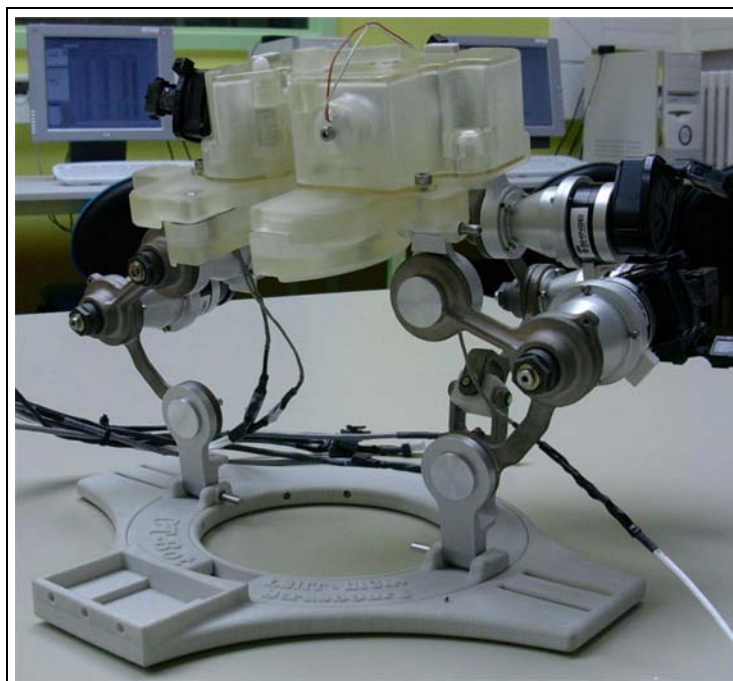


FIG. 9 – Prototype du CT-Bot.

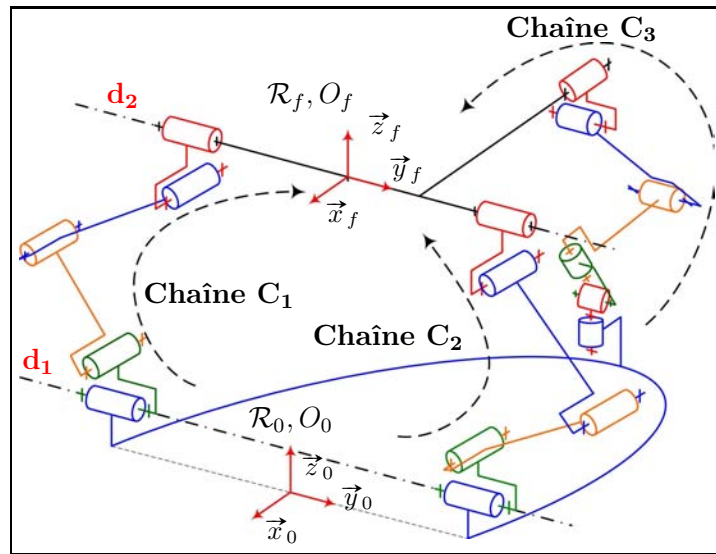


FIG. 10 – Schéma cinématique du robot.

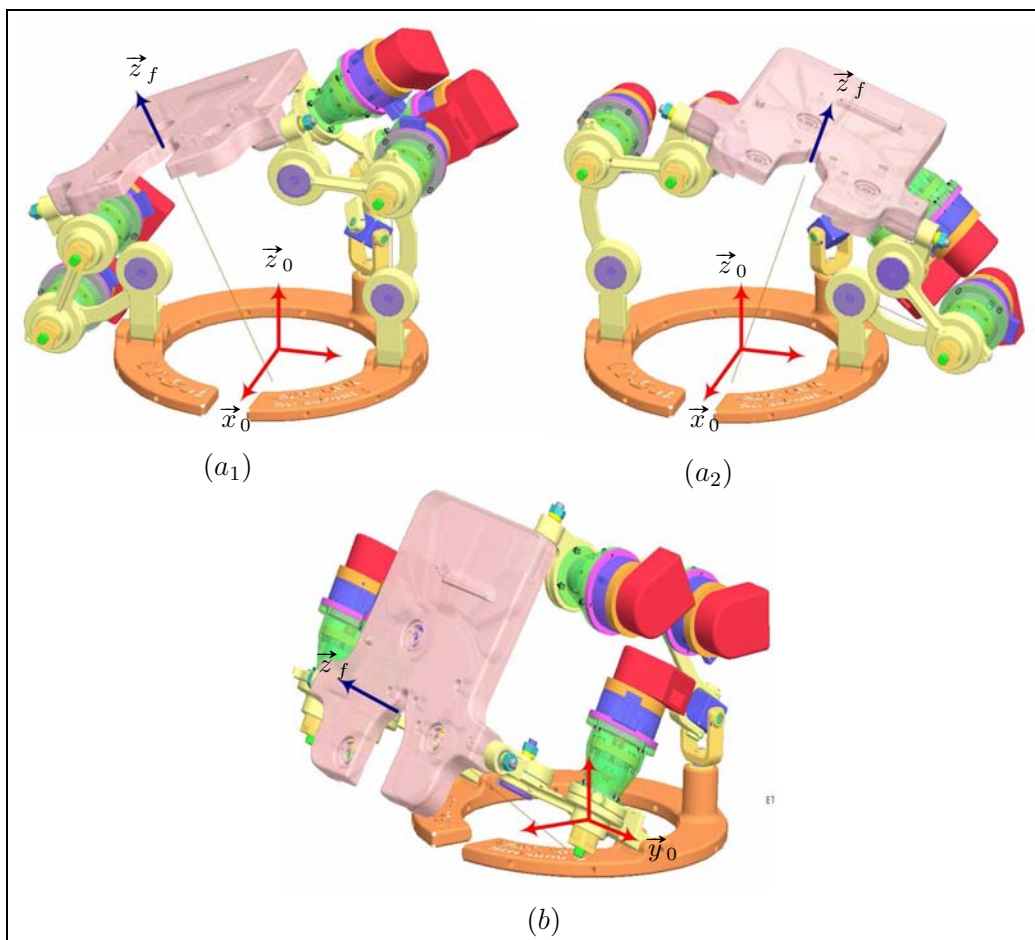


FIG. 11 – Débattements du CT-Bot.

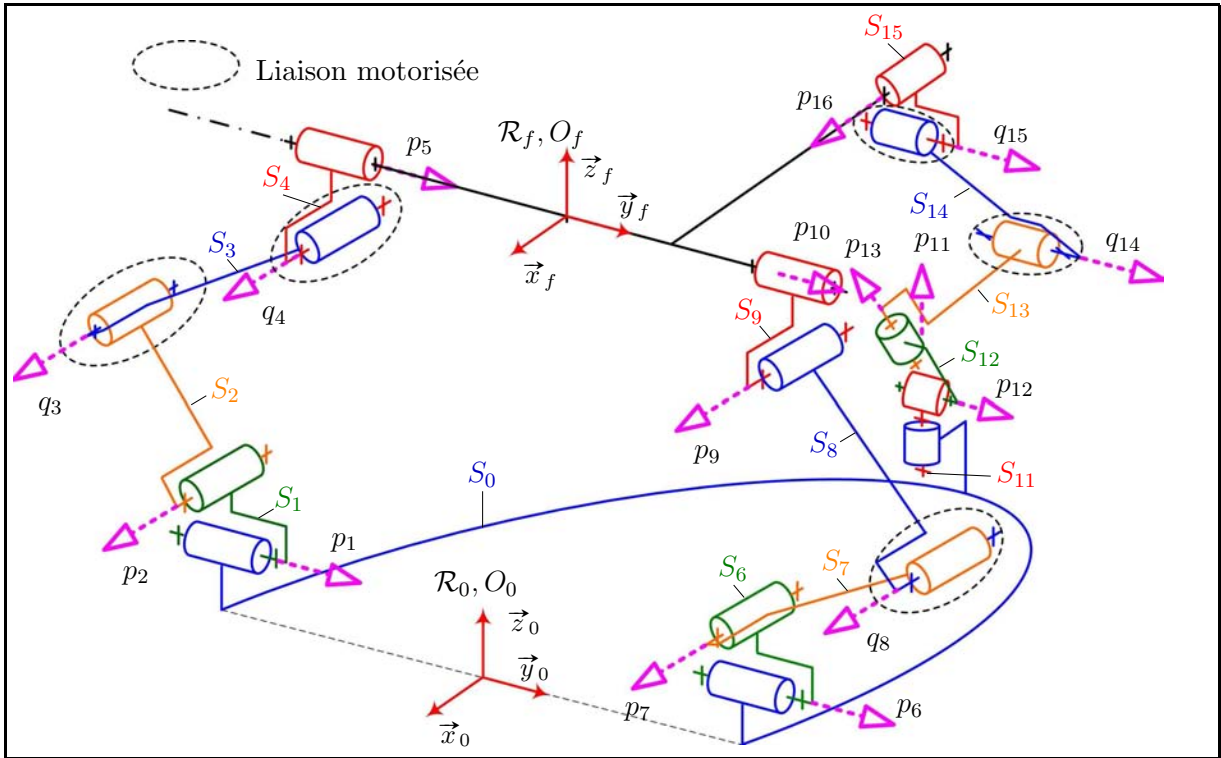


FIG. 12 – Paramétrage du CT-Bot.

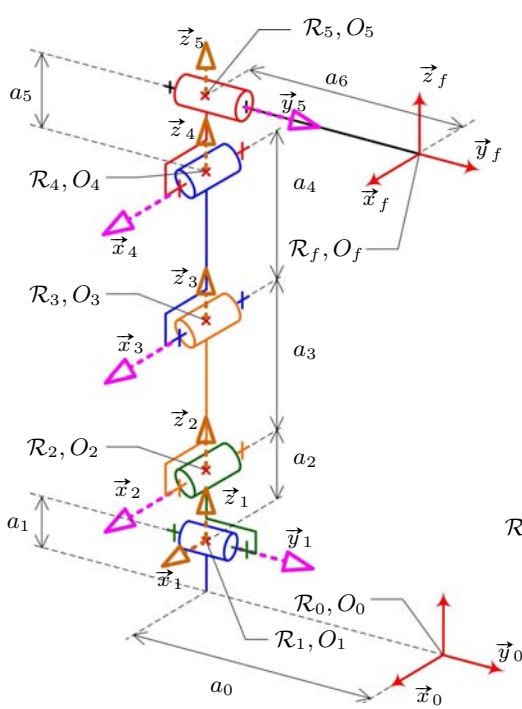


FIG. 13 – Définition des repères articulaires de la chaîne C_1 en configuration étendue.

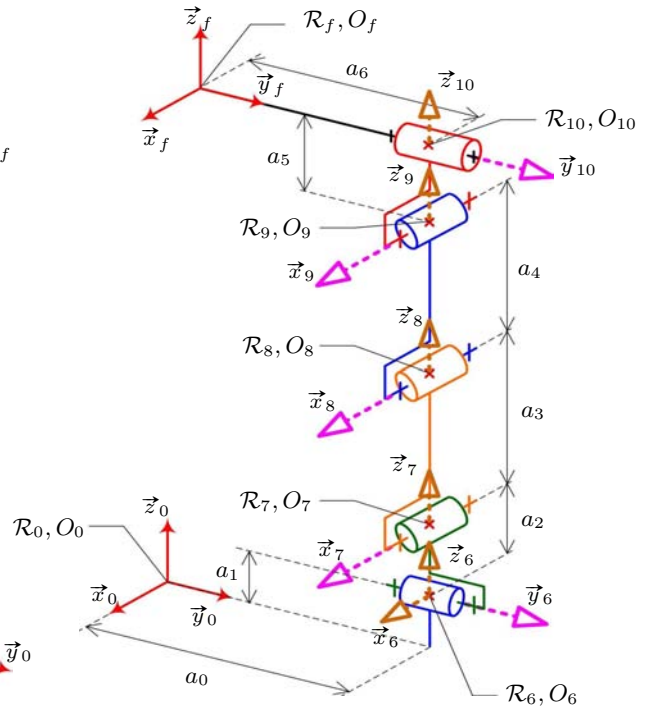


FIG. 14 – Définition des repères articulaires de la chaîne C_2 en configuration étendue.

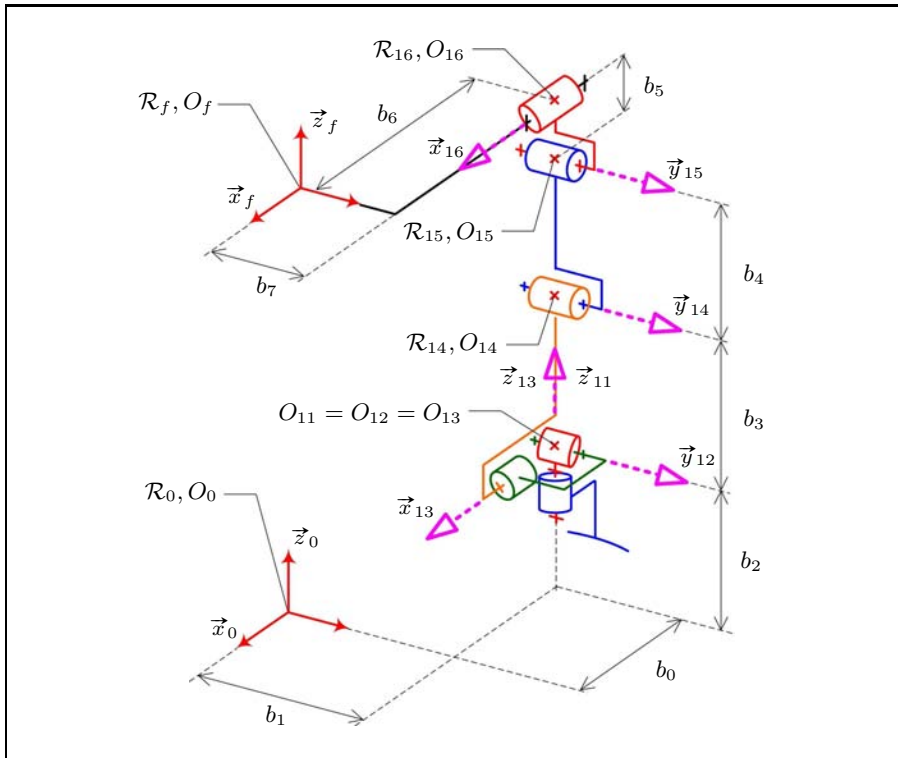


FIG. 15 – Définition des repères articulaires de la chaîne C_3 en configuration étendue.

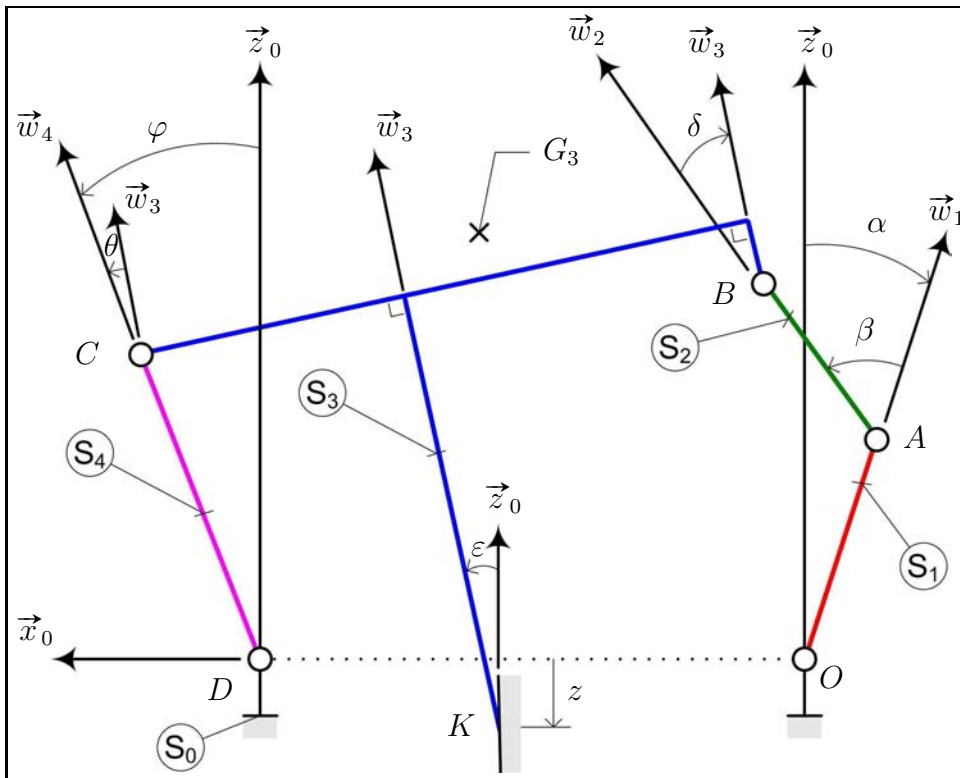


FIG. 16 – Configuration spécifique du robot.

Annexe 2 - Torseurs unitaires

- ✓ On note $\vec{\Omega}_{i/i-1}$ le vecteur vitesse instantanée de rotation du solide i par rapport au solide $i - 1$. On note :

$$\vec{\Omega}_{i/i-1} = \omega_i \underline{\vec{\Omega}}_{i/i-1}$$

où ω_i désigne la vitesse angulaire du solide i par rapport au solide $i - 1$ et $\underline{\vec{\Omega}}_{i/i-1}$ le vecteur vitesse instantanée de rotation *unitaire*⁵ du solide i par rapport au solide $i - 1$.

- ✓ On note $\vec{V}_{M,i/i-1}$ le vecteur vitesse linéaire du solide i par rapport au solide $i - 1$ exprimé en un point M quelconque.
- ✓ On désigne par $\mathcal{V}_{i/i-1}$ le torseur cinématique du solide i en mouvement par rapport au solide $i - 1$. Exprimé en un point M quelconque, ce torseur s'écrit :

$$\mathcal{V}_{i/i-1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{i/i-1} \\ \vec{V}_{M,i/i-1} \end{array} \right\}_M . \quad (\text{Tors-6})$$

- ✓ On désigne par $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}$ le torseur cinématique *unitaire* du solide i en mouvement par rapport au solide $i - 1$. Exprimé en un point M quelconque, ce torseur s'écrit :

$$\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\vec{\Omega}}_{i/i-1} \\ \frac{1}{\omega_i} \vec{V}_{M,i/i-1} \end{array} \right\}_M . \quad (\text{Tors-7})$$

⁵Le choix du sens de $\underline{\vec{\Omega}}_{i/i-1}$ détermine le sens positif de rotation du solide i par rapport au solide $i - 1$.

Annexe 3 - Torseur réciproque \mathcal{V}^r à une liaison pivot

Pour préparer la résolution du mécanisme complet, on considère le cas élémentaire de deux solides i et $i - 1$ interconnectés par une liaison pivot \mathcal{L}_i d'axe $(O_i, \vec{\Omega}_{i/i-1})$, comme indiqué sur la figure 17.

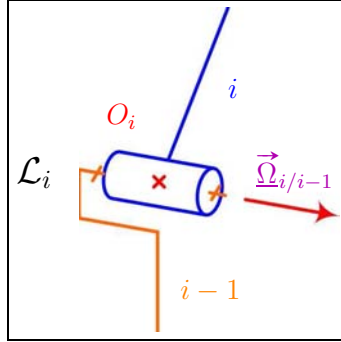


FIG. 17 – Liaison pivot \mathcal{L}_i .

- ✓ La liaison pivot \mathcal{L}_i est décrite par un torseur cinématique unitaire de la forme (Tors-7) avec :

$$\begin{cases} \omega_i = \dot{p}_i & \text{si } \mathcal{L}_i \text{ est passive} \\ \omega_i = \dot{q}_i & \text{si } \mathcal{L}_i \text{ est motorisée} \end{cases}$$

- ✓ Le torseur unitaire représentant la liaison pivot \mathcal{L}_i a pour expression en O_i :

$$\mathcal{V}_{i/i-1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{i/i-1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_i}.$$

- ✓ On note \otimes l'opérateur de comoment de deux torseurs. Un torseur \mathcal{V}^r est dit réciproque au torseur \mathcal{V} si et seulement si $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^r = 0$.

- ✓ Les composantes d'un torseur unitaire et réciproque à un torseur \mathcal{V} sont notées :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^r &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \frac{1}{\|\vec{F}\|} \vec{\mathcal{M}}_M \end{array} \right\}_M & \text{avec } \vec{F} = \frac{\vec{F}}{\|\vec{F}\|} & \text{si } \|\vec{F}\| \neq 0 \\ \mathcal{V}^r &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_M \end{array} \right\}_M & \text{avec } \vec{\mathcal{M}} = \frac{\vec{\mathcal{M}}}{\|\vec{\mathcal{M}}\|} & \text{si } \|\vec{F}\| = 0 \end{aligned}$$

- ✓ Le torseur des actions du solide $i - 1$ agissant sur le solide i est un torseur réciproque au torseur cinématique $\mathcal{V}_{i/i-1}$. On le note $\mathcal{V}_{i/i-1}^r$. Ainsi, le comoment $\mathcal{V}_{i/i-1} \otimes \mathcal{V}_{i/i-1}^r$ correspond à la puissance développée par les actions de $i - 1$ sur i dans le mouvement de i par rapport à $i - 1$. Si la liaison entre les solides $i - 1$ et i est parfaite, alors cette puissance est nulle.

Annexe 4 - Modélisation numérique

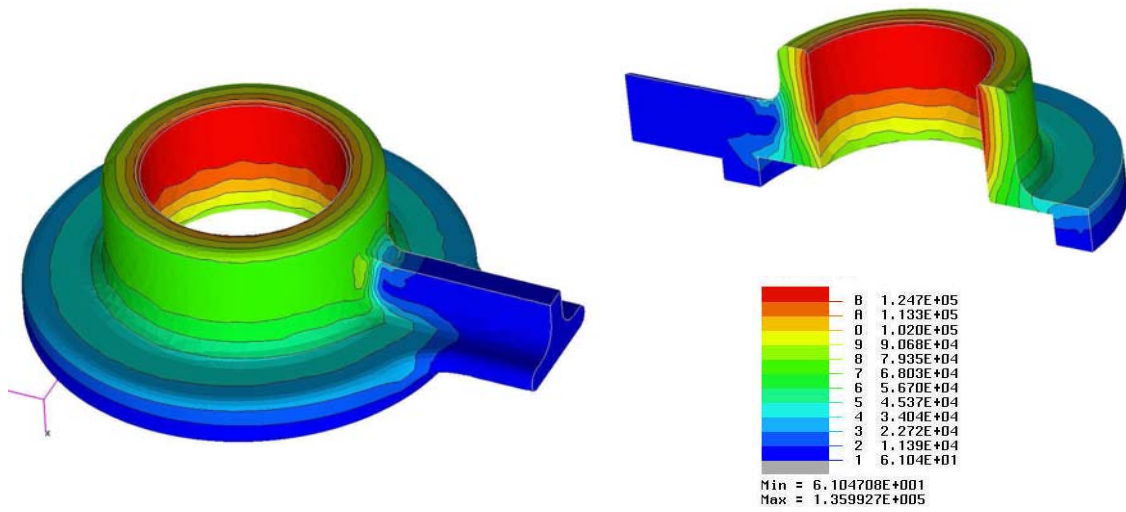


FIG. 18 – Contrainte de Von Mises (10^3Pa).

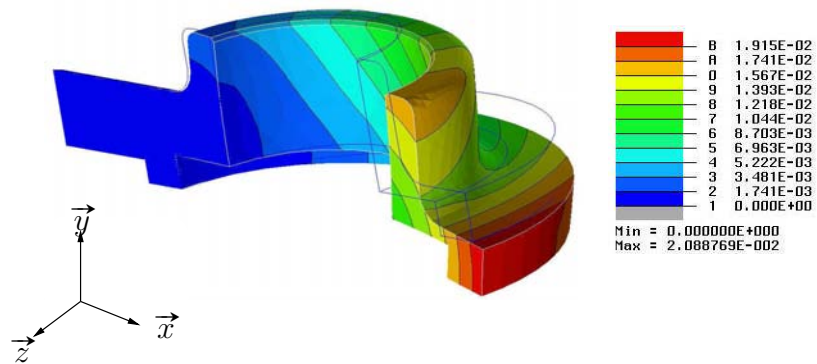


FIG. 19 – Déplacements (mm) et géométrie déformée ($\times 100$).

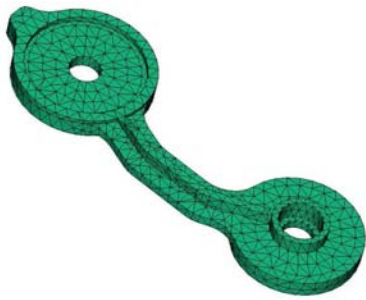


FIG. 20 – Maillage d'un segment.

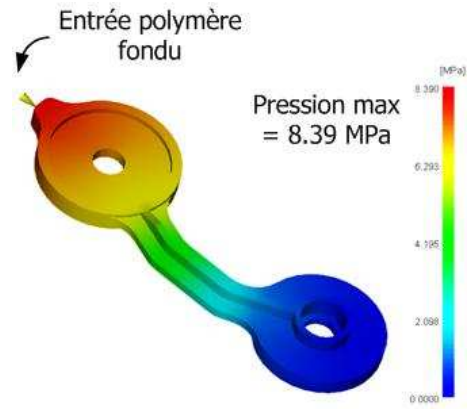


FIG. 21 – Champs de pression.

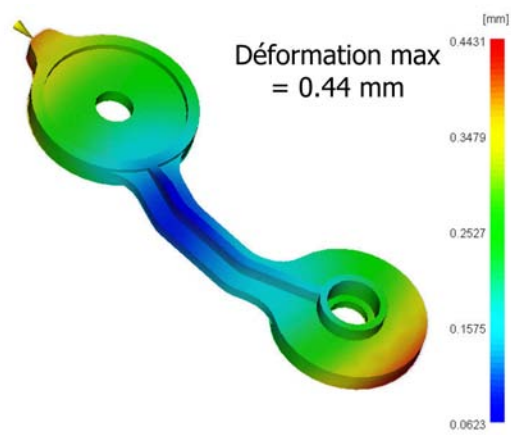


FIG. 22 – Déformation d'un segment en sortie de moule

Corrigé du sujet de Mécanique des Systèmes et des Milieux Déformables

1	Mécanique des solides indéformables	4
1.1	Analyse de la structure parallèle	5
1.2	Torseurs unitaires et torseurs réciproques	7
1.3	Modèle cinématique du CT-Bot	10
1.4	Détermination des efforts aux articulations	17
1.5	Analyse d'une configuration spécifique	19
2	Mécanique des solides déformables	25
2.1	Étude préliminaire	25
2.2	Application au montage des segments du robot	30
2.3	Modèle numérique	33
3	Mécanique des fluides	38
3.1	Écoulement 3D non newtonien	38
3.2	Écoulement de Poiseuille plan	42
3.3	Recherche des paramètres d'injection optimum	48
3.4	Refroidissement et déformation d'une pièce injectée	52
4	Annexes	56
1	Figures	56
2	Torseurs unitaires	60
3	Torseur réciproque \mathcal{V}^r à une liaison pivot	61
4	Modélisation numérique	62

Introduction - Robot médical CT-Bot

Le **CT-Bot** est un assistant robotique en cours de développement destiné à la réalisation de procédures abdominales minimalement invasives.

Le champ d'application des procédures minimalement invasives va du diagnostic au traitement de tumeurs localisées dans des organes internes. Ces modalités thérapeutiques présentent notamment l'intérêt d'être moins douloureuses pour le patient que la chirurgie classique et permettent ainsi un rétablissement plus rapide. Les scanners à rayons X récents rendent possible la détection de tumeurs d'une taille inférieure au centimètre. En raison de leur précision limitée, les interventions manuelles ne sont aujourd'hui pratiquées que sur des tumeurs dont la taille varie entre 30 et 60 mm. D'autre part, la répétition d'actes d'insertion d'aiguille sous imagerie scanner expose le praticien à des doses de rayons X potentiellement dangereuses pour sa santé. Les besoins en précision et protection aux rayons X sont principalement à l'origine du développement de nouveaux dispositifs d'assistance à ces gestes médico-chirurgicaux.

L'utilisation de robots pour réaliser des interventions sous imagerie scanner n'est pas une pratique nouvelle. Toutefois, bien que des essais cliniques aient été réalisés dans certains cas, les systèmes actuels sont mal adaptés aux interventions sur l'abdomen où les mouvements et la respiration du patient sont des sources importantes de perturbation.

L'utilisation d'un système robotisé tel que **CT-Bot** pour la réalisation de procédures percutanées a pour objectif d'améliorer la précision des interventions, de limiter l'exposition du radiologue et du personnel médical aux rayons X et de réduire la durée des opérations.

Pour favoriser la précision du positionnement et la rigidité, un mécanisme à structure parallèle a été proposé. Le **CT-Bot** est un mécanisme à structure parallèle original à cinq degrés de liberté prévu pour le positionnement et l'orientation d'une aiguille (voir figures 16 et 17 en annexe 1) dans le cadre de procédures percutanées de destruction de tumeurs.

Dans la phase de pénétration, le mécanisme de positionnement et d'orientation de l'aiguille doit pouvoir reprendre, sans se déformer, un effort d'insertion maximum de l'ordre de 20 N. Cette rigidité doit aussi favoriser l'acquisition de l'effort d'insertion, mesuré entre le positionneur et le système porte-aiguille. Le porte-aiguille ne fait pas partie du périmètre de cette étude.

La structure parallèle proposée comporte trois jambes articulées reliant la base du robot à une plate-forme commune qui correspond à l'organe terminal du positionneur auquel est attaché le porte-aiguille.

Deux jambes opposées (chaîne C_1 et C_2 cinématiquement identiques) connectées par la plate-forme constituent un premier mécanisme plan à six barres (voir figure 18). Dans ce plan sont pilotés trois degrés de liberté. Les deux degrés de liberté restants sont, tout d'abord, une rotation du système 6-barres autour de l'axe d_1 et une rotation de la plate-forme autour de l'axe d_2 . La troisième jambe reliée à plate-forme permet, grâce à deux actionneurs, d'imposer les angles de rotation autour de d_1 et d_2 .

La conception et le développement du **CT-Bot** ont été réalisés par une équipe de cher-

cheurs (INSA et Université Louis Pasteur de Strasbourg) en collaboration étroite avec le service de radiologie interventionnelle des hôpitaux universitaires de Strasbourg.

Le sujet comporte **trois parties** indépendantes.

Après une phase introductive sur le fonctionnement du mécanisme, la **première partie** est consacrée à la modélisation cinématique du **CT-Bot** en vue de pré-dimensionner ses actionneurs. La démarche de résolution utilisée est basée sur l'écriture du principe des puissances virtuelles à l'aide de torseurs réciproques judicieusement choisis. La définition des notions de torseurs unitaires et réciproques est exposée en annexes 2 et 3. Cette méthode de résolution est classique en robotique et permet d'obtenir très directement les modèles cinématiques.

La section 1.5, consacrée à l'analyse d'une configuration spécifique du mécanisme peut être traitée indépendamment du reste de la première partie.

L'étude du dimensionnement partiel des segments du robot est réalisée en **seconde partie**. La création d'un modèle analytique simplifié suivi de l'analyse d'un modèle 3D éléments finis sont demandés. L'étude de ces deux modèles permet de définir les caractéristiques mécaniques attendues des segments.

La réalisation d'un premier prototype du **CT-Bot** a permis de mettre en évidence un manque de rigidité des segments du robot. L'analyse de la fabrication de ces segments par un autre mode de fabrication tel que l'injection est abordée dans la **troisième partie**. Cette étude permet de faire un choix de matériau répondant à la fois aux exigences de rigidité (définies en partie 2) et aux exigences de fabrication.

Il est recommandé de répondre aux trois parties sur des copies séparées.

Partie 1 - Mécanique des solides indéformables

Le mécanisme proposé permet de positionner dans l'espace un point O_f de l'aiguille dont l'axe a pour vecteur directeur \vec{z}_f et d'orienter l'aiguille suivant deux angles α et β définis de la manière suivante :

- α rotation autour de \vec{x}_0 (voir figures 19-a₁ et 19-a₂) avec α compris entre -25° et 25° ;
- β rotation autour de \vec{y}_0 (voir figure 19-b) avec β est compris entre 0° et 60° .

Le robot comporte donc cinq degrés de liberté (les deux rotations α et β et le déplacement de O_f).

L'objectif de cette partie est de réaliser une modélisation cinématique du mécanisme en vue de pré-dimensionner ses actionneurs.

- ★ Section 1.1 : analyse de la structure parallèle ;
- ★ Section 1.2 et 1.3 : modélisation cinématique basée sur l'utilisation de torseurs unitaires et réciproques ;
- ★ Section 1.4 : détermination des efforts aux articulations ;
- ★ Section 1.5 : analyse d'une configuration spécifique ;

Paramétrage du système

Le mécanisme comporte 16 liaisons de type pivot dont cinq sont motorisées (voir figure 20 pour le modèle cinématique adopté dans l'étude).

- ✓ Soient \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}_f deux repères orthonormés directs liés respectivement au bâti et à la plate-forme mobile du robot (voir figures 19 et 20). On note $\mathcal{R}_0 \equiv (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $\mathcal{R}_f \equiv (O_f, \vec{x}_f, \vec{y}_f, \vec{z}_f)$.
- ✓ Le vecteur de configuration X du robot représente la position et l'orientation de la plate-forme par rapport à \mathcal{R}_0 . On construit X à l'aide des coordonnées de l'origine O_f et du vecteur \vec{z}_f de \mathcal{R}_f exprimées dans \mathcal{R}_0 . Ainsi (O_f, \vec{z}_f) définit la droite support de l'instrument porté par le robot.

On note également X la matrice colonne des composantes du vecteur de configuration du robot¹ :

$$X = [x_{O_f} \quad y_{O_f} \quad z_{O_f} \quad x_{z_f} \quad y_{z_f} \quad z_{z_f}]^T$$

où

$$\overrightarrow{O_0O_f} = x_{O_f} \vec{x}_0 + y_{O_f} \vec{y}_0 + z_{O_f} \vec{z}_0 \quad \text{et} \quad \vec{z}_f = x_{z_f} \vec{x}_0 + y_{z_f} \vec{y}_0 + z_{z_f} \vec{z}_0.$$

Remarque \vec{z}_f est un vecteur unitaire donc $\|\vec{z}_f\|^2 = x_{z_f}^2 + y_{z_f}^2 + z_{z_f}^2 = 1$.
Le vecteur de configuration X est donc décrit à l'aide de $6 - 1 = 5$ paramètres indépendants.

¹Le vecteur de configuration d'un robot est un élément de \mathbb{R}^n où n correspond au nombre de degrés de liberté du robot. Les composantes de X sont aussi appelées coordonnées opérationnelles.

- ✓ On note q_3, q_4, q_8, q_{14} et q_{15} les paramètres d'orientation angulaire des cinq liaisons motorisées et $p_1, p_2, p_5, p_6, p_7, p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12}, p_{13}$ et p_{16} les paramètres d'orientation angulaire des onze liaisons passives.
- ✓ Le vecteur des coordonnées articulaires q regroupe tous les paramètres de liaisons motorisées. On note également q la matrice colonne des composantes du vecteur des coordonnées articulaires² : $q = [q_3 \ q_4 \ q_8 \ q_{14} \ q_{15}]^T$.

Le modèle cinématique recherché correspond à une relation entre la vitesse \dot{X} de la plateforme et les vitesses articulaires motorisées \dot{q} . La démarche envisagée pour le trouver consiste à mettre en évidence des torseurs réciproques au plus grand nombre de liaisons passives du mécanisme afin d'éliminer les contributions des vitesses \dot{p}_i .

Section 1.1 - Analyse de la structure parallèle

Question 1.1.1 Mettre en place le graphe des liaisons du modèle cinématique adopté pour le robot. On indiquera avec précision et pour chaque liaison, son type, ses caractéristiques cinématiques (point, direction, axe, etc.) et son nombre de paramètres cinématiques.

Réponse Le système ne comporte que des liaisons pivots. Le graphe des liaisons associé au modèle proposé est le suivant :

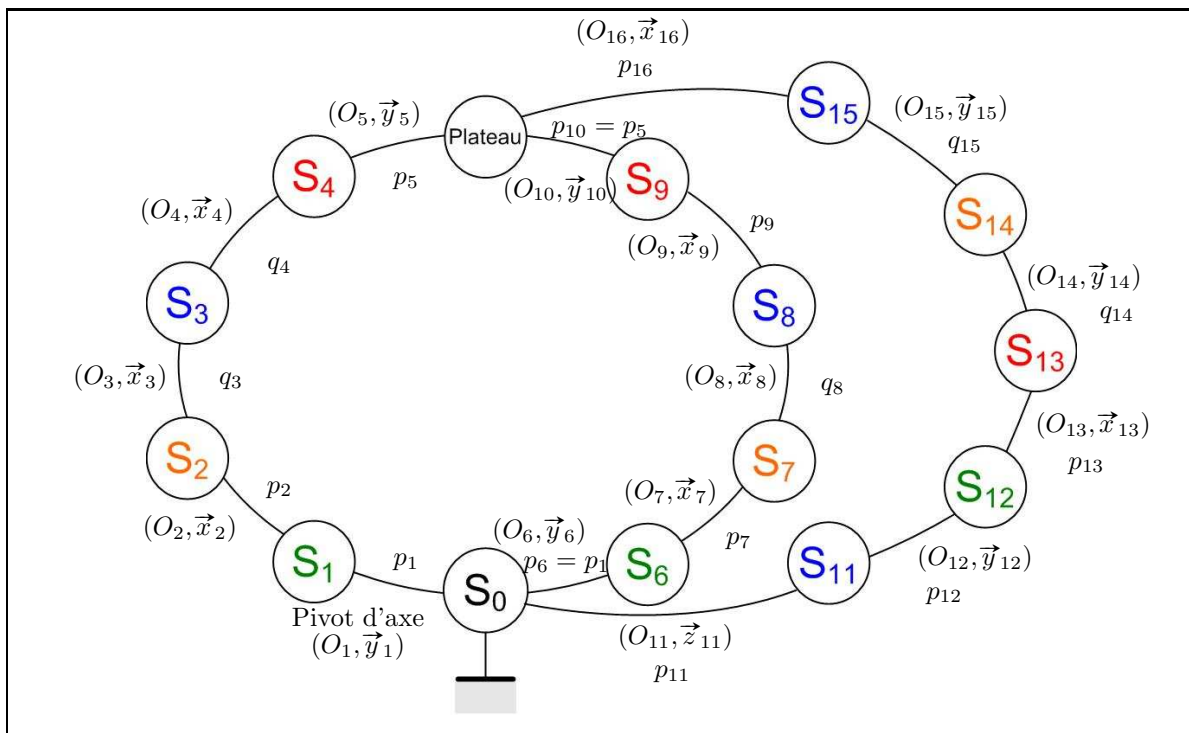


FIG. 1 – Graphe des liaisons.

Question 1.1.2 On se propose dans cette question d'étudier les propriétés structurales du mécanisme par une approche globale (i.e. sans résolution des équations de fermeture).

²Les composantes de q sont aussi appelées coordonnées généralisées.

Pour le modèle cinématique adopté, déterminer, en indiquant précisément la démarche, le degré d'hyperstaticité h du modèle mécanique. Quel est l'intérêt, dans le cadre du système étudié, d'avoir $h > 0$?

Réponse

- ✓ On a $\gamma = N_{\text{liaisons}} - N_{\text{pièces}} + 1 = 16 - 15 + 1 = 2$. Le modèle cinématique comporte donc deux boucles cinématiquement indépendantes, ce qui est logique par simple observation du modèle cinématique proposé.
- ✓ Le modèle cinématique est composé de seize liaisons pivots, chacune apportant une inconnue cinématique : on en déduit que $N_C = \sum n_{ci} = 16 \times 1 = 16$.
- ✓ Le modèle cinématique peut être intégralement défini par cinq paramètres indépendants ce qui permet de piloter le plateau supérieur selon cinq paramètres (trois distances pour la position de l'origine + deux angles pour l'orientation de l'aiguille) : on a donc $m_u = 5$. De plus, le modèle cinématique ne permet aucune mobilité interne : on a donc $m_i = 0$. Finalement, on en déduit que $m = m_u + m_i = 5$.

Réponse

- ✓ Le degré d'hyperstaticité $h = 6\gamma + m - N_C = 12 + 5 - 16 = 1$.
- ✓ Cet hyperstatisme introduit une contrainte géométrique de montage qui peut être mise à profit pour améliorer la rigidité de la structure. La surabondance de points de contact permet de compenser/limiter l'influence de certaines erreurs de réalisation sur pièces fabriquées qui devront subir des déformations pour permettre l'assemblage du mécanisme. Ces déformations peuvent être exploitées pour compenser dans une certaine mesure des imperfections telles que des défauts d'alignement d'axes ou des jeux mécaniques dans les liaisons.

Question 1.1.3 Justifier par une analyse simple du mécanisme la valeur de ce degré d'hyperstaticité : on indiquera par exemple la ou les contraintes géométriques correspondant à ce degré d'hyperstaticité par un ou plusieurs dessin(s) judicieusement choisis.

Remarque On rappelle que, dans ce mécanisme, les chaînes C_1 et C_2 doivent rester dans un même plan.

Réponse

Le degré d'hyperstaticité correspondant à un nombre de contraintes géométriques de montage, on doit indiquer celles rencontrées lors de la mise en œuvre du robot. Pour cela, il faut commencer par monter (virtuellement ...) deux des chaînes puis fixer la dernière sur la boucle ainsi formée.

On choisit par exemple de monter les chaînes dans l'ordre $C_3 - C_2 - C_1$ mais tout autre ordre de montage aboutirait aux mêmes conclusions.

Lorsqu'on monte les deux chaînes C_2 et C_3 , il n'y a aucune contrainte de montage de la dernière pivot de C_2 avec le bâti (paramètre p_6 , car trois rotations d'axes concourants sont possibles entre C_3 et le bâti, ce qui permet d'orienter librement la boucle formée dans n'importe quelle direction de l'espace).

Cette boucle étant mise en place, on connecte la dernière chaîne C_1 au bâti et à $C_3 - C_2$ par les liaisons pivots de paramètre p_1 et p_5 pour garantir que les chaînes C_1 et C_2 restent dans un même plan. Dans ces conditions, les trois liaisons pivots de paramètre p_2 , q_3 et q_4 sont d'axe normal au plan contenant C_1 et C_2 et défini par les axes (O_1, \vec{y}_0) et (O_5, \vec{y}_f) . Il est clair que la présence de ces trois liaisons pivots montées en série et d'axe parallèle introduit un blocage surabondant d'ordre 1 de ces liaisons suivant la direction \vec{x}_2 (normale au plan contenant C_1 et C_2).

Question 1.1.4 Proposer une ou des modification(s) de la modélisation pour rendre ce modèle isostatique en respectant les deux contraintes constructives suivantes :

- ne pas modifier les liaisons motorisées ;
 - ne pas modifier les liaisons avec la structure porteuse posée sur le patient.
- Proposer alors une solution technologique de réglage de la liaison choisie afin d'assurer un montage aisé.

Réponse

L'hyperstatisme constaté à la question précédente provient de la construction du mécanisme plan constitué par les chaînes C_1 et C_2 . Les liaisons de la chaîne C_3 n'auront donc pas d'influence sur l'hyperstatisme du mécanisme assemblé.

Les liaisons qui ne peuvent pas être modifiées :

- les liaisons motorisées correspondant aux paramètres $q_{i,i=3,4,8}$;
- les liaisons avec la structure correspondant aux paramètres p_1 et p_6 ;
- les liaisons correspondant aux paramètres p_5 et p_{10} qui garantissent que les chaînes C_1 et C_2 restent coplanaires.

A priori, les seules liaisons modifiables sont donc celles correspondant aux paramètres p_2 , p_7 et p_9 . Cependant, la modification du modèle des liaisons correspondant aux paramètres p_2 et p_7 n'est pas très judicieuse pour des raisons de tenue du système, ces liaisons supportant la masse de l'ensemble médical placé sur la partie supérieure.

Il apparaît logique de modifier la liaison correspondant au paramètre p_9 en rajoutant une mobilité en translation suivant (O_9, \vec{x}_9) c'est à dire en prenant un modèle de type « pivot glissant ».

Section 1.2 - Torseurs unitaires et torseurs réciproques

Un rappel des notions de torseurs unitaires et réciproques est donné en annexes 2 et 3.

Description des liaisons d'un mécanisme à l'aide de torseurs unitaires

On désigne par $\mathcal{V}_{i/i-1}$ le torseur cinématique du solide i en mouvement par rapport au solide $i - 1$ (voir annexe 2).

Question 1.2.1 Soit A un point de l'axe central Δ_i du torseur $\mathcal{V}_{i/i-1}$ de pas λ_i . Écrire la vitesse du solide i en mouvement par rapport au solide $i - 1$, en fonction des invariants du torseur cinématique. Exprimer cette vitesse au point A puis en un point M quelconque.

Réponse

Si $A \in \Delta_i$, alors

$$\boxed{\vec{V}_{A,i/i-1} = \lambda_i \vec{\Omega}_{i/i-1}}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{V}_{M,i/i-1} &= \vec{V}_{A,i/i-1} + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}_{i/i-1} \\ \Leftrightarrow \boxed{\vec{V}_{M,i/i-1} &= \lambda_i \vec{\Omega}_{i/i-1} + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}_{i/i-1}} \end{aligned}$$

Question 1.2.2 Montrer que λ_i est égal à l'automoment de $\mathcal{V}_{i/i-1}$.

Réponse

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_i} \vec{V}_{M,i/i-1} &= \frac{1}{\omega_i} (\lambda_i \vec{\Omega}_{i/i-1} + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}_{i/i-1}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\omega_i} \vec{V}_{M,i/i-1} &= \lambda_i \vec{\Omega}_{i/i-1} + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}_{i/i-1} \\ \Rightarrow \vec{\Omega}_{i/i-1} \cdot \frac{1}{\omega_i} \vec{V}_{M,i/i-1} &= \lambda_i \underbrace{\vec{\Omega}_{i/i-1} \cdot \vec{\Omega}_{i/i-1}}_1 + \underbrace{\vec{\Omega}_{i/i-1} \cdot (\overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}_{i/i-1})}_{\vec{0}} \\ \Rightarrow \boxed{\lambda_i = \vec{\Omega}_{i/i-1} \cdot \frac{1}{\omega_i} \vec{V}_{M,i/i-1}} &\text{ cqfd} \end{aligned}$$

Question 1.2.3 Quels sont les mouvements associés à un torseur cinématique $\mathcal{V}_{i/i-1}$ de pas nul et un torseur cinématique $\mathcal{V}_{i/i-1}$ de pas infini ?

Réponse

Soient $\mathcal{V}_{i/i-1}$ un torseur et A un point de son axe central Δ_i . On a alors :

$$\mathcal{V}_{i/i-1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{i/i-1} \\ \lambda_i \vec{\Omega}_{i/i-1} \end{array} \right\}_A$$

✓ Si $\lambda_i = 0$, alors :

$$\mathcal{V}_{i/i-1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{i/i-1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

⇒ Mouvement de rotation autour de l'axe central Δ_i

✓ Si $\lambda_i = \infty$, alors :

$$\begin{aligned} \underbrace{\vec{V}_{A,i/i-1}}_{\text{valeur finie}} &= \underbrace{\lambda_i}_{\text{valeur infinie}} \underbrace{\vec{\Omega}_{i/i-1}}_{\Rightarrow \vec{0}} \\ \Rightarrow \vec{V}_{M,i/i-1} &= \vec{V}_{A,i/i-1}, \quad \forall M \\ \Rightarrow \mathcal{V}_{i/i-1} &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}_{A,i/i-1} \end{array} \right\}_{\forall M} \end{aligned}$$

⇒ Mouvement de translation suivant une direction colinéaire à $\vec{V}_{A,i/i-1}$

Construction d'une base de torseurs réciproques \mathcal{V}^r à une liaison pivot

On rappelle que le système est constitué uniquement de liaisons pivots notées $\mathcal{L}_{i(i \in [1,16])}$ caractérisées par leur torseur cinématique unitaire $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}$. Pour les questions 1.2.4 à 1.2.6, on notera $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}^r$ un torseur unitaire et réciproque à $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}$ représentant la liaison pivot \mathcal{L}_i .

Question 1.2.4 Caractériser l'axe central d'un torseur de pas nul, unitaire et réciproque à $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}$. Donner une interprétation géométrique de ce torseur réciproque.

Réponse

On a, $\forall M$:

$$\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}^r = \left\{ \frac{\vec{F}}{\|\vec{F}\|} \vec{\mathcal{M}}_M \right\}_M \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{V}}_{i/i-1} = \left\{ \frac{\vec{\Omega}_{i/i-1}}{\omega_i} \vec{V}_{M,i/i-1} \right\}_M.$$

De plus,

$$\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}^r = \vec{F} \cdot \frac{1}{\omega_i} \vec{V}_{M,i/i-1} + \frac{1}{\|\vec{F}\|} \vec{\mathcal{M}}_M \cdot \vec{\Omega}_{i/i-1}$$

Au centre O_i de la liaison cette expression devient :

$$\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}^r = \frac{1}{\|\vec{F}\|} \vec{\mathcal{M}}_{O_i} \cdot \vec{\Omega}_{i/i-1}$$

Soit A un point de l'axe central de $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}^r$, alors on sait qu'il existe un scalaire λ_r (le pas du torseur unitaire réciproque) tel que :

$$\frac{1}{\|\vec{F}\|} \vec{\mathcal{M}}_A = \lambda_r \vec{F}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{V}}_{i/i-1} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}^r &= \frac{1}{\|\vec{F}\|} \vec{\mathcal{M}}_{O_i} \cdot \vec{\Omega}_{i/i-1} \\ \Leftrightarrow \underline{\mathcal{V}}_{i/i-1} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}^r &= \frac{1}{\|\vec{F}\|} (\vec{\mathcal{M}}_A + \overrightarrow{O_i A} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{\Omega}_{i/i-1} \\ \Leftrightarrow \underline{\mathcal{V}}_{i/i-1} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}^r &= \lambda_r \vec{F} + \frac{1}{\|\vec{F}\|} (\overrightarrow{O_i A} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{\Omega}_{i/i-1} \end{aligned}$$

On recherche un torseur unitaire réciproque de pas nul, donc :

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{V}}_{i/i-1} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}^r &= \frac{1}{\|\vec{F}\|} (\overrightarrow{O_i A} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{\Omega}_{i/i-1} \\ \Leftrightarrow 0 &= (\overrightarrow{O_i A} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{\Omega}_{i/i-1} \\ \Leftrightarrow 0 &= (\vec{\Omega}_{i/i-1} \wedge \overrightarrow{O_i A}) \cdot \vec{F} \\ \Leftrightarrow \vec{F} &\perp (\vec{\Omega}_{i/i-1} \wedge \overrightarrow{O_i A}) \\ \Rightarrow \vec{F} &\in \text{plan passant par } \vec{\Omega}_{i/i-1} \end{aligned}$$

En conclusion, **un torseur unitaire de pas nul et réciproque à une liaison pivot est caractérisé par une résultante dont la direction est contenue dans un plan passant par l'axe de la liaison.**

Question 1.2.5 Caractériser l'axe central d'un torseur, de pas infini, unitaire et réciproque à $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}$. Donner une interprétation géométrique de ce torseur réciproque.

Réponse

Si $\lambda_r = \infty$, alors :

$$\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}^r = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_M \end{array} \right\}_M$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{V}}_{i/i-1} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}^r &= \vec{\mathcal{M}}_M \cdot \vec{\underline{\Omega}}_{i/i-1} \\ \Leftrightarrow 0 &= \vec{\mathcal{M}}_M \cdot \vec{\underline{\Omega}}_{i/i-1} \\ \Leftrightarrow \vec{\mathcal{M}}_M &\perp \vec{\underline{\Omega}}_{i/i-1} \end{aligned}$$

En conclusion, **un torseur unitaire de pas infini réciproque à une liaison pivot est caractérisé par un moment dont la direction est perpendiculaire à l'axe de la liaison.**

Question 1.2.6 Combien existe-t-il de torseurs réciproques à $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}$ linéairement indépendants ?

Remarque On rappelle que deux torseurs $\mathcal{V}_{i/i-1}^a$ et $\mathcal{V}_{i/i-1}^b$ sont dits linéairement dépendants si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad / \quad \mathcal{V}_{i/i-1}^a = k \cdot \mathcal{V}_{i/i-1}^b.$$

Réponse

Les torseurs réciproques de pas nul à une liaison pivot sont caractérisés par une résultante contenue dans n'importe quel plan passant par l'axe de la liaison. Une telle résultante peut donc être décomposée dans une base de l'espace à trois dimensions.

Les torseurs réciproques de pas infini à une liaison pivot sont caractérisés par un moment contenu dans un plan perpendiculaire à l'axe de la liaison. Un tel moment peut donc être décomposé dans une base d'un espace à deux dimensions.

Une liaison pivot possède donc cinq torseurs réciproques linéairement indépendants, trois torseurs de pas nul et deux de pas infini.

Section 1.3 - Modèle cinématique du CT-Bot

Dans le mécanisme proposé, toutes les liaisons $\mathcal{L}_{i(i \in [1,16])}$ sont des liaisons pivots supposées parfaites (voir figure 25). Les figures 21 à 22 présentent la définition des repères pour chacune des trois chaînes placées dans une configuration de référence simple (chaînes en configuration étendue).

Équations de fermeture du mécanisme

Le mouvement de la plate-forme par rapport à \mathcal{R}_0 est décrit au moyen du torseur cinématique, exprimé en un point F quelconque :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \\ \vec{V}_{F,\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \end{array} \right\}_F.$$

On souhaite exprimer $\mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0}$ de trois manières différentes en considérant successivement les équations de fermeture des chaînes C_1 , C_2 et C_3 .

Question 1.3.1 Pour chaque chaîne, donner l'expression torsorielle de $\mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0}$ en fonction des \dot{q}_i , \dot{p}_j et des torseurs cinématiques unitaires $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}$. On notera les relations relatives aux chaînes C_1 , C_2 et C_3 respectivement (1), (2) et (3).

Remarque Les équations torsorielles (1) à (3) correspondent chacune à deux équations vectorielles qui ne doivent pas être développées (équation vectorielle de la résultante et équation vectorielle du moment).

Réponse

Équation de fermeture de chaîne C_1 :

$$(1) \quad : \quad \mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} = \dot{p}_1 \underline{\mathcal{V}}_{1/\mathcal{R}_0} + \dot{p}_2 \underline{\mathcal{V}}_{2/1} + \dot{q}_3 \underline{\mathcal{V}}_{3/2} + \dot{q}_4 \underline{\mathcal{V}}_{4/3} + \dot{p}_5 \underline{\mathcal{V}}_{\mathcal{R}_f/4}$$

Équation de fermeture de la chaîne C_2 :

$$(2) \quad : \quad \mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} = \dot{p}_6 \underline{\mathcal{V}}_{6/\mathcal{R}_0} + \dot{p}_7 \underline{\mathcal{V}}_{7/6} + \dot{q}_8 \underline{\mathcal{V}}_{8/7} + \dot{p}_9 \underline{\mathcal{V}}_{9/8} + \dot{p}_{10} \underline{\mathcal{V}}_{\mathcal{R}_f/9}$$

Équation de fermeture de la chaîne C_3 :

$$(3) \quad : \quad \mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} = \dot{p}_{11} \underline{\mathcal{V}}_{11/\mathcal{R}_0} + \dot{p}_{12} \underline{\mathcal{V}}_{12/11} + \dot{p}_{13} \underline{\mathcal{V}}_{13/12} + \dot{q}_{14} \underline{\mathcal{V}}_{14/13} + \dot{q}_{15} \underline{\mathcal{V}}_{15/14} + \dot{p}_{16} \underline{\mathcal{V}}_{\mathcal{R}_f/15}$$

Torseurs réciproques pour les chaînes C_1 , C_2 et C_3

Les torseurs réciproques à une chaîne cinématique peuvent être obtenus par l'intersection des torseurs réciproques associés à chacune des liaisons composant la chaîne.

On rappelle que dans le mécanisme assemblé, les chaînes C_1 et C_2 sont coplanaires. En particulier, \vec{z}_1 et \vec{z}_6 sont des vecteurs de ce plan commun.

Question 1.3.2 Trouver les torseurs unitaires de pas nul et de pas infini simultanément réciproques aux liaisons passives \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_5 . Cet ensemble de torseurs réciproques devra constituer une base quelle que soit la configuration du mécanisme. On note $\underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_j}$ chacun de ces torseurs à exprimer au point de réalisation le plus simple.

Réponse

- ✓ Torseur de pas nul

$\underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_j}$ est un torseur dont la résultante est contenue dans le plan passant par les axes des liaisons \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_5 . La base des torseurs réciproques de pas nul est donc de dimension deux. Pour garantir que le couple de torseurs forme une base quelle que soit la configuration du mécanisme, on choisit des torseurs dont les résultantes sont constamment orthogonales. La forme générale de la réponse à la question peut s'écrire :

$$\underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{y}_i \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_i} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_2} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{z}_i \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_i} \quad \text{avec } i \in [1, 5]$$

On choisit par exemple $i = 1$:

$$\underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_1} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_2} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_1}$$

- ✓ Torseur de pas infini

$\underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_j}$ est un torseur dont le moment est perpendiculaire aux axes des liaisons \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_5 donc perpendiculaire au plan passant par les axes de ces liaisons. La base des torseurs réciproques de pas infini est donc de dimension un. La forme générale de la réponse peut s'écrire :

$$\underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_3} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{x}_i \end{array} \right\}_- \quad \text{avec } i \in [1, 5]$$

On choisit par exemple $i = 1$:

$$\underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_3} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{x}_1 \end{array} \right\}_-$$

Question 1.3.3 Par un raisonnement analogue, trouver les torseurs unitaires de pas nul et de pas infini simultanément réciproques aux liaisons passives \mathcal{L}_6 et \mathcal{L}_{10} . Cet ensemble de torseurs réciproques devra constituer une base quelle que soit la configuration du mécanisme. On note $\underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_j}$ chacun de ces torseurs à exprimer au point de réalisation le plus simple.

Réponse

- ✓ Torseur de pas nul

$\underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_j}$ est un torseur dont la résultante est contenue dans le plan passant par les axes des liaisons \mathcal{L}_6 et \mathcal{L}_{10} . La base des torseurs réciproques de pas nul est donc de dimension deux. Pour garantir que le couple de torseurs forme une base quelle que soit la configuration du mécanisme, on choisit des torseurs dont les résultantes sont constamment orthogonales. La forme générale de la réponse à la question peut s'écrire :

$$\underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{y}_i \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_i} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_2} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{z}_i \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_i} \quad \text{avec } i \in [6, 10]$$

On choisit par exemple $i = 6$:

$$\underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{y}_6 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_6} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_2} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{z}_6 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_6}$$

✓ Torseur de pas infini

$\underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_j}$ est un torseur dont le moment est perpendiculaire aux axes des liaisons \mathcal{L}_6 et \mathcal{L}_{10} donc perpendiculaire au plan passant par les axes de ces liaisons. La base des torseurs réciproques de pas infini est donc de dimension un. La forme générale de la réponse peut s'écrire :

$$\underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_3} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{x}_i \end{array} \right\}_- \quad \text{avec } i \in [6, 10]$$

On choisit par exemple $i = 6$:

$$\underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_3} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{x}_6 \end{array} \right\}_-$$

Pour l'écriture du modèle cinématique complet du robot, on donne une famille de torseurs unitaires réciproques aux liaisons passives de la chaîne C_3 :

$$\underline{\mathcal{V}}_{C_3}^{r_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{z}_{13} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_{11}} \quad \underline{\mathcal{V}}_{C_3}^{r_2} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{x}_{13} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_{11}}. \quad (\text{Tors-1})$$

Les équations du modèle cinématique pour la chaîne C_i sont obtenues en effectuant le comoment de l'équation (i) avec la famille $\underline{\mathcal{V}}_{C_i}^{r_j}$ des torseurs unitaires réciproques à la chaîne C_i .

Modèle cinématique pour la chaîne C_1

Question 1.3.4 Écrire le système d'équations permettant de calculer la vitesse opérationnelle en fonction des seules vitesses articulaires \dot{q}_3 , \dot{q}_4 et \dot{p}_2 de la chaîne C_1 . Les résultats obtenus seront présentés sous leur **forme vectorielle** sans développer les produits vectoriels et scalaires.

Réponse

Méthode générale pour répondre aux questions 1.3.4 à 1.3.8. Pour chaque chaîne, il faut utiliser la famille de torseurs réciproques aux liaisons passives dont on cherche à éliminer la contribution. Une équation scalaire est obtenue en calculant le comoment de chaque torseur réciproque avec l'équation de fermeture de la chaîne considérée.

✓ Cas de la chaîne C_1

On forme le comoment des torseurs réciproques $\underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_1}$, $\underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_2}$ et $\underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_3}$ avec l'équation de fermeture de la chaîne C_1 : $\mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} = \dot{p}_1 \underline{\mathcal{V}}_{1/\mathcal{R}_0} + \dot{p}_2 \underline{\mathcal{V}}_{2/1} + \dot{q}_3 \underline{\mathcal{V}}_{3/2} + \dot{q}_4 \underline{\mathcal{V}}_{4/3} + \dot{p}_5 \underline{\mathcal{V}}_{\mathcal{R}_f/4}$. Par construction des torseurs réciproques, les contributions des paramètres \dot{p}_1 et \dot{p}_5 disparaissent des équations qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_1} &= \dot{p}_2 \underline{\mathcal{V}}_{2/1} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_1} + \dot{q}_3 \underline{\mathcal{V}}_{3/2} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_1} + \dot{q}_4 \underline{\mathcal{V}}_{4/3} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_1} \\ \mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_2} &= \dot{p}_2 \underline{\mathcal{V}}_{2/1} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_2} + \dot{q}_3 \underline{\mathcal{V}}_{3/2} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_2} + \dot{q}_4 \underline{\mathcal{V}}_{4/3} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_2} \\ \mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_3} &= \dot{p}_2 \underline{\mathcal{V}}_{2/1} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_3} + \dot{q}_3 \underline{\mathcal{V}}_{3/2} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_3} + \dot{q}_4 \underline{\mathcal{V}}_{4/3} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_3} \end{cases}$$

Sachant que

$$\underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_1}, \quad \underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_2} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_1} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{V}}_{C_1}^{r_3} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{x}_1 \end{array} \right\}_-$$

on choisit d'exprimer chaque torseur cinématique au point O_1 . Le calcul des comoments donne :

$$\begin{cases} \vec{V}_{O_1, \mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \cdot \vec{y}_1 &= \dot{p}_2 \left(\overrightarrow{O_1 O_2} \wedge \vec{x}_2 \right) \cdot \vec{y}_1 + \dot{q}_3 \left(\overrightarrow{O_1 O_3} \wedge \vec{x}_2 \right) \cdot \vec{y}_1 + \dot{q}_4 \left(\overrightarrow{O_1 O_4} \wedge \vec{x}_2 \right) \cdot \vec{y}_1 \\ \vec{V}_{O_1, \mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \cdot \vec{z}_1 &= \dot{p}_2 \underbrace{\left(\overrightarrow{O_1 O_2} \wedge \vec{x}_2 \right) \cdot \vec{z}_1}_{= 0 \text{ car } \mathcal{L}_1 \text{ et } \mathcal{L}_2 \perp} + \dot{q}_3 \left(\overrightarrow{O_1 O_3} \wedge \vec{x}_2 \right) \cdot \vec{z}_1 + \dot{q}_4 \left(\overrightarrow{O_1 O_4} \wedge \vec{x}_2 \right) \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \cdot \vec{x}_1 &= \dot{p}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4 \end{cases}$$

Remarque Le développement des calculs n'était pas demandé aux candidats.

Question 1.3.5 Écrire les équations précédentes sous la forme matricielle suivante :

$$J_q^1 \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = J_x^1 \begin{bmatrix} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \\ \vec{V}_{O_1, \mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \end{bmatrix}$$

où J_q^1 et J_x^1 représentent respectivement les matrices jacobiennes partielles en vitesses articulaires et vitesses opérationnelles de la chaîne C_1 .

Réponse

La variable \dot{p}_2 peut être éliminée des équations et le système linéaire en \dot{q}_3 et \dot{q}_4 peut être réécrit sous la forme demandée :

$$J_q^1 = \begin{bmatrix} \left(\overrightarrow{O_1 O_3} \wedge \vec{x}_2 \right) \cdot \vec{y}_1 - \left(\overrightarrow{O_1 O_2} \wedge \vec{x}_2 \right) \cdot \vec{y}_1 & \left(\overrightarrow{O_1 O_4} \wedge \vec{x}_2 \right) \cdot \vec{y}_1 - \left(\overrightarrow{O_1 O_2} \wedge \vec{x}_2 \right) \cdot \vec{y}_1 \\ \left(\overrightarrow{O_1 O_3} \wedge \vec{x}_2 \right) \cdot \vec{z}_1 & \left(\overrightarrow{O_1 O_4} \wedge \vec{x}_2 \right) \cdot \vec{z}_1 \end{bmatrix}$$

$$J_x^1 = \begin{bmatrix} - \left[\left(\overrightarrow{O_1 O_2} \wedge \vec{x}_2 \right) \cdot \vec{y}_1 \right] \cdot \vec{x}_1 & \vec{y}_1 \\ \vec{0} & \vec{z}_1 \end{bmatrix}$$

Modèle cinématique pour la chaîne C_2

Question 1.3.6 Écrire le système d'équations permettant de calculer la vitesse opérationnelle en fonction des vitesses articulaires \dot{q}_8 , \dot{p}_7 et \dot{p}_9 de la chaîne C_2 . Les résultats obtenus seront présentés sous leur **forme vectorielle** sans développer les produits vectoriels et scalaires.

Réponse

✓ Cas de la chaîne C_2

On forme le comoment des torseurs réciproques $\underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_1}$, $\underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_2}$ et $\underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_3}$ avec l'équation de fermeture de la chaîne C_2 : $\mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} = \dot{p}_6 \underline{\mathcal{V}}_{6/\mathcal{R}_0} + \dot{p}_7 \underline{\mathcal{V}}_{7/6} + \dot{q}_8 \underline{\mathcal{V}}_{8/7} + \dot{p}_9 \underline{\mathcal{V}}_{9/8} + \dot{p}_{10} \underline{\mathcal{V}}_{\mathcal{R}_f/9}$. Par construction des torseurs réciproques, les contributions des paramètres \dot{p}_6 et \dot{p}_{10} disparaissent des équations qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_1} &= \dot{p}_7 \underline{\mathcal{V}}_{7/6} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_1} + \dot{q}_8 \underline{\mathcal{V}}_{8/7} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_1} + \dot{p}_9 \underline{\mathcal{V}}_{9/8} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_1} \\ \mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_2} &= \dot{p}_7 \underline{\mathcal{V}}_{7/6} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_2} + \dot{q}_8 \underline{\mathcal{V}}_{8/7} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_2} + \dot{p}_9 \underline{\mathcal{V}}_{9/8} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_2} \\ \mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_3} &= \dot{p}_7 \underline{\mathcal{V}}_{7/6} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_3} + \dot{q}_8 \underline{\mathcal{V}}_{8/7} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_3} + \dot{p}_9 \underline{\mathcal{V}}_{9/8} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_3} \end{cases}$$

Sachant que

$$\underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_1} = \begin{Bmatrix} \vec{y}_6 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_6}, \quad \underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_2} = \begin{Bmatrix} \vec{z}_6 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_6} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{V}}_{C_2}^{r_3} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{x}_6 \end{Bmatrix}_-$$

on choisit d'exprimer chaque torseur cinématique au point O_6 . Le calcul des comoments donne :

$$\begin{cases} \vec{V}_{O_6, \mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \cdot \vec{y}_6 &= \dot{p}_7 \left(\overrightarrow{O_6 O_7} \wedge \vec{x}_7 \right) \cdot \vec{y}_6 + \dot{q}_8 \left(\overrightarrow{O_6 O_8} \wedge \vec{x}_7 \right) \cdot \vec{y}_6 + \dot{p}_9 \left(\overrightarrow{O_6 O_9} \wedge \vec{x}_7 \right) \cdot \vec{y}_6 \\ \vec{V}_{O_6, \mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \cdot \vec{z}_6 &= \dot{p}_7 \underbrace{\left(\overrightarrow{O_6 O_7} \wedge \vec{x}_7 \right) \cdot \vec{z}_6 + \dot{q}_8 \left(\overrightarrow{O_6 O_8} \wedge \vec{x}_7 \right) \cdot \vec{z}_6 + \dot{p}_9 \left(\overrightarrow{O_6 O_9} \wedge \vec{x}_7 \right) \cdot \vec{z}_6}_{= 0 \text{ car } \mathcal{L}_6 \text{ et } \mathcal{L}_7 \perp} \\ \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \cdot \vec{x}_6 &= \dot{p}_7 + \dot{q}_8 + \dot{p}_9 \end{cases}$$

Remarque Le développement des calculs n'était pas demandé aux candidats.

Question 1.3.7 Écrire les équations précédentes sous la forme matricielle suivante :

$$J_q^2 \dot{q}_8 = J_x^2 \begin{bmatrix} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \\ \vec{V}_{O_6, \mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \end{bmatrix}$$

où J_q^2 et J_x^2 représentent respectivement les matrices jacobiennes partielles en vitesses articulaires et vitesses opérationnelles de la chaîne C_2 .

Réponse

Il faut calculer \dot{q}_8 à partir du système linéaire précédent en \dot{p}_7 , \dot{q}_8 et \dot{p}_9 . On obtient une solution de la forme :

$$J_q^2 = (a_3 - a_2) b_4 (a_4 - a_2) b_3$$

$$J_x^2 = [-a_2 b_4 \vec{x}_6 \quad b_4 \vec{y}_6 - (a_4 - a_2) \vec{z}_6]$$

avec

$$\begin{cases} a_1 = \vec{V}_{O_6, \mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \cdot \vec{y}_6 \\ a_2 = \left(\overrightarrow{O_6 O_7} \wedge \vec{x}_7 \right) \cdot \vec{y}_6 \\ a_3 = \left(\overrightarrow{O_6 O_8} \wedge \vec{x}_7 \right) \cdot \vec{y}_6 \\ a_4 = \left(\overrightarrow{O_6 O_9} \wedge \vec{x}_7 \right) \cdot \vec{y}_6 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_1 = \vec{V}_{O_6, \mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \cdot \vec{z}_6 \\ b_3 = \left(\overrightarrow{O_6 O_8} \wedge \vec{x}_7 \right) \cdot \vec{z}_6 \\ b_4 = \left(\overrightarrow{O_6 O_9} \wedge \vec{x}_7 \right) \cdot \vec{z}_6 \\ c_1 = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \cdot \vec{x}_6 \end{cases}$$

Modèle cinématique pour la chaîne C_3

Question 1.3.8 Écrire le système d'équations permettant de calculer la vitesse opérationnelle en fonction des vitesses articulaires \dot{q}_{14} et \dot{q}_{15} de la chaîne C_3 . Utiliser pour cela les torseurs réciproques unitaires (Tors-1). Les résultats obtenus seront présentés sous leur **forme vectorielle** sans développer les produits vectoriels et scalaires.

Réponse

✓ Cas de la chaîne C_3

On forme le comoment des torseurs réciproques $\underline{\mathcal{V}}_{C_3}^{r_1}$, et $\underline{\mathcal{V}}_{C_3}^{r_2}$ avec l'équation de fermeture de la chaîne C_3 :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} = p_{i1}\underline{\mathcal{V}}_{11/\mathcal{R}_0} + p_{i2}\underline{\mathcal{V}}_{12/11} + p_{i3}\underline{\mathcal{V}}_{13/12} + q_{i4}\underline{\mathcal{V}}_{14/13} + q_{i5}\underline{\mathcal{V}}_{15/14} + p_{i6}\underline{\mathcal{V}}_{\mathcal{R}_f/15}.$$

Par construction des torseurs réciproques, les contributions des paramètres \dot{p}_{11} , \dot{p}_{12} , \dot{p}_{13} et \dot{p}_{16} disparaissent des équations qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_3}^{r_1} &= q_{i4}\underline{\mathcal{V}}_{14/13} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_3}^{r_1} + q_{i5}\underline{\mathcal{V}}_{15/14} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_3}^{r_1} \\ \mathcal{V}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_3}^{r_2} &= q_{i4}\underline{\mathcal{V}}_{14/13} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_3}^{r_2} + q_{i5}\underline{\mathcal{V}}_{15/14} \otimes \underline{\mathcal{V}}_{C_3}^{r_2} \end{cases}$$

Sachant que $\underline{\mathcal{V}}_{C_3}^{r_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{z}_{13} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_{11}}$ et $\underline{\mathcal{V}}_{C_3}^{r_2} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{x}_{13} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_{11}}$, on choisit d'exprimer chaque torseur cinématique au point O_{11} . Le calcul des comoments donne :

$$\begin{cases} \vec{V}_{O_{11},\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \cdot \vec{z}_{13} &= q_{i4} \left(\overrightarrow{O_{11}O_{14}} \wedge \vec{y}_{14} \right) \cdot \vec{z}_{13} + q_{i5} \left(\overrightarrow{O_{11}O_{15}} \wedge \vec{y}_{14} \right) \cdot \vec{z}_{13} \\ \vec{V}_{O_{11},\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \cdot \vec{x}_{13} &= q_{i4} \left(\overrightarrow{O_{11}O_{14}} \wedge \vec{y}_{14} \right) \cdot \vec{x}_{13} + q_{i5} \left(\overrightarrow{O_{11}O_{15}} \wedge \vec{y}_{14} \right) \cdot \vec{x}_{13} \end{cases}$$

Remarque Le développement des calculs n'était pas demandé aux candidats.

Question 1.3.9 Écrire les équations précédentes sous la forme matricielle suivante :

$$J_q^3 \begin{bmatrix} \dot{q}_{14} \\ \dot{q}_{15} \end{bmatrix} = J_x^3 \begin{bmatrix} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \\ \vec{V}_{O_1,\mathcal{R}_f/\mathcal{R}_0} \end{bmatrix}$$

où J_q^3 et J_x^3 représentent respectivement les matrices jacobiennes partielles en vitesses articulaires et vitesses opérationnelles de la chaîne C_3 .

Réponse

Le système linéaire précédent donne directement :

$$J_q^3 = \begin{bmatrix} \left(\overrightarrow{O_{11}O_{14}} \wedge \vec{y}_{14} \right) \cdot \vec{z}_{13} & \left(\overrightarrow{O_{11}O_{15}} \wedge \vec{y}_{14} \right) \cdot \vec{z}_{13} \\ \left(\overrightarrow{O_{11}O_{14}} \wedge \vec{y}_{14} \right) \cdot \vec{x}_{13} & \left(\overrightarrow{O_{11}O_{15}} \wedge \vec{y}_{14} \right) \cdot \vec{x}_{13} \end{bmatrix}$$

$$J_x^3 = \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{z}_{13} \\ \vec{0} & \vec{x}_{13} \end{bmatrix}$$

Section 1.4 - Détermination des efforts aux articulations

L'objectif poursuivi dans cette section est d'évaluer les couples articulaires $\tau_3, \tau_4, \tau_8, \tau_{14}$ et τ_{15} nécessaires au maintien de l'équilibre du mécanisme lorsque la plate-forme est soumise à une action extérieure. La contribution des actions de pesanteur est négligée dans ce calcul de pré-dimensionnement. On rappelle que toutes les liaisons sont considérées comme parfaites.

Pour le traitement de cette partie, on adopte les notations matricielles suivantes :

- ✓ $\mathbf{V}_{R_f} = [\Omega_x \ \Omega_y \ \Omega_z \ v_x \ v_y \ v_z]^T$ représente la matrice colonne des composantes du torseur cinématique de la plate-forme dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_0 , exprimé au point O_f .
- ✓ $\mathbf{F} = [0 \ 0 \ 0 \ f_x \ f_y \ f_z]^T$ représente la matrice colonne des composantes du torseur des actions extérieures appliquées à la plate-forme. Ce torseur s'écrit : $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_f}$.
- ✓ \mathbf{z}_4 représente la matrice colonne des composantes du vecteur \vec{z}_4 .

L'ensemble de ces grandeurs matricielles sont exprimées dans un même repère de projection \mathcal{R}_P . La poursuite des calculs cinématiques sur les chaînes C_1, C_2, C_3 nécessite la projection dans \mathcal{R}_P des expressions vectorielles élaborées en section 1.3 et la composition de ces résultats intermédiaires conduit au modèle cinématique complet du mécanisme :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_q^1(O_f) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_q^2(O_f) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_q^3(O_f) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J_q(q)} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_8 \\ \dot{q}_{14} \\ \dot{q}_{15} \end{bmatrix}}_{\dot{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_x^1(O_f) \\ J_x^2(O_f) \\ J_x^3(O_f) \\ \mathbf{z}_4^T \ 0 \ 0 \ 0 \end{bmatrix}}_{J_x(q)} \mathbf{V}_{R_f}.$$

où J_q et J_x représentent respectivement les matrices jacobiennes partielles en vitesses articulaires et vitesses opérationnelles du mécanisme. Dans les situations où le mécanisme n'est pas dans une configuration dite singulière, il est possible d'obtenir la matrice jacobienne du mécanisme par la relation

$$J(q) = (J_x(q))^{-1} J_q(q).$$

Le calcul de $J(q)$ est d'une grande importance à la fois pour la conception du mécanisme, le choix des actionneurs, la commande du système et l'étude des efforts statiques.

Question 1.4.1 Écrire le théorème des puissances virtuelles appliqué au robot en équilibre statique soumis à un effort extérieur \vec{F} appliqué en O_f et aux actions motrices

$$\tau = [\tau_3 \ \tau_4 \ \tau_8 \ \tau_{14} \ \tau_{15}]^T.$$

Le théorème sera formulé en écrivant toutes les grandeurs participantes sous leur forme matricielle. En déduire l'expression des couples articulaires τ .

Réponse

L'étude cinématique a donné la relation entre les vitesses articulaires et les vitesses opérationnelles : $J_q(q)\dot{q} = J_x(q)\mathbf{V}_{R_f}$. En dehors des configurations singulières (i.e. là où $J_q(q)$ est inversible), les vitesses opérationnelles peuvent être calculées grâce au modèle cinématique direct qui a pour expression :

$$\mathbf{V}_{R_f} = \underbrace{\left(J_x(q)\right)^{-1} J_q(q) \dot{q}}_{J(q)} \quad (2)$$

Par hypothèse, le mécanisme, en équilibre statique, est soumis à l'action mécanique $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_f}$ et aux actions motrices articulaires τ . L'application du théorème des puissances virtuelles permet d'écrire :

$$\mathbf{F}^T \mathbf{V}_{R_f}^* + \tau^T \dot{q}^* = 0 \quad (3)$$

pour tout champ de vitesses virtuelles cinématiquement admissible (CVV-CA). D'après (2), un CVV-CA possible aura la forme $\mathbf{V}_{R_f}^* = \left(J_x(q)\right)^{-1} J_q(q)\dot{q}^*$, ce qui permet de réécrire (3) :

$$\left(\mathbf{F}^T \left(J_x(q)\right)^{-1} J_q(q) + \tau^T \right) \dot{q}^* = 0$$

pour n'importe quel champ virtuel \dot{q}^* et les couples articulaires τ ont pour expression :

$$\tau = - \left(\left(J_x(q)\right)^{-1} J_q(q) \right)^T \mathbf{F}$$

Un calcul des couples articulaires sur un ensemble de configurations articulaires représentatif de l'espace de travail du robot a permis d'évaluer les valeurs moyenne et maximale ainsi que l'écart type des couples articulaires (en Nm) :

$$\tau_{\text{moyen}} = \begin{bmatrix} 0,47 \\ 0,27 \\ 1,07 \\ 1,88 \\ 0,95 \end{bmatrix}, \quad \tau_{\text{écart-type}} = \begin{bmatrix} 0,66 \\ 0,54 \\ 1,21 \\ 2,60 \\ 1,53 \end{bmatrix}, \quad \tau_{\text{max}} = \begin{bmatrix} -5,28 \\ -4,02 \\ -4,98 \\ -13,87 \\ -9,10 \end{bmatrix}.$$

Le choix des actionneurs s'est porté sur des moteurs piézo-électriques du type USR-30 de la société Shinsei et dont les principales caractéristiques figurent dans le tableau 1. Chaque moteur est associé à un unique type de réducteur à déterminer.

Question 1.4.2 Pour le type de moteur choisi, évaluer le rapport de réduction du réducteur à monter entre le robot et chaque moteur. On formulera précisément l'hypothèse retenue pour ce dimensionnement.

Réponse

Une première réponse consiste à calculer le rapport de réduction à partir de la valeur maximale $\tau_{\text{max}} = 13.9 \text{ N}\cdot\text{m}$ qui conduit à prescrire un réducteur de rapport $\eta = \frac{\tau_{\text{max}}}{\tau_{\text{motmax}}}$, soit $\eta = 139$.

Tension d'alimentation	110 Vrms
Puissance nominale	1,3 W
Couple de maintien	0,1 Nm
Couple en fonctionnement	0,05 Nm
Couple maximal	0,1 Nm
Vitesse minimale	30 tr/min
Vitesse maximale	280 tr/min
Temps de réponse	15 ms
Temps de réponse en commutation de vitesse	1 ms
Courant en fonctionnement à plein régime	0,5 mA

TAB. 1 – Caractéristiques techniques du moteur USR-30.

En l'absence de données supplémentaires sur la distribution des valeurs articulaires maximales dans l'espace de travail, une hypothèse de dimensionnement plus modérée consiste à retenir comme valeur maximale du couple articulaire $\tau_{\max} = |\tau_{\text{moyen,max}}| + 2\tau_{\text{écart-type,max}}$. Dans ce cas, le réducteur prescrit serait de rapport $\eta = \frac{7,08}{0,1} = 70,8$. Le choix définitif de l'hypothèse de dimensionnement nécessite de connaître la distribution des valeurs articulaires maximales dans l'espace de travail qui peut être obtenue par simulation grâce au modèle cinématique.

Section 1.5 - Analyse d'une configuration spécifique

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au cas particulier d'un mouvement plan de l'aiguille ce qui correspond à un acte classique dans le cas de la radiothérapie. Nous allons de plus imposer que l'extrémité de l'aiguille se déplace de manière rectiligne. Lors de ce mouvement, le corps du patient sera supposé parfaitement fixe (ce qui correspond presque au cas attendu sachant que le robot est fixé sur le patient et suit donc les mouvements respiratoires de ce dernier).

Ce mouvement sera réalisé dans le plan de normale \vec{y}_0 passant par le point O_0 alors que le robot se trouve dans la configuration spécifique où \vec{y}_f reste colinéaire à \vec{y}_0 et où la droite (O_f, \vec{z}_f) est contenue dans le plan $(O_0, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$. Le modèle cinématique simplifié est proposé en annexe, figure 24. Le bras S_4 correspond aux chaînes C_1 et C_2 supposées parfaitement rigides par blocage des moteurs. L'extrémité K de l'aiguille se déplace verticalement sur une plage définie par l'opération à effectuer.

Paramétrage des solides

Tous les repères associés aux solides sont supposés orthonormés directs. Toutes les liaisons du modèle d'étude sont des articulations parfaites.

- ✓ On associe au bâti S_0 le repère $\mathcal{F}_0 \equiv (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. On pose $\vec{OD} = L\vec{x}_0$.
- ✓ On associe au bras inférieur S_1 le repère $\mathcal{F}_1 \equiv (O, \vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1)$. On pose $\vec{OA} = e\vec{w}_1$. La masse de S_1 est négligée.
- ✓ On associe au bras supérieur S_2 le repère $\mathcal{F}_2 \equiv (A, \vec{u}_2, \vec{v}_2, \vec{w}_2)$. On pose $\vec{AB} = e\vec{w}_2$. La masse de S_2 est négligée.

- ✓ On associe au plateau porte-aiguille S_3 le repère $\mathcal{F}_3 \equiv (B, \vec{u}_3, \vec{v}_3, \vec{w}_3)$. On pose $\overrightarrow{BC} = a\vec{u}_3 + b\vec{w}_3$ et $\overrightarrow{KC} = c\vec{u}_3 + d\vec{w}_3$. Le centre de gravité du plateau porte-aiguille est noté G_3 tel que $\overrightarrow{BG_3} = x_{G_3}\vec{u}_3 + z_{G_3}\vec{w}_3$. On note m_3 la masse du plateau porte-aiguille S_3 supposée concentrée en G_3 .
- ✓ On modélise l'ensemble des chaînes C_1 et C_2 par un bras S_4 coïncidant avec le segment CD . On associe à S_4 le repère $\mathcal{F}_4 \equiv (D, \vec{u}_4, \vec{v}_4, \vec{w}_4)$. Le centre de gravité de S_4 est noté G_4 tel que $\overrightarrow{DG_4} = z_{G_4}\vec{w}_4$. On note m_4 la masse de S_4 . On pose $\overrightarrow{DC} = h\vec{w}_4$.

Le point K se déplace verticalement en quasi-statique (succession de positions d'équilibre) : on paramètre sa position par le vecteur $\overrightarrow{OK} = H\vec{x}_0 + z\vec{z}_0$.

Paramétrage des liaisons

On associe à chaque liaison un paramètre angulaire d'orientation. Comme les liaisons sont des articulations, on définit les paramètres angulaires de la manière suivante :

$$\alpha = (\vec{z}_0, \vec{w}_1) = (\vec{x}_0, \vec{u}_1), \quad \beta = (\vec{w}_1, \vec{w}_2) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2), \quad \delta = (\vec{w}_2, \vec{w}_3) = (\vec{u}_2, \vec{u}_3), \\ \theta = (\vec{w}_3, \vec{w}_4) = (\vec{u}_3, \vec{u}_4), \quad \varepsilon = (\vec{z}_0, \vec{w}_3) = (\vec{x}_0, \vec{u}_3), \quad \varphi = (\vec{z}_0, \vec{w}_4) = (\vec{x}_0, \vec{u}_4).$$

Modélisation des actions mécaniques extérieures

Deux motoréducteurs d'entraînement identiques sont placés d'une part entre les bras S_1 et S_2 , et d'autre part, entre le bras S_2 et le plateau porte-aiguille S_3 afin de mouvoir le système. Ces motoréducteurs sont modélisés par un stator de masse négligeable fixé sur la pièce amont et un rotor de masse m fixé à la pièce aval. Ainsi, on a une masse ponctuelle m sur S_2 en A et une autre masse ponctuelle m sur S_3 en B.

Outre l'action mécanique de guidage, les rotors des motoréducteurs exercent sur les stators des actions mécaniques assimilables à des couples purs qui seront notés :

- $C_{12} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{y}_0$ pour le motoréducteur placé entre S_1 et S_2 ;
- $C_{23} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_B(S_2 \rightarrow S_3) \cdot \vec{y}_0$ pour le motoréducteur placé entre S_2 et S_3 .

L'action mécanique des éléments corporels sur l'aiguille est modélisée par un glisseur en K de résultante $\vec{F} = F_u\vec{u}_3 + F_w\vec{w}_3$.

On pose $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ avec g l'accélération de la pesanteur (supposée connue).

Question 1.5.1 Tracer les figures de calcul (dites aussi de position) correspondant au paramétrage proposé et donné par les angles $\alpha, \beta, \delta, \theta, \varphi$ et ε .

Réponse

Question 1.5.2 Tracer le graphe des liaisons et des actions mécaniques du modèle d'étude proposé.

Réponse

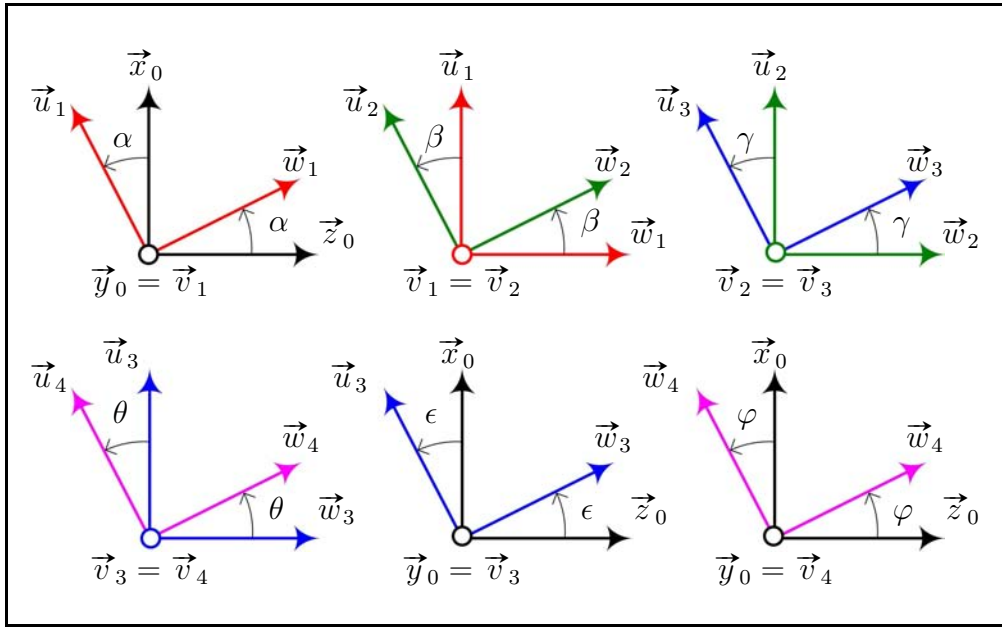


FIG. 2 – Figures de calcul.

Question 1.5.3 Déterminer le degré d'hyperstaticité de ce modèle bidimensionnel.

Réponse

Le nombre cyclomatique $\gamma = N_{\text{liaisons}} - N_{\text{pièces}} + 1 = 5 - 5 + 1 = 1$.

La mobilité $m = m_u + m_i = 2 + 0 = 2$.

Le nombre d'inconnues cinématiques est $N_C = \sum n_{ci} = 5 = 5$ (cinq articulations).

On a donc $h = 3\gamma + m - N_C = 3 + 2 - 5 = 0$: le modèle cinématique adopté est isostatique.

Question 1.5.4 Écrire la fermeture linéaire sur la boucle $S_0 - S_1 - S_2 - S_3 - S_0$, puis en déduire les deux équations scalaires obtenues par projection de cette relation vectorielle sur les vecteurs \vec{x}_0 et \vec{z}_0 . Écrire la fermeture angulaire sur cette boucle.

Réponse

✓ **Fermeture linéaire**

La fermeture linéaire s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} &= \vec{OK} + \vec{KC} \\ \Leftrightarrow e\vec{w}_1 + e\vec{w}_2 + a\vec{u}_3 + b\vec{w}_3 &= H\vec{x}_0 + z\vec{z}_0 + c\vec{u}_3 + d\vec{w}_3 \end{aligned}$$

La projection de cette équation vectorielle sur la direction \vec{x}_0 donne

$$e \sin \alpha + e \sin(\alpha + \beta) + a \cos \varepsilon + b \sin \varepsilon = H + c \cos \varepsilon + d \sin \varepsilon$$

La projection de cette équation vectorielle sur la direction \vec{z}_0 donne

$$e \cos \alpha + e \cos(\alpha + \beta) - a \sin \varepsilon + b \cos \varepsilon = z - c \sin \varepsilon + d \cos \varepsilon$$

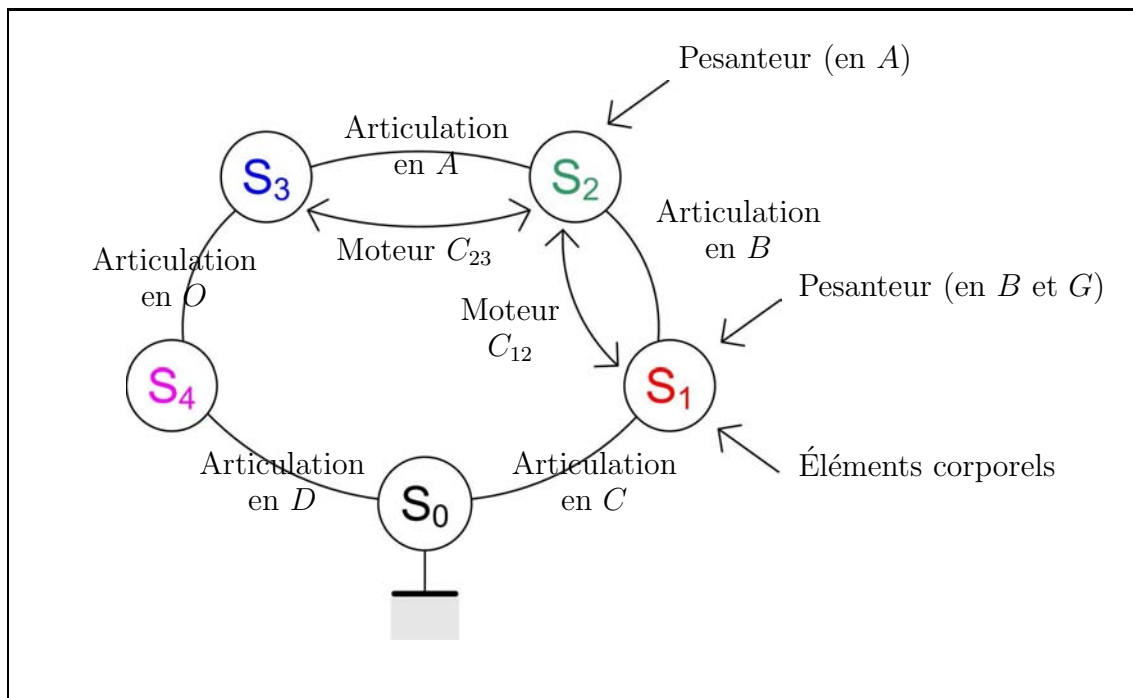


FIG. 3 – Graphe des liaisons.

✓ **Fermeture angulaire**

La fermeture angulaire s'écrit

$$(\vec{z}_0, \vec{w}_1) + (\vec{w}_1, \vec{w}_2) + (\vec{w}_2, \vec{w}_3) = (\vec{z}_0, \vec{w}_3)$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \delta = \varepsilon$$

Question 1.5.5 Mêmes questions sur la boucle $S_0 - S_3 - S_4 - S_0$.

Réponse

✓ **Fermeture linéaire**

La fermeture linéaire s'écrit

$$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KC}$$

$$\Leftrightarrow L\vec{x}_0 + h\vec{w}_4 = H\vec{x}_0 + z\vec{z}_0 + c\vec{u}_3 + d\vec{w}_3$$

La projection de cette équation vectorielle sur la direction \vec{x}_0 donne

$$L + h \sin \varphi = H + c \cos \varepsilon + d \sin \varepsilon$$

La projection de cette équation vectorielle sur la direction \vec{z}_0 donne

$$h \cos \varphi = z - c \sin \varepsilon + d \cos \varepsilon$$

✓ **Fermeture angulaire**

La fermeture angulaire s'écrit

$$\begin{aligned}(\vec{z}_0, \vec{w}_3) + (\vec{w}_3, \vec{w}_4) &= (\vec{z}_0, \vec{w}_4) \\ \Leftrightarrow \varepsilon + \theta &= \varphi\end{aligned}$$

On se retrouve donc dans le cas d'un système de six équations (voir ci-dessus) à sept inconnues (les six paramètres angulaires du problème + la hauteur z de l'extrémité).

Question 1.5.6 Déterminer par un raisonnement géométrique le nombre de solutions d'assemblage du mécanisme réalisables à l'aide des deux motoréducteurs en A et B pour atteindre une configuration imposée à l'aiguille (solide S_3).

Réponse

Considérons une configuration imposée à l'aiguille (et donc à S_3). Cette configuration est définie par le couple (z, ϵ) .

Le bras S_4 , avant sa connexion avec S_3 est un mécanisme plan à deux degrés de liberté (pivotement autour de (D, \vec{y}_0) et extension suivant \vec{w}_4). Ainsi, sous réserve que le point C soit situé dans l'espace atteignable de S_4 , il est possible d'assembler S_4 avec S_3 .

Les bras S_1 et S_2 , avant leur connexion avec S_3 constituent un mécanisme plan à deux barres. Ainsi, sous réserve que le point B soit situé dans l'espace atteignable du mécanisme à deux barres, il existe en général deux solutions d'assemblage de S_1 et S_2 avec S_3 symétriques par rapport à (OB) .

Pour la suite du problème, on imposera $\beta > 0$.

On souhaite déterminer les expressions des couples C_{12} et C_{23} en sortie des motoréducteurs en fonction des masses m_3 , m_4 et m , de l'accélération de la pesanteur g , des efforts F_u et F_w , de la géométrie (longueurs) et des angles et correspondant aux positions angulaires des arbres des motoréducteurs.

Question 1.5.7 Proposer une démarche de résolution permettant de déterminer efficacement les expressions de ces deux couples : on indiquera avec précision les isolements, les théorèmes utilisés, etc.

Question 1.5.8 Mettre en œuvre cette démarche de calcul et déterminer les expressions de C_{12} et C_{23} en fonction des données : on fera intervenir le minimum de données angulaires en utilisant les expressions issues des fermetures géométriques obtenues aux questions 1.5.4 et 1.5.5.

Question 1.5.9 On rappelle que $\beta > 0$: existe-t-il une position pour laquelle un de ces deux couples est nul ? si oui, indiquer laquelle, sinon indiquer pourquoi et conclure.

Réponse

On peut observer que pour ce type d'architecture mécanique construite à partir de liaisons pivots, la génération d'une trajectoire rectiligne dans l'espace opérationnel nécessite la commande coordonnée des motoréducteurs selon des lois d'évolutions non triviales. On peut également vérifier que sur l'ensemble du domaine de travail atteignable du robot

les couples articulaires moteurs connaissent des variations importantes. Le dimensionnement définitif des motoréducteurs peut être fait grâce au modèle cinématique présenté en section 1.4.

Partie 2 - Mécanique des solides déformables

Dans sa version actuelle, les différents segments du **CT-Bot** ont été réalisés par frittage de poudre métallique. Comme il est précisé dans le cahier des charges, les matériaux métalliques doivent être évités dans le plan de coupe de l'imageur. Le but de cette partie est donc d'étudier la possibilité de réaliser les segments du robot en matière non métallique. Pour cela, il est nécessaire de contrôler la tenue sous charge des segments pour les efforts de liaisons (calculés dans la première partie) et pour les efforts générés par le montage des moyeux. Seul le comportement des segments au montage sera étudié dans cette partie.

Les conditions de montage des segments du robot s'apparentent à un chargement appliqué à un composant ayant la forme d'un cylindre creux à paroi épaisse. On se propose de construire, dans un premier temps, le modèle analytique de calcul des contraintes et déformations d'un tel composant. Ces résultats seront ensuite appliqués aux conditions de montage des segments du robot.

Dans un second temps, on se propose de préciser la mise en données d'un modèle de simulation numérique par la méthode des éléments finis et de faire l'analyse comparative des résultats de simulation avec ceux obtenus à partir du modèle analytique simplifié.

Section 2.1 - Étude préliminaire

On considère une enveloppe cylindrique épaisse, homogène, isotrope, d'axe (O, \vec{e}_z) , de longueur l , de diamètre intérieur $2a$, de diamètre extérieur $2b$, soumise à l'action d'une pression intérieure p_i et d'une pression extérieure p_e , uniformément réparties sur les surfaces latérales (voir figure 4). L'enveloppe n'est pas chargée axialement.

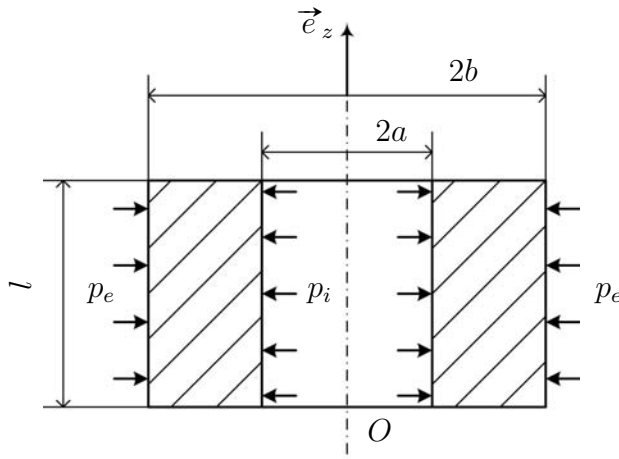


FIG. 4 – Chargement d'un cylindre creux à paroi épaisse.

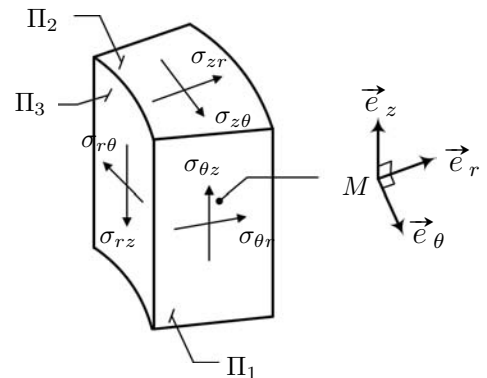


FIG. 5 – Contraintes autour de M .

On définit, dans le système de coordonnées cylindriques représenté par le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$,

le champ de déplacement d'un point matériel M de cette enveloppe par

$$\vec{u}(M) = u\vec{e}_r + v\vec{e}_\theta + w\vec{e}_z.$$

On note (r, θ, z) les coordonnées du point M dans ce système. Les matrices représentatives des tenseurs des contraintes et des déformations sont notées

$$\left[\overline{\overline{\sigma}} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)}, \quad \left[\overline{\overline{\varepsilon}} \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\theta} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)}.$$

Les glissements et les extensions s'expriment de la manière suivante dans le système de coordonnées cylindriques :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}, \quad 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

On suppose que les sections droites restent planes et que le déplacement radial u ainsi que les contraintes normales σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ ne dépendent que de r .

Question 2.1.1 Compte tenu des symétries du problème (géométrie et sollicitation), définir les hypothèses cinématiques.

Réponse

La géométrie et les conditions de chargement présentent une symétrie de révolution telle que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0, \quad v \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}(M) = u(r)\vec{e}_r + w(r, z)\vec{e}_z$$

De plus les sections droites restant planes, le champ de vitesse s'écrit alors

$$\vec{u}(M) = u(r)\vec{e}_r + w(z)\vec{e}_z$$

On a donc par définition

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0$$

Question 2.1.2 À l'aide du volume élémentaire défini figure 5 montrer que le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est un repère principal d'inertie et caractériser l'état de contrainte.

Réponse

- ✓ Sur la face Π_1 , $\sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta z} = 0$ par symétrie de révolution. Ainsi \vec{e}_θ est direction principale en M .
- ✓ Sur la face Π_2 , $\sigma_{z\theta} = 0$ (car $\sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta}$). De plus, $\sigma_{zr} = 0$ car u est indépendant de z . Ainsi \vec{e}_z est direction principale en M .

- ✓ \vec{e}_r est donc direction principale en M car les directions principales sont orthogonales entre elles.
- ✓ L'enveloppe n'est pas chargée axialement et les pressions sont uniformément réparties sur les surfaces latérales, donc $\sigma_{zz} = 0$. L'état de contrainte est donc un état plan de contraintes ($\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zz} = 0$).

On suppose que le matériau possède un comportement élastique linéaire. On note E et ν respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau. Les coefficients de Lamé λ et μ sont tels que

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} .$$

Question 2.1.3 Écrire, sous forme tensorielle puis sous forme scalaire, les relations de comportement relatives à ce problème. Montrer que l'expression du déplacement u , d'un point M situé à une distance r de l'axe de révolution porté par $(0, \vec{e}_z)$, est de la forme

$$u(r) = \frac{K}{r} + \tilde{K}r$$

où K et \tilde{K} sont deux constantes.

Réponse

La loi de Hooke s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \lambda \text{trace}(\bar{\epsilon}) \bar{I} + 2\mu \bar{\epsilon} \\ \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \\ \sigma_{\theta\theta} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{u}{r} \\ \sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \end{aligned}$$

La contrainte normale σ_{zz} étant nulle, on a

$$\lambda \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right)}_{K_1} + (\lambda + 2\mu) \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{K_2} = 0$$

Les fonctions K_1 et K_2 dépendent respectivement de r et z ; compte tenu de l'équation précédente elles sont constantes. Le déplacement radial u est donc tel que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} &= K_1 \\ \Rightarrow u(r) &= \frac{K}{r} + \tilde{K}r \end{aligned}$$

avec K et \tilde{K} deux constantes.

Question 2.1.4 Définir les contraintes normales σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de r , E , ν , K et \widetilde{K} .

Réponse

On a

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda \text{trace}(\overline{\varepsilon}) + 2\mu\left(-\frac{K}{r^2} + \widetilde{K}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \lambda \text{trace}(\overline{\varepsilon}) + 2\mu\left(\frac{K}{r^2} + \widetilde{K}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2\lambda \text{trace}(\overline{\varepsilon}) + 4\mu\widetilde{K}$$

$$\Rightarrow \text{trace}(\overline{\sigma}) = 2\lambda \text{trace}(\overline{\varepsilon}) + 4\mu\widetilde{K}$$

Or, par définition

$$\text{trace}(\overline{\varepsilon}) = \frac{1-2\nu}{E} \text{trace}(\overline{\sigma})$$

$$\Rightarrow \text{trace}(\overline{\varepsilon}) = \frac{1-2\nu}{E} (2\lambda \text{trace}(\overline{\varepsilon}) + 4\mu\widetilde{K})$$

$$\Rightarrow \text{trace}(\overline{\varepsilon}) = \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} \widetilde{K}$$

On obtient finalement

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1+\nu)\widetilde{K} - \frac{K(1-\nu)}{r^2} \right] \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1+\nu)\widetilde{K} + \frac{K(1-\nu)}{r^2} \right] \end{cases}$$

Question 2.1.5 À l'aide des conditions aux limites sur les surfaces latérales, définir le système d'équations linéaires permettant de déterminer les constantes K et \widetilde{K} .

Réponse

✓ Surface intérieure :

$$\begin{aligned} \vec{T}(r=a, -\vec{e}_r) &= p_i \vec{e}_r \\ \Leftrightarrow \overline{\sigma} \cdot (-\vec{e}_r) &= p_i \vec{e}_r \\ \Leftrightarrow -\sigma_{rr}(a) &= p_i \end{aligned}$$

On a alors

$$\boxed{\frac{E}{1-\nu^2} \left[(1+\nu)\widetilde{K} - \frac{K(1-\nu)}{a^2} \right] = -p_i} \quad (4)$$

✓ Surface extérieure :

$$\begin{aligned} \vec{T}(r=b, \vec{e}_r) &= -p_e \vec{e}_r \\ \Leftrightarrow \overline{\sigma} \cdot (\vec{e}_r) &= -p_e \vec{e}_r \\ \Leftrightarrow \sigma_{rr}(b) &= -p_e \end{aligned}$$

On a alors

$$\boxed{\frac{E}{1-\nu^2} \left[(1+\nu)\widetilde{K} - \frac{K(1-\nu)}{b^2} \right] = -p_e} \quad (5)$$

Question 2.1.6 Exprimer les constantes K et \widetilde{K} en fonction de p_i , p_e , a , b , E et de ν .

Réponse

✓ On a d'une part

$$(4) - (5) : \frac{E(1-\nu)}{1-\nu^2} \left[-\frac{K}{a^2} + \frac{K}{b^2} \right] = -p_i + p_e$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{(p_e - p_i)a^2b^2(1+\nu)}{E(a^2 - b^2)}$$

✓ d'autre part

$$(4)a^2 - (5)b^2 : \frac{E(1-\nu)}{1-\nu^2} [\widetilde{K}a^2 - \widetilde{K}b^2] = -p_ia^2 + p_eb^2$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{K} = \frac{(p_e b^2 - p_i a^2)(1-\nu)}{E(a^2 - b^2)}$$

Question 2.1.7 Donner l'expression des contraintes normales σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de a , b , p_e , p_i et r .

Réponse

Finalement on obtient

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[p_e b^2 - p_i a^2 - \frac{a^2 b^2 (p_e - p_i)}{r^2} \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[p_e b^2 - p_i a^2 + \frac{a^2 b^2 (p_e - p_i)}{r^2} \right]$$

Question 2.1.8 Montrer que σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont des fonctions linéaires de $\frac{1}{r^2}$.

Réponse

On définit deux constantes A et B telles que

$$A = \frac{a^2 p_i - b^2 p_e}{a^2 - b^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{(p_i - p_e) a^2 b^2}{a^2 - b^2}$$

Les expressions des contraintes normales deviennent alors

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = A - Bv \\ \sigma_{\theta\theta} = A + Bv \end{cases}$$

où $v = \frac{1}{r^2}$.

Question 2.1.9 Donner une interprétation graphique de l'évolution des contraintes normales σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ dans le cas général d'un serrage d'un moyeu puis dans le cas général d'un serrage d'un arbre.

Réponse

Les graphes 6 et 7 représentent l'évolution des contraintes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ suivant l'épaisseur de l'enveloppe. Les conditions aux limites en pression déterminent les valeurs de A et B et donc de σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$

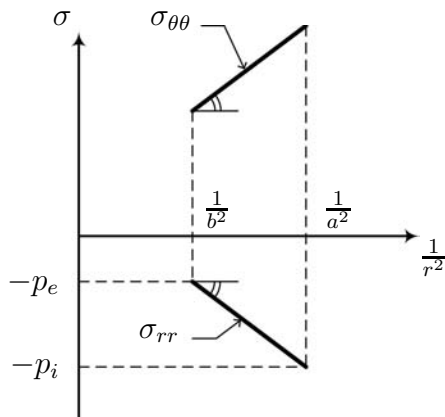


FIG. 6 – Cas du moyeu : $p_i > p_e$.

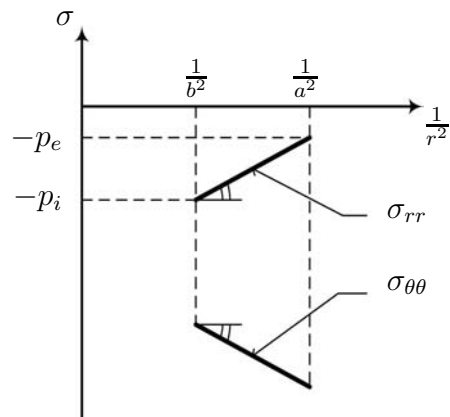


FIG. 7 – Cas de l'arbre : $p_i < p_e$.

Question 2.1.10 Déterminer le déplacement radial u en fonction a , b , E , ν et r .

Réponse

$$u(r) = \frac{(p_e - p_i)a^2b^2(1 + \nu)}{E(a^2 - b^2)r} + \frac{(p_e b^2 - p_i a^2)(1 - \nu)r}{E(a^2 - b^2)}$$

$$\Leftrightarrow u(r) = \frac{1}{E(a^2 - b^2)} \left[(p_e b^2 - p_i a^2)(1 - \nu)r + \frac{a^2 b^2 (p_e - p_i)(1 + \nu)}{r} \right]$$

Section 2.2 - Application au montage des segments du robot

Les cinq motoréducteurs sont montés au niveau des liaisons grâce à des moyeux expansibles (voir figure 8). Les données constructeur stipulent que le couple de serrage de l'écrou doit être de 14,1 Nm. Dans ces conditions, la pression exercée sur l'alésage vaut 35 MPa.

Dans un premier temps, on assimile l'extrémité d'un segment à un cylindre creux à paroi épaisse de rayon intérieur a et de rayon extérieur b . On suppose que les segments sur lesquels sont montés les moyeux sont homogènes et isotropes et qu'ils sont simplement soumis au chargement induit par les conditions de montage. On suppose également qu'ils répondent à la loi de Hooke généralisée.

Question 2.2.1 Exprimer les contraintes normales et le déplacement d'un point M de l'extrémité du segment.

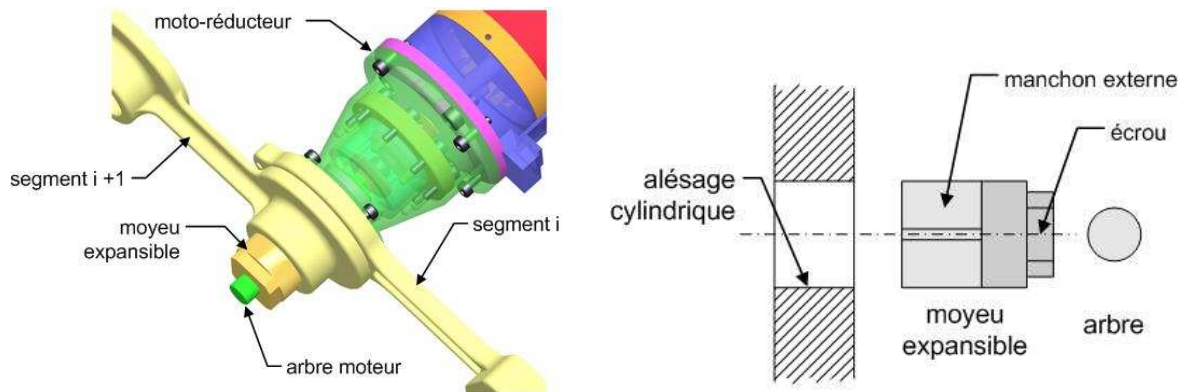


FIG. 8 – Moyeu expansible.

Réponse

Le chargement d'un segment, lors du montage du moyeu expansible associé, est assimilable à une pression notée p_i sur sa surface cylindrique interne. Aucune sollicitation n'est exercée sur les autres surfaces. On a donc, par analogie avec l'étude précédente $p_e = 0$ et

- ✓ Contraintes normales

$$\sigma_{rr} = \frac{p_i a^2}{a^2 - b^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p_i a^2}{a^2 - b^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_{zz} = 0$$

- ✓ Déplacement radial

$$u(r) = \frac{p_i a^2}{E(b^2 - a^2)} \left[(1 - \nu)r + \frac{b^2(1 + \nu)}{r} \right]$$

On souhaite étudier les conditions de résistance de l'extrémité d'un segment sur lequel est monté un moyeu expansible. Pour cela, on utilise le critère de Von Mises. On note σ_{vm} la contrainte équivalente de Von Mises et σ_{limite} la contrainte limite à ne pas dépasser.

Question 2.2.2 Écrire le critère de Von Mises en précisant la définition de la contrainte σ_{vm} en fonction des contraintes principales dans la pièce au point considéré.

Réponse

Le critère de Von Mises se traduit par l'inéquation

$$\sigma_{vm} < \sigma_{limite}$$

où

$$\sigma_{vm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2}$$

Or, ici $\sigma_{zz} = 0$. La contrainte équivalente de Von Mises devient alors

$$\begin{aligned}\sigma_{vm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2} \\ \Leftrightarrow \sigma_{vm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\sigma_{rr}^2 + 2\sigma_{\theta\theta}^2 - 2\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta}} \\ \Leftrightarrow \sigma_{vm} &= \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta}}\end{aligned}$$

Question 2.2.3 Exprimer la contrainte σ_{vm} , en un point M situé à une distance r de l'axe du moyeu expansible, en fonction de p_i , a et b .

Réponse

L'expression des contraintes normales permet d'écrire

$$\sigma_{vm} = \frac{p_i a^2}{b^2 - a^2} \sqrt{1 + 3 \frac{b^4}{r^4}}$$

Question 2.2.4 Calculer les valeurs maximales de σ_{vm} et $u(r)$ en fonction de p_i , a et b . Déterminer numériquement la valeur maximale de σ_{vm} sachant que $a = 8$ mm et $b = 11$ mm.

Réponse

La valeur maximale de σ_{vm} et de $u(r)$ se situe respectivement en $r = a$ et $r = b$, d'où

$$\max \sigma_{vm} = \frac{p_i a^2}{b^2 - a^2} \sqrt{1 + 3 \frac{b^4}{a^4}}$$

$$\max u(r) = \frac{2p_i a^2 b}{E(b^2 - a^2)}$$

À l'aide des valeurs numériques définies dans l'énoncé on trouve

$$\max \sigma_{vm} = 134 \text{ MPa}$$

Question 2.2.5 Définir la contrainte limite sachant que le calcul ne prend pas en compte l'augmentation de contraintes due à l'effet d'encastrement aux extrémités de la portée.

Réponse

On pourra ici utiliser un coefficient de sécurité s pour compenser cette augmentation de contrainte. On utilisera également la limite d'élasticité à la traction σ_e pour définir σ_{limite} . D'où

$$\sigma_{limite} = \frac{\sigma_e}{s}$$

Section 2.3 - Modèle numérique

En complément du modèle analytique, on souhaite construire un modèle numérique permettant de vérifier le comportement des segments lors du montage des moyeux expansibles. On souhaite réaliser le modèle numérique à l'aide d'un logiciel de calcul par éléments finis. Pour cela on dispose d'un modèle CAO complet des motoréducteurs assemblés aux segments (voir figure 8).

Question 2.3.1 Présenter le choix de(s) pièce(s) étudiée(s) support pour la réalisation du maillage. Justifier votre choix.

Réponse

Le chargement induit par les moyeux expansibles sur les segments est donné par le constructeur. Le comportement du moyeu sera modélisé à l'aide de conditions aux limites adaptées. Donc seul un segment peut être maillé.

Avant de réaliser le maillage de(s) pièce(s) choisie(s), il est classique de procéder à certaines modifications de la géométrie étudiée. Ces modifications sont effectuées dans le but soit d'introduire facilement les conditions aux limites et le chargement soit de simplifier les opérations de maillage et d'améliorer ainsi la qualité des résultats.

Question 2.3.2 Quelle(s) modification(s) du modèle CAO peut-on faire avant de réaliser le maillage.

Réponse

On exploite ici les symétries du segment et du chargement étudiés. Seul un quart du segment est retenu dans la CAO à partir de laquelle le maillage sera réalisé (voir figure 9). La suppression de détails géométriques tels que les chanfreins, congés de raccordement ou arrondis ne sont généralement pas souhaitables ici. En effet, leur suppression engendrerait des concentrations de contraintes. Seuls les arrondis sur la couronne extérieure des extrémités peuvent être supprimés afin de faciliter la création du maillage dans cette zone.

Question 2.3.3 Définir la topologie des éléments finis les plus appropriés pour mener le calcul.

Réponse

On utilise des éléments finis à trois dimensions. Le maillage est réalisé à l'aide de tétraèdres à 10 nœuds.

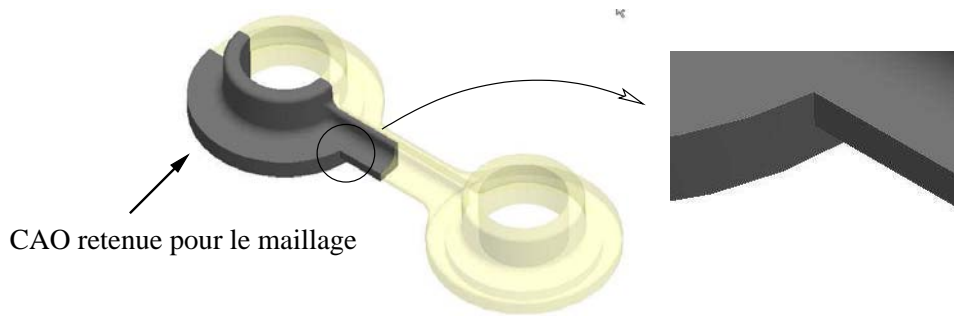


FIG. 9 – CAO retenue.

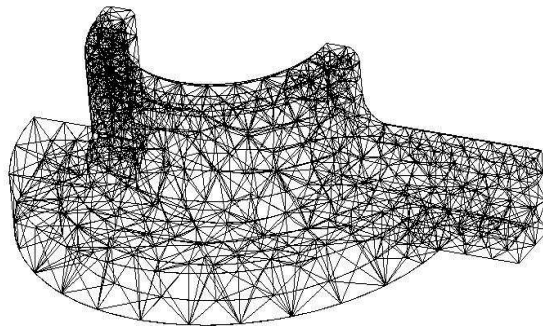


FIG. 10 – Maillage volumique.

Question 2.3.4 Présenter les conditions limites et chargement appliqués à la géométrie choisie (nature et localisation). Sachant qu'il n'existe de solution que si la structure possède suffisamment de conditions limites pour empêcher les mouvements d'ensemble, préciser comment éliminer ces modes rigides.

Réponse

Le moyeu expansible exerce une pression uniformément répartie sur la surface interne de l'extrémité du segment (alésage). On applique donc sur cette surface une pression de 35 MPa. Sur la surface de normale \vec{x} on bloque les déplacements selon la direction \vec{x} afin de refléter les conditions de symétrie. Sur la surface de normale \vec{z} on bloque les déplacements selon la direction \vec{z} .

Il reste encore un mode rigide à bloquer pour que la structure soit isostatique. On peut créer un ressort (3D) de raideur quasi nulle entre le sol et un point de la structure. Ainsi tous les mouvements d'ensemble seront bloqués. Cette solution permet de référencer les déplacements à partir du centre de l'alésage. Une autre solution consiste à bloquer tous les déplacements de la surface coupée de normale \vec{x} . En effet, le chargement est tel que cette surface n'est pas sollicitée. Dans ce cas, les déplacements seront référencés à partir de la surface bloquée.

Question 2.3.5 Définir la loi de comportement la plus appropriée. Quelles sont les caractéristiques à renseigner pour mener le calcul ?

Réponse

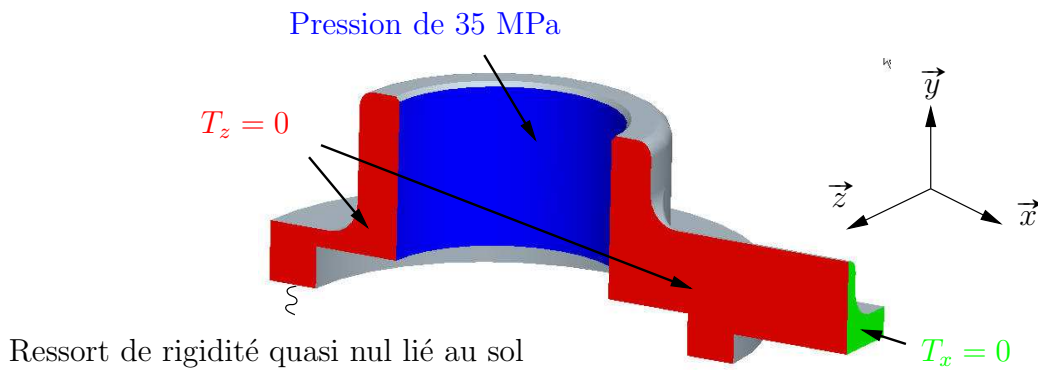


FIG. 11 – Conditions limites et chargement.

On utilise une loi élastique isotrope. Les seules caractéristiques à renseigner sont le module d'Young et le coefficient de Poisson. Ici la masse volumique n'est pas nécessaire car on souhaite faire un calcul en statique.

Question 2.3.6 Quel type de résolution peut-on choisir ?

Réponse

Le problème traité est indépendant du temps (conditions limites et chargement). La loi de comportement choisie est linéaire (linéarité matérielle). On cherche un matériau d'une part qui résiste au chargement et d'autre part qui ne se déforme pas trop afin d'assurer un serrage suffisant (linéarité géométrique). Le calcul peut donc être mené en statique linéaire.

Les calculs ont été menés sur un logiciel commercial où l'ensemble des étapes définies précédemment a pu être contrôlé pas à pas. Les cartographies de la contrainte équivalente de Von Mises et du déplacement sur l'extrémité du segment sont représentés respectivement figure 26 et 27. Le matériau choisi est un acier standard allié.

Question 2.3.7 Analyser la répartition de la contrainte équivalente de Von Mises sur la géométrie sélectionnée. On constate que la contrainte maximale de Von Mises est égale à 136 MPa. Comparer cette valeur à celle obtenue par le modèle analytique.

Réponse

On retrouve une répartition radiale de la contrainte σ_{vm} sur le haut de l'alésage ; le maximum de σ_{vm} se situe sur la surface interne de l'alésage. La partie renforcée de l'alésage (partie base) est soumise à des contraintes plus faibles.

Les résultats analytique et numérique sont proches (134 MPa analytiquement et 136 MPa numériquement). La partie de l'alésage non renforcée est assimilable à une enveloppe épaisse soumise simplement à une pression interne. C'est pourquoi on observe une répartition de la contrainte équivalente semblable à celle obtenue analytiquement. La partie base de l'alésage ainsi que la partie en T reliant les deux extrémités du segment ne sont quasiment pas sollicitées.

Question 2.3.8 Indiquer l'influence du matériau sur le champ de la contrainte équivalente de Von Mises.

Réponse

Aucune, seul le champ de déplacement est affecté par les caractéristiques du matériau (cf. résultat analytique).

Question 2.3.9 Analyser les déplacements de la géométrie sélectionnée.

Réponse

On observe des déplacements très faibles. La valeur maximale est de l'ordre de $2 \cdot 10^{-2}$ mm. Il n'existe pas de symétrie ni radiale ni orthoradiale du déplacement. La dissymétrie de la géométrie en bout de segment engendre des déplacements dans les directions \vec{x} et \vec{y} .

Le tableau 2 montre les résultats numériques obtenus pour trois matières différentes :

- ✓ acier standard ;
- ✓ polyamide (PA) chargé de 80% de poudre céramique ;
- ✓ polyamide 66 (PA66) chargé de 30% de fibres de verre courtes

	$\max \sigma_{\text{vm}}$ (MPa)	$\max \ \vec{u}\ $ (mm)	$\max \varepsilon_{\text{I}}$ (%)	σ_e (MPa)
Acier : $\begin{cases} E = 200 \text{ GPa} \\ \nu = 0,3 \end{cases}$	136	0,02	0,06	1000
PA chargé 80% poudre céramique : $\begin{cases} E = 60 \text{ GPa} \\ \nu = 0,45 \end{cases}$	136	0,07	0,21	500
PA 66 chargé 30% fibres de verre : $\begin{cases} E = 25 \text{ GPa} \\ \nu = 0,35 \end{cases}$	136	0,17	0,5	215

TAB. 2 – Comparaison entre différents matériaux.

Les pièces en polymères chargés peuvent être obtenues par le procédé d'injection (voir partie 3). La présence de fibres de verre confère aux pièces injectées des propriétés locales anisotropes. Le calcul de dimensionnement a été réalisé à l'aide de propriétés mécaniques moyennes (E et ν).

Question 2.3.10 Discuter le choix des matériaux possibles pour satisfaire aux conditions de montage des moyeux expansibles. Quel(s) matériau(x) peut-on retenir en vue de réaliser les segments du **CT-Bot**.

Réponse

Les contraintes maximales de Von Mises sont naturellement égales. Seules des déplacements et déformations diffèrent d'un cas à l'autre. Si l'on adopte un coefficient de sécurité de 2 (valeur couramment utilisée), on observe que seul le PA66 chargé de fibres de verre dépasse la contrainte limite élastique. Afin de satisfaire aux conditions de montage des

moyeux expansibles, les matériaux plastiques chargés peuvent convenir. On rappelle que l'on recherche des matières non métalliques afin d'éviter la présence d'artefact dans les images du scanner à rayons X.

Cependant le polymère chargé de fibres de verre présente des déplacements et des déformations les plus importants. De plus, ces valeurs sont erronées car la pièce réalisée à l'aide de ce matériau est anisotrope. Cette propriété n'a pas été prise en compte dans les calculs. Par ailleurs, il est impératif d'assurer des déformations minimales lors de l'insertion d'une aiguille dans le patient. C'est pourquoi le matériau retenu pour réaliser les segments du **CT-Bot** est un polyamide chargé de poudre céramique.

Partie 3 - Mécanique des fluides

La conception des pièces plastiques est un processus complexe pour lequel il existe un fort couplage entre les propriétés attendues du produit conçu, les paramètres du procédé de fabrication et les paramètres produit.

Nous allons étudier dans cette partie la fabrication par injection des segments du robot. Rappelons que le cycle physique de transformation de la matière plastique au cours du moulage par injection comprend essentiellement quatre phases :

- ★ la **plastification** - les granulés de polymères solides sont cisailés, fondus puis transportés par une vis de plastification en entrée du moule d'injection.
- ★ le **remplissage** de l'empreinte elle-même contenue dans le moule - il y a progression d'une surface, le front de matière, dans une cavité de forme complexe. On suppose que l'écoulement s'effectue à débit constant.
- ★ le **maintien** et le **refroidissement** - une pression (de maintien) est appliquée à partir du seuil d'injection pendant que le polymère refroidit grâce aux parois du moule régulées en température.
- ★ l'**éjection** de la pièce moulée - lorsque la température de la pièce a atteint en tout point une température dite d'éjection, le moule s'ouvre et la pièce est éjectée.

Les différentes phases de transformation par injection conditionnent non seulement l'aspect mais aussi les propriétés mécaniques des pièces moulées. Nous allons étudier dans cette section la faisabilité des jambes du robot en matière plastique.

Section 3.1 - Écoulement 3D non newtonien

Le comportement des fluides non newtoniens, tels que les plastiques en écoulement dans une empreinte, est régi par un système d'équations différentielles traduisant des bilans de conservation de la masse, quantité de mouvement, quantité de chaleur et la loi de comportement.

On note (x, y, z) (coordonnées cartésiennes) et t (temps) les variables indépendantes. Les variables dépendantes ρ (masse volumique), \vec{v} (vecteur vitesse), $\bar{\sigma}$ (tenseur des contraintes) et T (température) satisfont les équations de conservation suivantes :

⇒ *Équation de continuité*

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (6)$$

⇒ *Équations du mouvement*

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma} \quad (7)$$

⇒ *Équation de la chaleur*

$$\rho \frac{de}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot (-k \vec{\nabla} T) + T\beta \frac{dp}{dt} + \phi_v \quad (8)$$

Le vecteur \vec{f} représente les actions volumiques extérieures. Les fonctions e et ϕ_V désignent respectivement l'énergie interne spécifique et la puissance des efforts internes par unité de volume. On note c_p la capacité calorifique à pression constante telle que $e = c_p T$. Le coefficient k symbolise la conductivité thermique du matériau. Enfin, le terme $T\beta \frac{dp}{dt}$ représente le travail adiabatique réversible. Notons que ce terme est négligeable en écoulement incompressible.

Par ailleurs, on définit le tenseur des contraintes $\overline{\sigma}$ en fonction de la pression au sein du fluide et du tenseur des extra-contraintes $\overline{\tau}$ par la relation :

$$\overline{\sigma} = -p\overline{I} + \overline{\tau}$$

Le tenseur des taux de déformations, noté $\overline{\mathcal{D}}$, est quant à lui défini de la manière suivante :

$$\overline{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\nabla} \vec{v} + \overline{\nabla}^T \vec{v} \right)$$

⇒ La loi de comportement, qui relie contraintes et déformations s'écrit dans le cas d'un fluide non newtonien purement visqueux :

$$\overline{\tau} = 2\eta \overline{\mathcal{D}} - \frac{2}{3}\eta (\overline{\nabla} \cdot \vec{v}) \overline{I} \quad (9)$$

où η représente la viscosité dynamique du fluide et \overline{I} le tenseur identité. Ici, η dépend des conditions d'écoulement (cisaillement) et de la température du fluide.

Les opérateurs classiques gradient³, divergence et laplacien sont notés :

$\overline{\nabla} \cdot$ = divergence d'un vecteur ou d'un tenseur

$\overline{\nabla}$ = gradient d'une fonction

$\overline{\nabla}^T$ = gradient d'un vecteur

Δ = laplacien d'une fonction ou d'un vecteur

Question 3.1.1 Quelles sont les inconnues scalaires et équations disponibles pour décrire un écoulement non newtonien purement visqueux et incompressible ? On rappelle qu'un écoulement est dit incompressible lorsque la masse volumique ρ est considérée constante.

Réponse

Dans le cas d'un écoulement incompressible la masse volumique est connue. On a alors

³L'opérateur $\overline{\nabla}^T$ désigne l'opérateur gradient transposé.

	Inconnues	Équations
	$p \rightarrow 1$	éq. continuité $\rightarrow 1$
	$v_x, v_y, v_z \rightarrow 3$	éq. mouvement $\rightarrow 3$
	$T \rightarrow 1$	éq. chaleur $\rightarrow 1$
Total	5	5

TAB. 3 – Bilan des inconnues et relations.

Question 3.1.2 Pendant la phase de remplissage des empreintes d'un moule, on peut considérer que l'écoulement est incompressible. Que deviennent les équations (6) et (7)? Écrire ces équations en fonction uniquement des variables dépendantes p et \vec{v} .

Réponse

⇒ Équation de continuité

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0}$$

⇒ La loi de comportement

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= -p\bar{I} + 2\eta\bar{D} \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma} &= \vec{\nabla} \cdot (-p\bar{I}) + \vec{\nabla} \cdot (2\eta\bar{D}) \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma} &= -\vec{\nabla}p - p\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \bar{I}}_{\vec{0}} + \vec{\nabla} \cdot \left[\eta \left(\bar{\nabla} \vec{v} + \bar{\nabla}^T \vec{v} \right) \right] \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma} &= -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla} \cdot \left[\eta \left(\bar{\nabla} \vec{v} + \bar{\nabla}^T \vec{v} \right) \right] \end{aligned}$$

⇒ Équations du mouvement

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla} \cdot \left[\eta \left(\bar{\nabla} \vec{v} + \bar{\nabla}^T \vec{v} \right) \right] + \vec{f}}$$

Question 3.1.3 Bien que les débits d'écoulements soient élevés (plusieurs centaines de cm^3/s) pendant la phase de remplissage d'une empreinte, l'effort de pesanteur et les effets dynamiques peuvent être négligés devant les forces de viscosité. C'est une hypothèse courante pour les écoulements confinés⁴ de polymères. Que devient dans ce cas l'équation de conservation de la quantité de mouvement (7)?

Réponse

Si l'on néglige les forces d'inertie par rapport aux forces de viscosité alors le terme $\rho \frac{d\vec{v}}{dt}$ n'est pas pris en compte. De même, si l'on néglige les forces de masse par rapport aux forces de viscosité alors le terme $\vec{f} = \rho \vec{g}$ n'est pas pris en compte. Ainsi,

⁴Écoulements dans un espace fermé.

⇒ Équations du mouvement

$$\vec{0} = -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla} \cdot \left[\eta \left(\overline{\overline{\nabla}} \vec{v} + \overline{\overline{\nabla}}^T \vec{v} \right) \right]$$

La puissance développée par les efforts internes par unité de volume ϕ_V est égale au double produit contracté (noté $:$) du tenseur des contraintes par le tenseur des taux de déformations. On a

$$\begin{aligned} \phi_V &= \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\mathcal{D}}} \\ \Leftrightarrow \phi_V &= \sum_{i,j} \sigma_{ij} \cdot \mathcal{D}_{ij} \end{aligned}$$

On note $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement généralisé. Il est fonction du deuxième invariant du tenseur des taux de déformations et s'écrit

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 \sum_{i,j} \mathcal{D}_{ij}^2}$$

Question 3.1.4 Calculer la puissance ϕ_V en fonction de p , \vec{v} et $\dot{\gamma}$ pour un fluide purement visqueux. Que devient cette puissance lorsque l'écoulement est supposé incompressible.

Réponse

On a, pour un fluide purement visqueux,

$$\begin{aligned} \phi_V &= \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\mathcal{D}}} \\ \Leftrightarrow \phi_V &= \left(-p\overline{\overline{I}} + 2\eta\overline{\overline{\mathcal{D}}} - \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\overline{\overline{I}} \right) : \overline{\overline{\mathcal{D}}} \\ \Leftrightarrow \phi_V &= -p\overline{\overline{I}} : \overline{\overline{\mathcal{D}}} + 2\eta\overline{\overline{\mathcal{D}}} : \overline{\overline{\mathcal{D}}} - \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\overline{\overline{I}} : \overline{\overline{\mathcal{D}}} \\ \Leftrightarrow \phi_V &= -p \sum_{i,j} \delta_{ij} \cdot \mathcal{D}_{ij} + 2\eta \sum_{i,j} \mathcal{D}_{ij} \cdot \mathcal{D}_{ij} - \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \sum_{i,j} \delta_{ij} \cdot \mathcal{D}_{ij} \\ \Leftrightarrow \phi_V &= -p\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \eta\dot{\gamma}^2 - \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})^2 \end{aligned}$$

Si l'écoulement est supposé incompressible, la puissance ϕ_V devient

$$\phi_V = \eta\dot{\gamma}^2$$

Question 3.1.5 Écrire l'équation d'énergie (8) en fonction T , \vec{v} et $\dot{\gamma}$ lorsque l'écoulement est supposé incompressible.

Réponse

La capacité calorifique ainsi que la conductivité thermique des polymères sont généralement fonction de la température. Elles évoluent essentiellement au passage de la température de solidification. On considère donc que pendant la phase très courte de remplissage C_p et k sont constantes.

⇒ Équation de la chaleur

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot (-k\vec{\nabla}T) + \eta\dot{\gamma}^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}T \right) = \vec{\nabla} \cdot (k\vec{\nabla}T) + \eta\dot{\gamma}^2}$$

Section 3.2 - Écoulement de Poiseuille plan

Écoulement de Poiseuille plan newtonien

Nous allons évaluer la pression nécessaire au remplissage des empreintes en supposant l'écoulement plan, stationnaire et incompressible. On suppose également que le problème thermique est découplé du problème dynamique.

Considérons un fluide en écoulement entre deux plaques fixes représentant les parois du moule et distantes d'un entrefer h (voir figures 12 et 13).

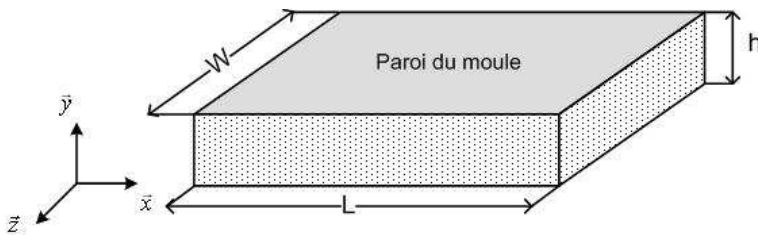


FIG. 12 – Dimensions de l'écoulement.

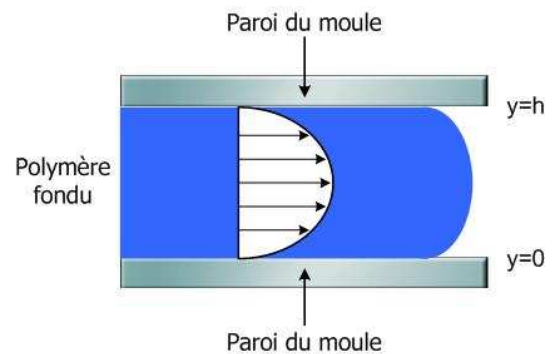


FIG. 13 – Écoulement dans une empreinte.

La rapport h/W est tel ($< 0, 1$) que l'on peut supposer l'écoulement non perturbé par la présence de parois latérales. On suppose qu'il n'y a pas de glissement aux parois du moule. L'écoulement est régi par la perte de charge ΔP constante entre l'entrée ($x = 0$) et l'extrémité de l'empreinte ($x = L$).

Question 3.2.1 Définir les hypothèses cinématiques pour un écoulement de Poiseuille plan. On note u , v et w les composantes de la vitesse \vec{v} en un point (x, y, z) .

Réponse

L'écoulement est plan donc : $\vec{v} \cdot \vec{z} = 0$ et $\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \vec{0}$. De plus, les filets de fluide sont parallèles aux parois donc : $\vec{v} \cdot \vec{y} = 0$. On a finalement pour un écoulement de Poiseuille plan,

$$\boxed{\vec{v} = u(x, y)\vec{x}}$$

Question 3.2.2 Écrire les équations (6) et (7) pour un écoulement de Poiseuille plan et pour un fluide newtonien de viscosité η_0 .

Réponse

⇒ Équation de continuité

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u \equiv u(y)$$

⇒ Équations du mouvement

$$\vec{0} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \left[\eta_0 \left(\overline{\overline{\nabla}} \vec{v} + \overline{\overline{\nabla}}^T \vec{v} \right) \right] \Leftrightarrow \vec{\nabla} p = \eta_0 \Delta \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \eta_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Question 3.2.3 Calculer le profil de la vitesse dans la veine fluide.

Réponse

⇒ Équations du mouvement

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{constante}} = \underbrace{\eta_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{constante}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta P}{L} \\ \eta_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\Delta P}{L} \end{cases} \Leftrightarrow u(y) = -\frac{\Delta P}{2\eta_0 L} y^2 + K_1 y + K_2$$

On note K_i les constantes d'intégration.

⇒ Conditions limites

Il n'y a pas de glissement aux parois, donc

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{u(y) = \frac{\Delta P}{2\eta_0 L} (hy - y^2)}$$

Question 3.2.4 Calculer le débit volumique Q et en déduire l'expression de la perte de charge ΔP en fonction des données du problème.

Réponse

Par définition, on a

$$\begin{aligned} Q &= W \int_0^h u(y) dy \\ \Leftrightarrow Q &= W \frac{\Delta P}{2\eta_0 L} \left[\frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^h \\ \Leftrightarrow Q &= W \frac{\Delta P}{2\eta_0 L} \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right) \\ \Leftrightarrow \boxed{Q} &= \boxed{\frac{\Delta P W h^3}{12\eta_0 L}} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\Delta P} = \frac{12\eta_0 L Q}{W h^3}$$

On suppose que le polymère retenue en partie 2 (i.e satisfaisant aux critères de rigidité et de résistance des segments) possède une viscosité équivalente newtonienne égale à 200 Pa.s à la température d'injection.

Question 3.2.5 Calculer la pression nécessaire pour remplir une pièce d'épaisseur 2,5 mm, de largeur 3,2 cm et de longueur 10 cm et pour un débit $Q = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$.

Réponse

On trouve

$$\boxed{\Delta P_{newt}} = 48 \text{ MPa}$$

Écoulement de Poiseuille plan non newtonien

Nous souhaitons prendre en compte le comportement rhéofluidifiant du polymère en écoulement c'est à dire la dépendance de la viscosité η en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. On suppose maintenant que la viscosité obéit à la loi d'Ostwald suivante

$$\eta(\dot{\gamma}) = K \dot{\gamma}^{n-1}.$$

Les indices K et n sont des constantes caractéristiques du polymère à l'état fondu. Le coefficient n est appelé indice de plasticité ($n \in [0, 1]$) et K consistance.

Question 3.2.6 Calculer le taux de cisaillement généralisé pour un écoulement de Poiseuille plan (voir figures 12 et 13). En déduire la matrice représentative des contraintes lorsque le fluide suit la loi d'Ostwald.

Réponse

✓ On a les mêmes hypothèses cinématiques. D'où

$$\vec{v} = u(y)\vec{x} \Rightarrow \dot{\gamma} = \sqrt{\frac{2 * 2}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \Rightarrow \boxed{\dot{\gamma} = \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|}$$

✓ La matrice représentative des contraintes lorsque le fluide suit la loi d'Ostwald s'écrit

$$\begin{aligned} \left[\overline{\overline{\sigma}}\right] &= \begin{bmatrix} -p & K\dot{\gamma}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ K\dot{\gamma}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \left[\overline{\overline{\sigma}}\right] &= \begin{bmatrix} -p & K\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ K\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \left[\overline{\overline{\sigma}}\right] &= \begin{bmatrix} -p & \pm K\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^n & 0 \\ \pm K\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^n & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = +K\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^n & \text{si } \frac{\partial u}{\partial y} > 0 \\ \sigma_{xy} = -K\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^n & \text{si } \frac{\partial u}{\partial y} < 0 \end{cases}$$

Question 3.2.7 Écrire les équations (7) pour un fluide obéissant à la loi d'Ostwald en écoulement de Poiseuille plan. En déduire l'expression de la vitesse en fonction de ΔP , K , n , L , h et y .

Réponse

⇒ *Équations du mouvement*

Pour un fluide obéissant à la loi d'Ostwald, les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\pm K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^n \right) \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta P}{L} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\pm K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^n \right) = -\frac{\Delta P}{L} \end{cases}$$

D'où

$$\pm \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^n = -\frac{\Delta P}{KL}y + K_3$$

⇒ Sur $[0, h/2]$, $u(y)$ est une fonction croissante donc

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(-\frac{\Delta P}{KL}y + K_3 \right)^{1/n}$$

$$\Rightarrow u(y) = -\frac{n}{n+1} \frac{KL}{\Delta P} \left(-\frac{\Delta P}{KL}y + K_3 \right)^{1/n+1} + K_4$$

⇒ *Conditions limites*

$$\begin{cases} u(0) = 0 & \Leftrightarrow -\frac{n}{n+1} \frac{KL}{\Delta P} K_3^{1/n+1} + K_4 = 0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{h/2} = 0 & \Leftrightarrow \left(K_3 - \frac{\Delta P h}{KL 2} \right)^{1/n} = 0 \end{cases}$$

On trouve

$$K_3 = \frac{\Delta P h}{KL 2} \quad \text{et} \quad K_4 = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\Delta P}{KL} \right)^{1/n} \left(\frac{h}{2} \right)^{1/n+1}$$

⇒ Finalement

$$u(y) = -\frac{n}{n+1} \frac{KL}{\Delta P} \left(\frac{\Delta P}{KL} \right)^{1/n+1} \left(\frac{h}{2} - y \right)^{1/n+1} + \frac{n}{n+1} \left(\frac{\Delta P}{KL} \right)^{1/n} \left(\frac{h}{2} \right)^{1/n+1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u(y) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\Delta P}{KL} \right)^{1/n} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^{1/n+1} - \left(\frac{h}{2} - y \right)^{1/n+1} \right]}$$

Question 3.2.8 Montrer que le débit volumique vaut

$$Q = \frac{n}{2(2n+1)} W h^{(1+2n)/n} \left(\frac{\Delta P}{2KL} \right)^{1/n}.$$

Réponse

$$\begin{aligned}
Q &= 2W \int_0^{\frac{h}{2}} u(y) dy \\
\Leftrightarrow Q &= 2W \frac{n}{n+1} \left(\frac{\Delta P}{KL} \right)^{\frac{1}{n}} \left[y \left(\frac{h}{2} \right)^{\frac{1}{n}+1} + \frac{1}{\frac{1}{n}+2} \left(\frac{h}{2} - y \right)^{\frac{1}{n}+2} \right]_0^{\frac{h}{2}} \\
\Leftrightarrow Q &= 2W \frac{n}{n+1} \left(\frac{\Delta P}{KL} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^{\frac{1}{n}+2} - \frac{1}{\frac{1}{n}+2} \left(\frac{h}{2} \right)^{\frac{1}{n}+2} \right) \\
\Leftrightarrow Q &= 2W \frac{n}{n+1} \left(\frac{\Delta P}{KL} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{h}{2} \right)^{\frac{1}{n}+2} \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{n}+2} \right) \\
\Leftrightarrow Q &= 2W \frac{n}{n+1} \left(\frac{\Delta P}{KL} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{h}{2} \right)^{\frac{1}{n}+2} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right) \\
\Leftrightarrow Q &= 2W \frac{n}{2n+1} \left(\frac{\Delta P}{KL} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{h}{2} \right)^{\frac{1}{n}+2} \\
\Leftrightarrow Q &= W \frac{n}{2(2n+1)} \left(\frac{\Delta P}{2KL} \right)^{\frac{1}{n}} h^{\frac{2n+1}{n}}
\end{aligned}$$

La viscosité du polymère sélectionné en partie 2 suit en fait une loi d'Ostwald telle que $K = 7500 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ et $n = 0,31$ à la température d'injection.

Question 3.2.9 Calculer la pression nécessaire pour remplir une pièce d'épaisseur 2,5 mm, de largeur 3,2 cm et de longueur 10 cm et pour un débit $Q = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$. Commenter le résultat.

Réponse

✓ D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
Q^n &= W^n \left(\frac{n}{2(2n+1)} \right)^n \frac{\Delta P}{2KL} h^{2n+1} \\
\Leftrightarrow \Delta P &= 2KL \left(\frac{Q}{W} \right)^n \left(\frac{2(2n+1)}{n} \right)^n \frac{1}{h^{2n+1}}
\end{aligned}$$

✓ On trouve

$$\Delta P_{Ostwald} = 8,52 \text{ MPa}$$

✓ La perte de charge nécessaire pour remplir l'empreinte est largement surestimée pour une modélisation avec viscosité constante ($\times 6$). Le fait de tenir compte de la variation de la viscosité en fonction du taux de cisaillement est indispensable pour la modélisation du remplissage d'une empreinte.

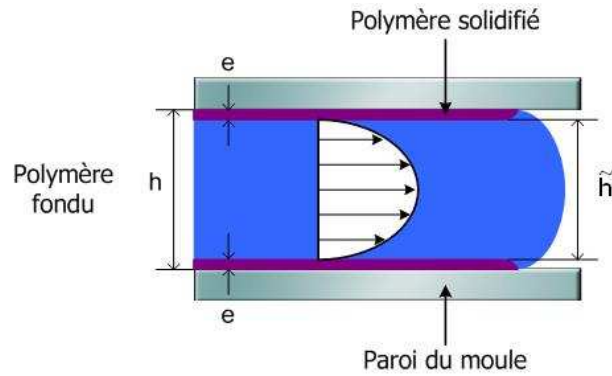


FIG. 14 – Écoulement réel dans une empreinte.

Section 3.3 - Recherche des paramètres d'injection optimum

Au cours de la phase de remplissage le polymère au contact des parois du moule se refroidit et crée une zone solidifiée appelée *gaine solide*. En réalité, l'écoulement s'effectue dans une zone de hauteur réduite \tilde{h} . On note e l'épaisseur de polymère solidifié (voir figure 14).

Il est possible de montrer que l'épaisseur de la gaine solide est fonction du temps de remplissage t_r telle que

$$e = \sqrt{at_r}$$

où a représente la diffusivité thermique du polymère c'est à dire $a = \frac{k}{\rho c_p}$.

Question 3.3.1 Définir la nouvelle perte de charge ΔP , toujours pour un écoulement plan de type Poiseuille et pour un fluide suivant une loi d'Ostwald, en tenant compte de l'existence d'une gaine solide. On note x la longueur réelle de la gaine solide (dans le sens d'écoulement). Exprimer ΔP en fonction de x , h , n , K , a et t_r .

Réponse

Sachant que $\tilde{h} = h - 2e$ et d'après la question précédente, on a

$$\Delta P = 2Kx \left(\frac{Q}{W} \frac{2(2n+1)}{n} \right)^n \frac{1}{(h-2e)^{2n+1}}$$

De plus, on a

$$Q = \frac{W(h-2e)x}{t_r}$$

ce qui conduit au résultat suivant

$$\Delta P = 2Kx \left(\frac{W(h-2e)x}{Wt_r} \frac{2(2n+1)}{n} \right)^n \frac{1}{(h-2e)^{2n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta P = 2Kx^{n+1} \left(\frac{2(2n+1)}{n} \right)^n \frac{1}{t_r^n (h-2\sqrt{at_r})^{n+1}}}$$

Question 3.3.2 Calculer ΔP sachant que le polymère étudié possède une diffusivité thermique $a = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$. On suppose que la gaine solide est présente sur toute la longueur de l’empreinte.

Réponse

L’empreinte de volume $W \times h \times L$ est initialement remplie en $0,08 \text{ s}$ ($\frac{WhL}{Q}$). La perte de charge, pour remplir l’empreinte en $0,08 \text{ s}$ mais ayant une gaine solide d’épaisseur e , est égale à

$$\Delta P_{\text{gaine}} = 9,51 \text{ MPa}$$

Question 3.3.3 Exprimer, pour un fluide suivant la loi d’Ostwald, le taux de cisaillement et la contrainte de cisaillement à la paroi du moule en fonction de ΔP , K , n , h , e et L . Montrer que cette dernière est indépendante de la loi de comportement choisie.

Réponse

- ✓ Cas d’un fluide newtonien
 - Taux de cisaillement à la paroi

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\Delta P}{2\eta_0 L}(h - 2y) \Rightarrow \dot{\gamma}_P = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \Leftrightarrow \dot{\gamma}_P = \frac{\Delta P h}{2\eta_0 L}$$

- Contrainte à la paroi

$$\tau_P = (\overline{\sigma}|_{y=0} \cdot \vec{y}) \cdot \vec{x} \Leftrightarrow \tau_P = \eta_0 \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \Leftrightarrow \tau_P = \eta_0 \dot{\gamma}_P \Leftrightarrow \tau_P = \frac{\Delta P h}{2L}$$

- ✓ Cas d’un fluide suivant la loi d’Ostwald
 - Taux de cisaillement à la paroi

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left[-\frac{\Delta P y}{KL} + \frac{\Delta P h}{2KL} \right]^{1/n} \text{ sur } \left[0, \frac{h}{2} \right] \Rightarrow \dot{\gamma}_P = \left(\frac{\Delta P h}{2KL} \right)^{1/n}$$

- Contrainte à la paroi

$$\tau_P = \eta \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \Leftrightarrow \tau_P = K \dot{\gamma}_P^{n-1} \dot{\gamma}_P \Leftrightarrow \tau_P = K \dot{\gamma}_P^n \Leftrightarrow \tau_P = \frac{\Delta P h}{2L}$$

Question 3.3.4 Le fournisseur matière préconise de ne pas cisailier le polymère en écoulement au delà de 50000 s^{-1} et de $0,3 \text{ MPa}$. Ces préconisations sont-elles respectées ?

Réponse

Le cisaillement le plus élevé se situe au contact de la paroi. Pour les différents modèles on trouve

Le polymère choisi, et modélisé avec une loi d’Ostwald, respecte les préconisations du fournisseur et ne devrait donc pas se dégrader pendant sa transformation.

La figure 15 représente la variation de la pression d’injection en fonction du temps de remplissage d’une pièce injectée de géométrie quelconque.

	Newtonien	Ostwald	Ostwald + gaine solide
$\dot{\gamma}_P$	3000 s ⁻¹	5213 s ⁻¹	7431 s ⁻¹
τ_P	0,6 MPa	0,1 MPa	0,12 MPa

TAB. 4 – Contrainte et cisaillement à la paroi.

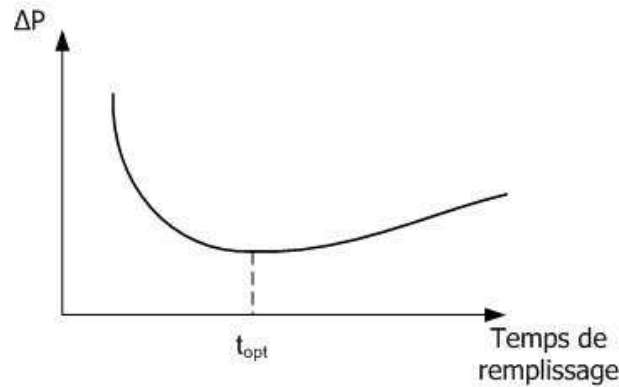


FIG. 15 – Pression d'injection en fonction du temps de remplissage.

Question 3.3.5 Commenter cette courbe et définir le temps optimum de remplissage t_{opt} correspondant à la pression d'injection minimum en fonction de h , a et n dans le cas d'une empreinte de section rectangulaire.

Réponse

- ✓ La première partie de la courbe représente la diminution de la perte de charge due à diminution du débit nécessaire pour remplir une empreinte. Lorsque le temps de remplissage devient trop long, on observe une diminution de l'épaisseur de la veine fluide (augmentation de la gaine solide ($e = \sqrt{at_r}$)). Dans ce cas, il est nécessaire de fournir une plus grande pression pour remplir l'empreinte.
- ✓ Le temps optimum de remplissage t_{opt} vérifie l'équation

$$\left. \frac{dP}{dt_r} \right|_{t_{opt}} = 0.$$

De plus, on a vu que la perte de charge ΔP nécessaire pour remplir une cavité en un temps t_r est de la forme

$$\Delta P = A \frac{1}{t_r^n (h - 2\sqrt{at_r})^{n+1}}$$

avec

$$A = 2KL^{n+1} \left(\frac{2(2n+1)}{n} \right)^n.$$

En dérivant P ou ΔP ($\Delta P = P|_{x=0} - P_{atm}$) par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt_r} &= A \left[(-n)t_r^{-n-1}(h - 2\sqrt{at_r})^{-(n+1)} + t_r^{-n}(-n-1)(h - 2\sqrt{at_r})^{-(n+2)}(-2\sqrt{a})\frac{1}{2\sqrt{t_r}} \right] \\ \Leftrightarrow \frac{dP}{dt_r} &= At_r^{-n-1}(h - 2\sqrt{at_r})^{-(n+2)} \left[(-n)(h - 2\sqrt{at_r}) + (n+1)\sqrt{at_r} \right] \\ \Leftrightarrow \frac{dP}{dt_r} &= At_r^{-n-1}(h - 2\sqrt{at_r})^{-(n+2)} \left[(3n+1)\sqrt{at_r} - nh \right]. \end{aligned}$$

La condition de minimisation sur P s'écrit donc avec $t_r = t_{opt}$

$$(3n+1)\sqrt{at_{opt}} - nh = 0$$

soit

$$t_{opt} = \left(\frac{n}{3n+1} \right)^2 \frac{h^2}{a}.$$

Question 3.3.6 Déterminer le temps d'injection optimum et la pression d'injection optimum pour remplir une empreinte de longueur 10 cm, de largeur 3,2 cm et d'épaisseur 2,5 mm.

Réponse

- ✓ On trouve un temps d'injection optimum

$$t_{opt} = 1,07 \text{ s}.$$

- ✓ La pression optimum P_{opt} s'écrit

$$P_{opt} = 2KL^{n+1} \left(\frac{2(2n+1)}{n} \right)^n \frac{1}{t_{opt}^n (h - 2\sqrt{at_{opt}})^{n+1}} + P_{atm}$$

L'application numérique donne

$$P_{opt} = 6,43 \text{ MPa}$$

La figure 28 représente le maillage d'un segment du robot et le champ de pression de l'empreinte totalement remplie. Le polymère choisi est celui sélectionné en partie 2. L'épaisseur moyenne de la cavité est h , sa longueur L et son volume égale à $L \times W \times h$. Le temps total d'injection est égale à t_{opt} calculé à la question précédente.

Question 3.3.7 Commenter le résultat présenté figure 29.

Réponse

La simulation a été effectuée sur une géométrie qui n'est pas celle modélisée analytiquement ; seuls les volumes injectés sont égaux (8 cm^3). Il est donc normal de constater

une différence entre les résultats analytiques et numériques. La présence de trous, qui représentent des obstacles à l'écoulement, accentue la pression nécessaire pour remplir l'empreinte. Cependant le remplissage s'effectue convenablement avec une répartition des pressions quasiment linéaire. La pression maximale indiquée (pression d'injection) sert d'indicateur pour le choix de la presse qui servira à la fabrication des segments.

Section 3.4 - Refroidissement et déformation d'une pièce injectée

Lorsque le seuil d'injection est gelé (entrée de l'écoulement dans l'empreinte), la phase de refroidissement se poursuit sans qu'aucune pression ne soit appliquée au sein du fluide. On suppose qu'à partir de cet instant, noté t_0 , le polymère dans l'empreinte est immobile. On suppose également que la diffusivité thermique du polymère est constante.

Question 3.4.1 Écrire l'équation (8) lorsque l'empreinte est remplie, à partir de t_0 dans la cavité de dimension $L \times W \times h$.

Réponse

On a

$$\vec{v} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \dot{\gamma} = 0$$

donc

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \cdot (-k \vec{\nabla} T) \\ \Leftrightarrow \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{car } h \ll W \text{ et } L \ll W) \end{aligned}$$

Finalement, l'équation s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} \quad \forall t > t_0$$

On note T_M la température du moule (maintenue constante au cours du temps) et T_I la température du fluide au seuil d'injection. Le temps d'injection est tel que l'on peut supposer qu'en fin de remplissage la température dans la cavité est uniforme et égale à T_I . Dans ces conditions, il est possible de déterminer la solution de l'équation (8) au centre de la pièce :

$$\frac{T_M - T(h/2, t)}{T_M - T_I} = \frac{8}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2 a t}{h^2}\right)$$

Question 3.4.2 Calculer le temps de refroidissement, t_{ref} , temps au bout duquel l'écart de température du polymère a chuté d'au moins 50% en tout point de la pièce injectée.

Réponse

Le point le plus chaud est situé au centre de la pièce. On cherche donc t_{ref} vérifiant

$$\frac{1}{2} = \frac{8}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2 a t_{ref}}{h^2}\right).$$

Il vient donc

$$t_{ref} = -\frac{h^2}{a\pi^2} \ln \frac{\pi}{16}.$$

L'application numérique donne

$$t_{ref} = 8 \text{ s}.$$

On note qu'en tenant compte du changement de phase du polymère le temps réel de refroidissement serait plus long.

On se propose d'utiliser la méthode des différences finies pour approcher le champ de température d'une plaque de faible épaisseur initialement à la température T_I et soumis à la température T_M aux parois.

Question 3.4.3 Proposer une discrétisation de l'équation différentielle (8) et ses conditions aux limites et écrire le système linéaire associé.

Réponse

On construit une suite $T_i^n \simeq T(y_i, t^n)$ telle que (schéma des différences finies explicite) :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = a \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta y^2}$$

En notant $r = a \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$, le schéma itératif peut s'écrire :

$$\forall i \in [2, N-1] \quad T_i^{n+1} = rT_{i-1}^n + (1-2r)T_i^n + rT_{i+1}^n$$

Il faut résoudre le système d'équations linéaires :

$$[T]^{n+1} = A [T]^n$$

avec $[T]^n = [T_M \quad T_2^n \quad \dots \quad T_{N-1}^n \quad T_M]^T$ et $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -r & 1-2r & -r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -r & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -r & 1-2r & -r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Pour trouver une solution convergente, il faut que $r < \frac{1}{2}$.

La pièce est éjectée du moule à la température supposée uniforme T_E . La température T_S de solidification du matériau est supérieure à T_E et est atteinte au cours du refroidissement dans le moule. On suppose qu'en dessous de T_S le polymère se comporte comme un solide élastique isotrope. On note E le module d'Young, ν le coefficient de Poisson et α le coefficient de dilatation du polymère.

Question 3.4.4 Écrire la loi de comportement reliant le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ et le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$ de la pièce solide.

Réponse

Notons $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ et $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ les coefficients de Lamé.
On a alors

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \lambda \text{trace}(\bar{\varepsilon})\bar{I} + 2\mu\bar{\varepsilon} - \frac{E}{(1-2\nu)}\alpha\Delta T\bar{I} \\ \Leftrightarrow \bar{\varepsilon} &= \frac{1+\nu}{E}\bar{\sigma} - \frac{\nu}{E}\text{trace}(\bar{\sigma})\bar{I} + \alpha\Delta T\bar{I} \end{aligned}$$

Question 3.4.5 En supposant que le contact entre le polymère et la cavité est collant, calculer les contraintes et les déformations dans la pièce juste avant son éjection du moule.

Réponse

Le contact collant entre le polymère et la cavité est caractérisé par

$$\bar{\varepsilon} = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\varepsilon}_m + \bar{\varepsilon}_{th} = \bar{0} \quad \text{avec} \quad \bar{\varepsilon}_{th} = \alpha(T_E - T_S)\bar{I}$$

et

$$\bar{\sigma} = -\frac{E}{(1-2\nu)}\alpha\Delta T\bar{I}.$$

Après éjection du moule, la pièce subit un refroidissement libre. Notons T_A la température ambiante et h_T le coefficient de transfert thermique du polymère.

Question 3.4.6 Écrire l'équation de la chaleur (8) et les conditions aux limites permettant de décrire le refroidissement libre d'une plaque de dimension $L \times W \times h$ initialement à la température T_E .

Réponse

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} & \forall t > t_1 \quad \forall y \in [0, h] \\ T(y, t) = T_E & \forall t \leq t_1 \quad \forall y \in [0, h] \\ +k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h_T(T(0, t) - T_A) & \forall t > t_1 \\ -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=h} = h_T(T(h, t) - T_A) & \forall t > t_1 \end{array} \right.$$

Question 3.4.7 La figure 30 présente les déformations de la pièce après éjection des empreintes et refroidissement à l'air libre. Le matériau étudié est toujours celui choisi dans la partie 2. Commenter ce résultat et discuter le choix du matériau.

Réponse

Les déformations maximums observées sur la pièce après refroidissement sont importantes. Les extrémités du segments se déforment de 0,5 mm ce qui pourrait altérer le fonctionnement du robot voire rendre impossible son montage. Il existe plusieurs voies possibles pour remédier à ce problème. Il est possible de modifier la conception des segments afin de limiter les déformations en sortie de moule (ajout de nervures, modification des épaisseurs ..). On peut également optimiser les paramètres d'injection (température de refroidissement, temps de maintien, temps de refroidissement...). Il est enfin possible de faire un autre choix de matériau moins sensible aux retraits en sortie de moule. Il faudra néanmoins veiller à respecter les propriétés mécaniques minimales nécessaire pour garantir une rigidité satisfaisante des segments.

Annexes

Annexe 1 - Figures

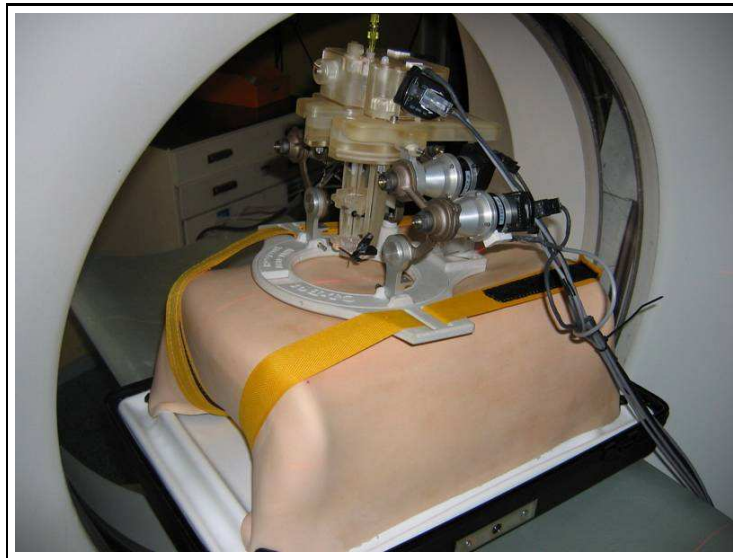


FIG. 16 – Position du robot sur un mannequin.

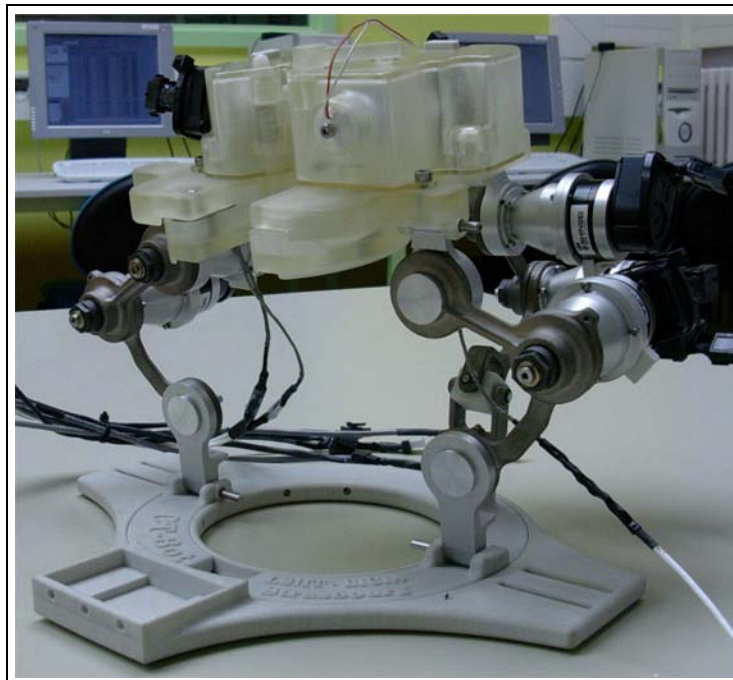


FIG. 17 – Prototype du **CT-Bot**.

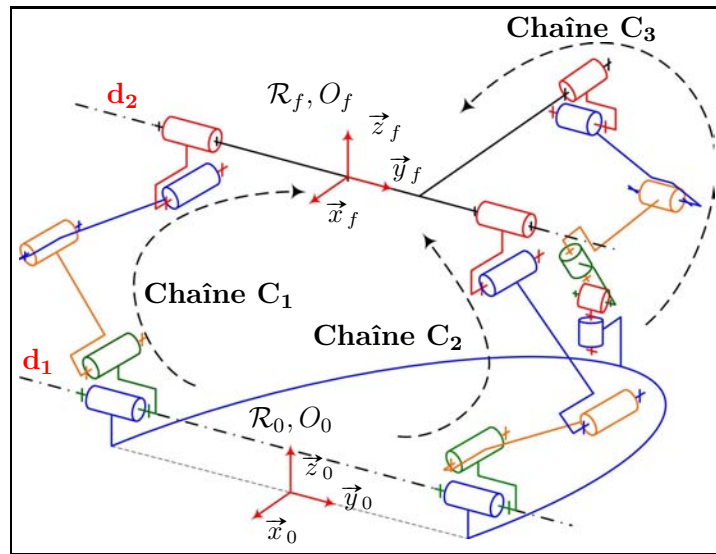


FIG. 18 – Schéma cinématique du robot.

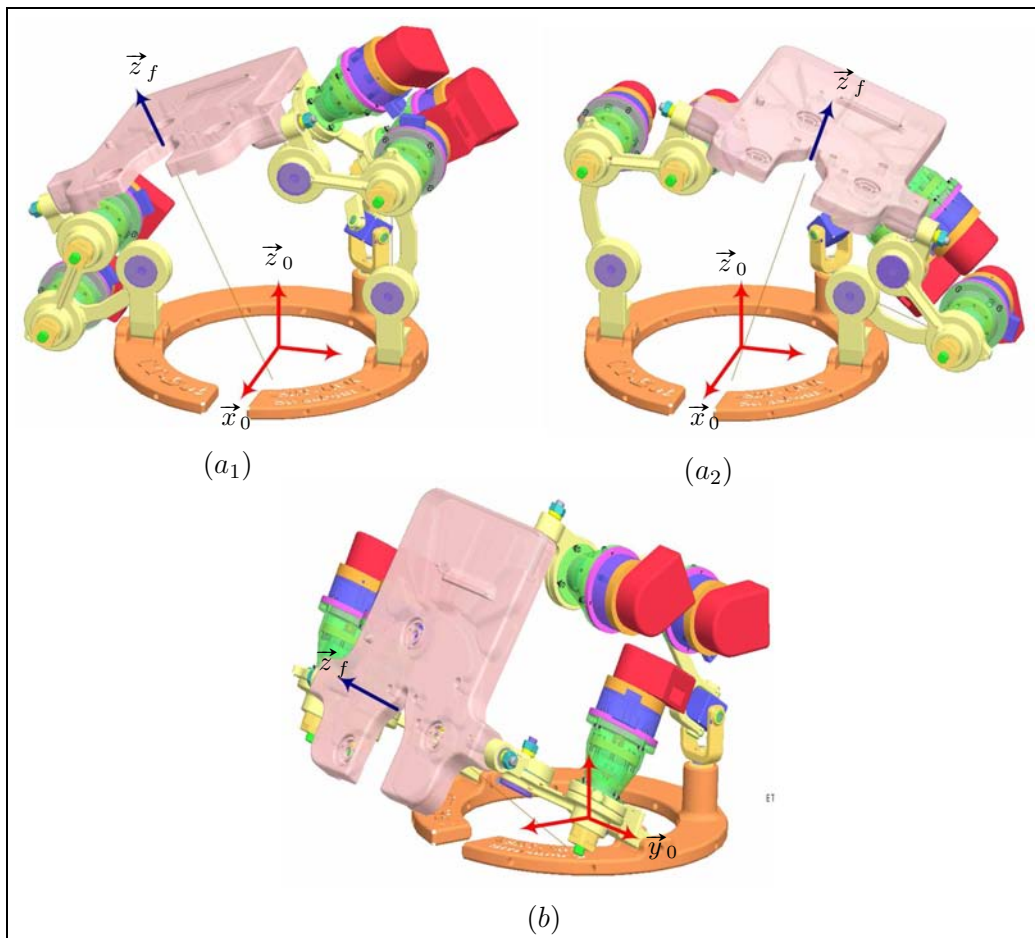


FIG. 19 – Débattements du CT-Bot.

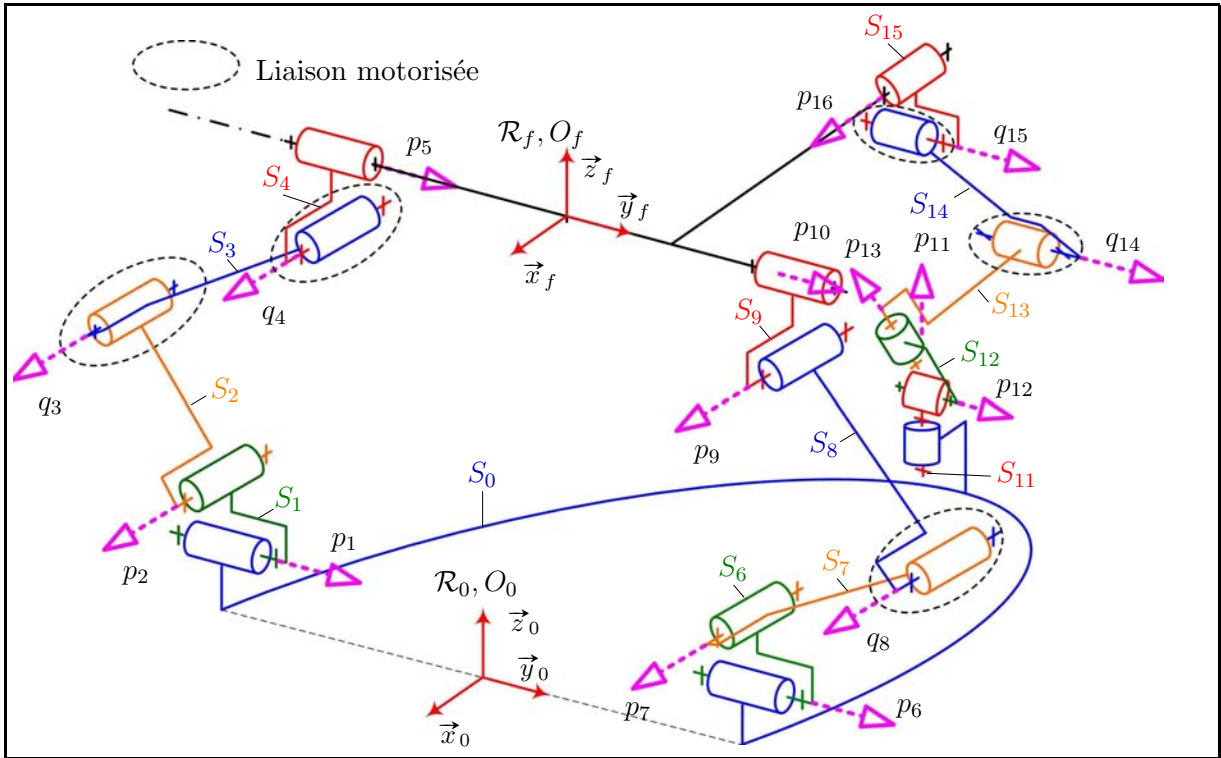


FIG. 20 – Paramétrage du CT-Bot.

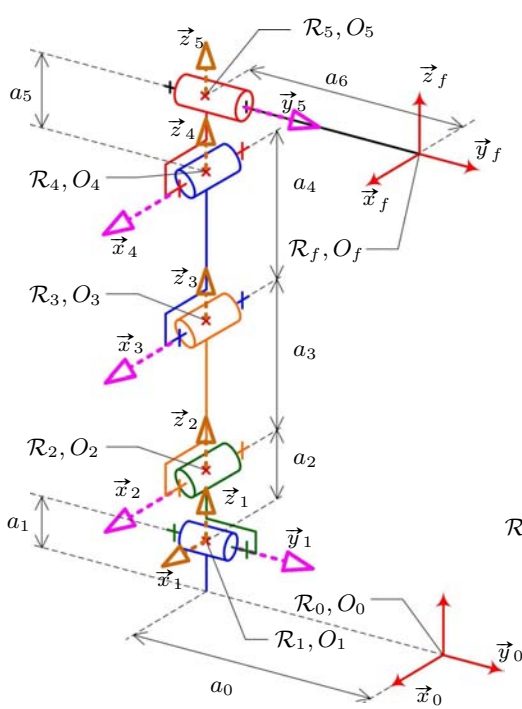


FIG. 21 – Définition des repères articulaires de la chaîne C_1 en configuration étendue.

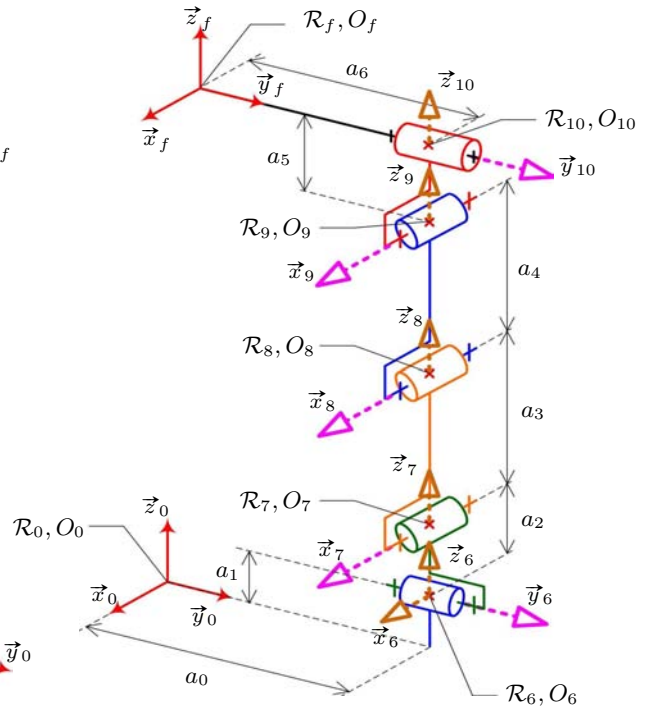


FIG. 22 – Définition des repères articulaires de la chaîne C_2 en configuration étendue.

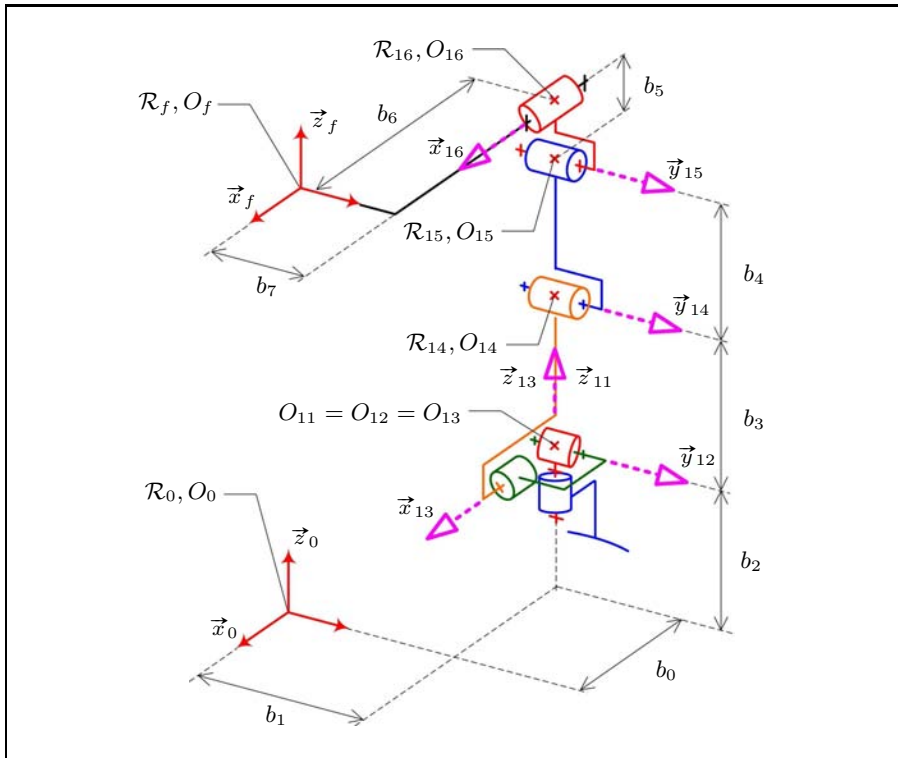


FIG. 23 – Définition des repères articulaires de la chaîne C_3 en configuration étendue.

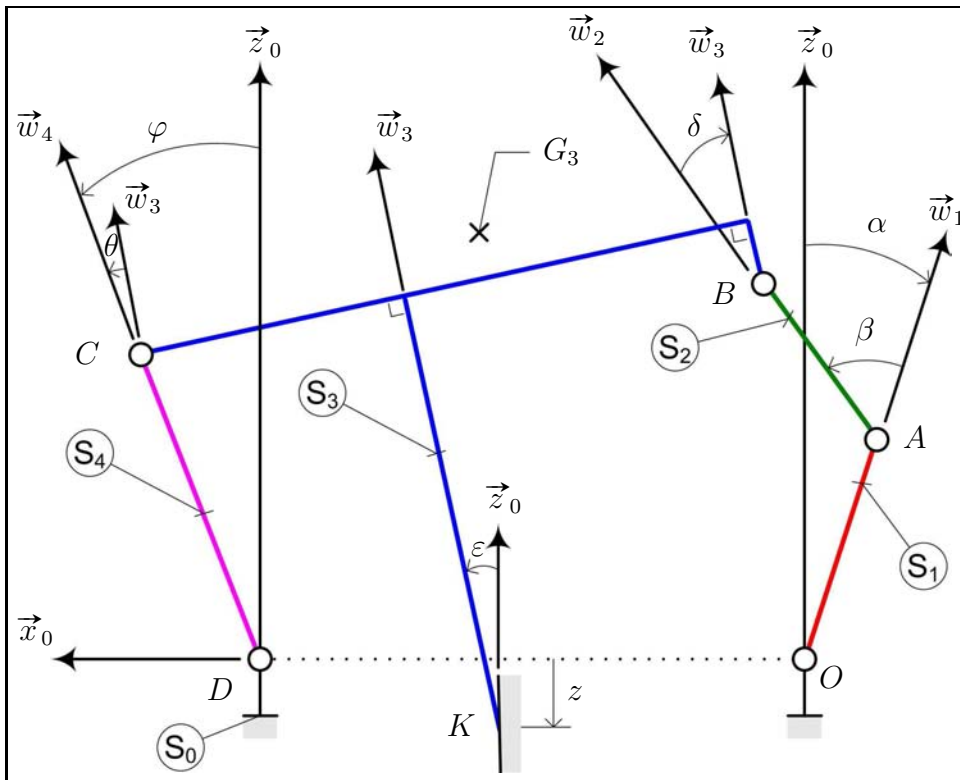


FIG. 24 – Configuration spécifique du robot.

Annexe 2 - Torseurs unitaires

- ✓ On note $\vec{\Omega}_{i/i-1}$ le vecteur vitesse instantanée de rotation du solide i par rapport au solide $i - 1$. On note :

$$\vec{\Omega}_{i/i-1} = \omega_i \underline{\vec{\Omega}}_{i/i-1}$$

où ω_i désigne la vitesse angulaire du solide i par rapport au solide $i - 1$ et $\underline{\vec{\Omega}}_{i/i-1}$ le vecteur vitesse instantanée de rotation *unitaire*⁵ du solide i par rapport au solide $i - 1$.

- ✓ On note $\vec{V}_{M,i/i-1}$ le vecteur vitesse linéaire du solide i par rapport au solide $i - 1$ exprimé en un point M quelconque.
- ✓ On désigne par $\mathcal{V}_{i/i-1}$ le torseur cinématique du solide i en mouvement par rapport au solide $i - 1$. Exprimé en un point M quelconque, ce torseur s'écrit :

$$\mathcal{V}_{i/i-1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{i/i-1} \\ \vec{V}_{M,i/i-1} \end{array} \right\}_M . \quad (\text{Tors-10})$$

- ✓ On désigne par $\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1}$ le torseur cinématique *unitaire* du solide i en mouvement par rapport au solide $i - 1$. Exprimé en un point M quelconque, ce torseur s'écrit :

$$\underline{\mathcal{V}}_{i/i-1} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\vec{\Omega}}_{i/i-1} \\ \frac{1}{\omega_i} \vec{V}_{M,i/i-1} \end{array} \right\}_M . \quad (\text{Tors-11})$$

⁵Le choix du sens de $\underline{\vec{\Omega}}_{i/i-1}$ détermine le sens positif de rotation du solide i par rapport au solide $i - 1$.

Annexe 3 - Torseur réciproque \mathcal{V}^r à une liaison pivot

Pour préparer la résolution du mécanisme complet, on considère le cas élémentaire de deux solides i et $i - 1$ interconnectés par une liaison pivot \mathcal{L}_i d'axe $(O_i, \vec{\Omega}_{i/i-1})$, comme indiqué sur la figure 25.

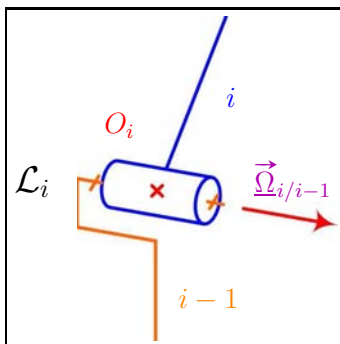


FIG. 25 – Liaison pivot \mathcal{L}_i .

- ✓ La liaison pivot \mathcal{L}_i est décrite par un torseur cinématique unitaire de la forme (Tors-11) avec :

$$\begin{cases} \omega_i = \dot{p}_i & \text{si } \mathcal{L}_i \text{ est passive} \\ \omega_i = \dot{q}_i & \text{si } \mathcal{L}_i \text{ est motorisée} \end{cases}$$

- ✓ Le torseur unitaire représentant la liaison pivot \mathcal{L}_i a pour expression en O_i :

$$\mathcal{V}_{i/i-1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{i/i-1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_i}.$$

- ✓ On note \otimes l'opérateur de comoment de deux torseurs. Un torseur \mathcal{V}^r est dit réciproque au torseur \mathcal{V} si et seulement si $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^r = 0$.

- ✓ Les composantes d'un torseur unitaire et réciproque à un torseur \mathcal{V} sont notées :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^r &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \frac{1}{\|\vec{F}\|} \vec{\mathcal{M}}_M \end{array} \right\}_M & \text{avec } \vec{F} = \frac{\vec{F}}{\|\vec{F}\|} & \text{si } \|\vec{F}\| \neq 0 \\ \mathcal{V}^r &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_M \end{array} \right\}_M & \text{avec } \vec{\mathcal{M}} = \frac{\vec{\mathcal{M}}}{\|\vec{\mathcal{M}}\|} & \text{si } \|\vec{F}\| = 0 \end{aligned}$$

- ✓ Le torseur des actions du solide $i - 1$ agissant sur le solide i est un torseur réciproque au torseur cinématique $\mathcal{V}_{i/i-1}$. On le note $\mathcal{V}_{i/i-1}^r$. Ainsi, le comoment $\mathcal{V}_{i/i-1} \otimes \mathcal{V}_{i/i-1}^r$ correspond à la puissance développée par les actions de $i - 1$ sur i dans le mouvement de i par rapport à $i - 1$. Si la liaison entre les solides $i - 1$ et i est parfaite, alors cette puissance est nulle.

Annexe 4 - Modélisation numérique

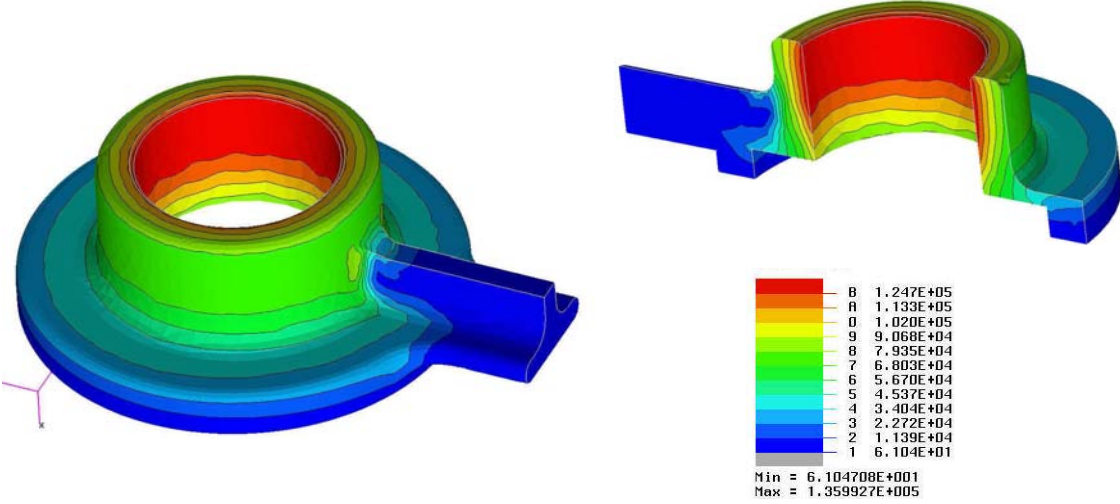


FIG. 26 – Contrainte de Von Mises (10^3Pa).

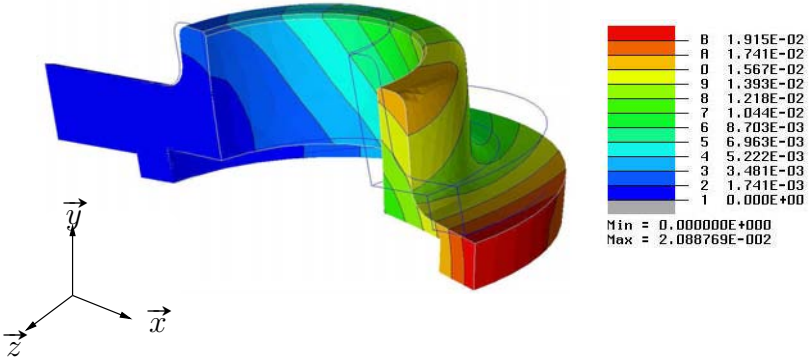


FIG. 27 – Déplacements (mm) et géométrie déformée ($\times 100$).

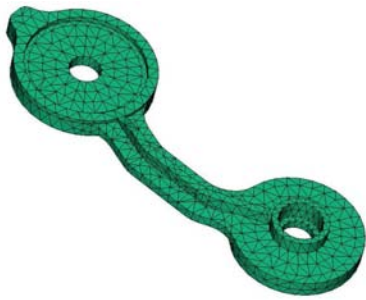


FIG. 28 – Maillage d'un segment.

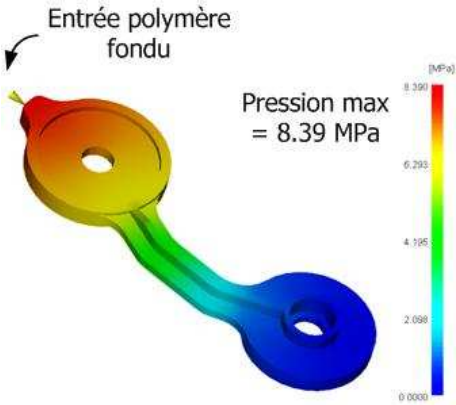


FIG. 29 – Champs de pression.

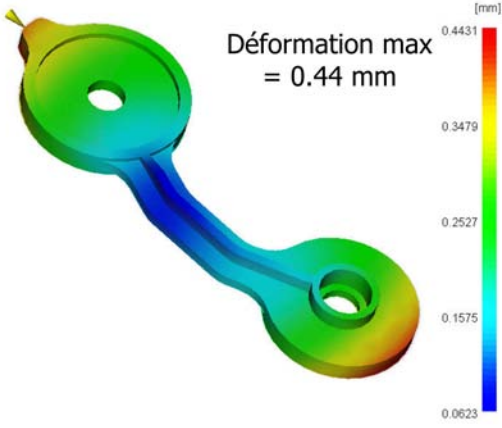


FIG. 30 – Déformation d'un segment en sortie de moule

Commentaires sur l'épreuve de mécanique des systèmes et des milieux déformables

Agrégation de mécanique - Session 2007

1 Présentation de l'épreuve

Le sujet a été construit autour d'un robot médical baptisé **CT-Bot** en cours de développement destiné à la réalisation de procédures abdominales minimalement invasives. Le champ d'application des procédures minimalement invasives va du diagnostic au traitement de tumeurs localisées dans des organes internes. Ces modalités thérapeutiques présentent notamment l'intérêt d'être moins douloureuses pour le patient que la chirurgie classique et permettent ainsi un rétablissement plus rapide.

Le sujet comportait **trois parties** indépendantes. La **première partie** était consacrée à la modélisation cinématique du **CT-Bot** en vue de pré-dimensionner ses actionneurs. La démarche de résolution utilisée était basée sur l'écriture du principe des puissances virtuelles à l'aide de torseurs réciproques judicieusement choisis. La définition des notions de torseurs unitaires et réciproques était fournie en annexes. Cette méthode de résolution est classique en robotique et permet d'obtenir très directement les modèles cinématiques. La section 1.5, consacrée à l'analyse d'une configuration spécifique du mécanisme pouvait être traitée indépendamment du reste de la première partie.

L'étude du dimensionnement partiel des segments du robot était réalisée en **seconde partie**. La création d'un modèle analytique simplifié suivi de l'analyse d'un modèle 3D éléments finis était demandés. L'étude de ces deux modèles permettait de définir les caractéristiques mécaniques attendues des segments. L'analyse de la fabrication de ces segments par un procédé d'injection était abordée dans la **troisième partie**. Cette étude permettait de faire un choix de matériau répondant à la fois aux exigences de rigidité (définies en partie 2) et aux exigences de fabrication.

2 Commentaires

2.1 Mécanique des systèmes indéformables

Le système proposé permet de positionner et d'orienter une droite de l'espace passant par un point O_f et de vecteur directeur \vec{z}_f . Cette droite (O_f, \vec{z}_f) sert de support à un instrument chirurgical de type aiguille. Ce mécanisme possède une architecture parallèle à **cinq degrés de liberté** : trois pour la position de O_f et deux angles α et β pour l'orientation de \vec{z}_f .

L'objectif de cette partie était de réaliser une modélisation cinématique du mécanisme en vue de pré-dimensionner ses actionneurs.

Cette partie de l'épreuve proposait l'utilisation du concept de torseurs réciproques pour obtenir efficacement le modèle cinématique du robot parallèle étudié. Bien qu'*a priori* non connue des candidats, cette approche ne faisait appel qu'à des notions simples sur les torseurs. Malgré une annexe très complète sur la notion de torseurs unitaires et réciproques, très peu de candidats sont parvenus à traiter cette partie en conservant une démarche rigoureuse. Si l'utilisation calculatoire des torseurs ne semble pas poser de difficultés à la plupart des candidats, leur interprétation géométrique reste en revanche un problème pour la majorité. Notons cependant l'existence de quelques rares copies proposant des réponses justifiées et analysées avec une grande rigueur.

Il est surprenant de constater que le degré d'hyperstaticité d'un mécanisme formé de solides rigides reste une notion très discriminante. Plus d'un tiers des candidats ne sait pas calculer le degré d'hyperstaticité en 3D et près des trois quarts ne parvient pas à le faire en 2D, sans compter les valeurs aberrantes annoncées par certains allant de 10 à 63 pour le cas 3D voire négatives pour le cas 2D.

La démarche de travail pour l'étude statique d'un système de solides (isolement) n'est pas maîtrisée par une grande majorité de candidats. Seuls huit candidats sur les 35 ayant abordé cette partie utilisent de façon satisfaisante les théorèmes généraux en statique.

2.2 Mécanique des solides déformables

Cette partie portait sur l'étude des conditions de montage des articulations motorisées du robot construites à partir de moyeux expansibles. Les conditions de montage des segments du robot s'apparentent à un chargement appliqué à un composant ayant la forme d'un cylindre creux à paroi épaisse. Il s'agissait de construire, dans un premier temps, le modèle analytique de calcul des contraintes et déformations d'un tel composant. Ces résultats étaient ensuite appliqués aux conditions de montage des segments du robot. Dans un second temps, il s'agissait de préciser la mise en données d'un modèle de simulation numérique par la méthode des éléments finis et de faire l'analyse comparative des résultats de simulation avec ceux obtenus à partir du modèle analytique simplifié.

Cette partie a été plutôt bien traitée par les candidats, probablement parce qu'elle correspondait à une application très classique du cours de mécanique des milieux continus. Les erreurs de raisonnement ont été peu nombreuses. Il n'en va pas de même pour les erreurs de calcul et seuls de très rares candidats ont su résoudre ce problème sans faute. On peut également regretter que les candidats ne simplifient pas les expressions littérales de leurs résultats et ne soient pas alertés par des erreurs grossières d'homogénéité et des valeurs numériques aberrantes. La partie portant sur la mise en données et l'analyse d'un modèle de simulation numérique a été traitée de manière satisfaisante par les candidats qui l'ont abordée.

2.3 Mécanique des fluides

La réalisation des segments du robot en polymère est une solution très intéressante pour l'application médicale visée. Cette partie de l'épreuve s'intéressait aux phénomènes d'écoulement intervenant dans le procédé d'injection d'un segment du robot. Elle introduisait de manière très progressive les notions utiles pour traiter le problème dans le cas

de fluides non newtoniens.

Cette partie a été abordée par les deux tiers des candidats. Si les équations de la mécanique pour des fluides newtoniens sont connues par la plupart de ceux qui ont abordé cette partie, l'introduction d'une viscosité non constante a posé de graves difficultés aux candidats qui sont rapidement déstabilisés et malheureusement renoncent dès l'apparition des premières difficultés. Il faut toutefois noter que les candidats ont montré une meilleure maîtrise des opérateurs classiques en mécanique des fluides que lors des sessions précédentes.

Les sections 3 et 4 de cette partie portant sur la recherche des paramètres d'injection optimum puis sur l'étude du refroidissement et déformation d'une pièce injectée non pas du tout été abordées par les candidats.

3 Bilan global

153 candidats ont composé pour cette épreuve. L'histogramme des notes ci-dessous montre que :

- 118 candidats avec une note supérieure à 10
- 64 candidats ont obtenu une note supérieure à 15.
- 43 candidats ont une note inférieure à 5

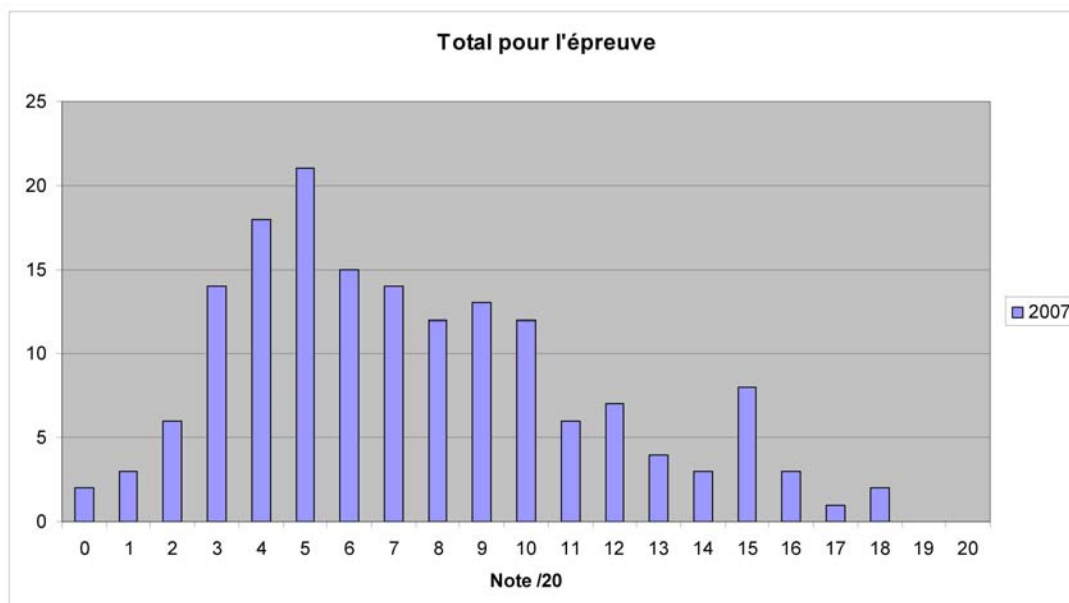


FIG. 1 – Moyenne : 7.5/20 Écart-type : 3.8/20.