

# ETUDE DU COMPORTEMENT ROUTIER D'UN POIDS LOURD TRACTANT UNE CITERNE

## *Eléments de corrigé*

---

### Modélisation 2D

---

#### **A Etude du comportement dynamique du fluide dans la citerne**

A.I.1 Simplifier l'équation de Bernoulli, en considérant un écoulement plan ( $O, \vec{y}, \vec{z}$ ) ayant de faibles vitesses d'écoulement.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g y + \frac{p}{\rho} = f(t)$$

A.I.2 En exprimant de deux manières différentes la vitesse d'une particule de la surface, écrire la relation qui lie  $\delta$  à  $\Phi$ .

Sur la surface  $y_s = \delta(z, t)$ , la vitesse d'une particule est définie d'une part par :

$$v_s(y_s, z, t) = \frac{\partial \delta(z, t)}{\partial t}$$

et d'autre part par :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \text{ d'où } v_s = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=y_s}$$

ce qui implique :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \delta}{\partial t}$$

Implicitement pour ce qui suit  $y$  correspond à la valeur  $y$  de surface.

A.I.3 En utilisant l'équation de Bernoulli au niveau de la surface libre, ainsi que l'équation précédente écrire une relation qui lie  $\Phi$ ,  $t$ ,  $g$  et  $y$ .

On dérive l'équation de Bernoulli par rapport au temps et on remplace  $\frac{\partial \delta}{\partial t}$  par  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  on trouve :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

$\rho_s$  étant constant sur la surface.

A.1.4 On cherche une solution de cette équation sous la forme :  $\Phi(y, z, t) = \psi(y) \zeta(z) G(t)$  où les fonctions  $\psi$  et  $\zeta$  ne dépendent respectivement que de  $y$  et de  $z$ . Traduire l'équation d'incompressibilité par une équation différentielle en  $\psi$  et une équation différentielle en  $\zeta$ .

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \zeta G(t) + \psi G(t) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = 0 \text{ ceci est vrai quel que soit } t.$$

$$\frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = 0 \text{ à condition que } \psi \neq 0 \text{ et } \zeta \neq 0$$

Pour que cette équation soit vérifiée,  $\psi$  et  $\zeta$  étant des fonctions de variables indépendantes les

termes  $\frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$  et  $\frac{1}{\zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}$  doivent être des constantes d'où :

$$\frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \lambda^2 \text{ et } \frac{1}{\zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = -\lambda^2 \text{ ou } \frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\lambda^2 \text{ et } \frac{1}{\zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = \lambda^2$$

A.1.5 Donner les ensembles de solutions possibles de ces deux équations différentielles.

$$\psi(y) = A e^{\lambda y} + B e^{-\lambda y} \text{ et } \zeta(z) = C \sin \lambda z + D \cos \lambda z \text{ ou } \psi(y) = C \sin \lambda y + D \cos \lambda y \text{ et } \zeta(z) = A e^{\lambda z} + B e^{-\lambda z}$$

A.1.6 On pose  $\psi(y) = A e^{\lambda y} + B e^{-\lambda y}$  et  $\zeta(z) = C \sin \lambda z + D \cos \lambda z$  où  $A, B, C, D$  et  $\lambda$  sont des constantes. A partir des conditions aux limites sur les parois du réservoir déterminer l'ensemble des solutions de  $\psi(y) \cdot \zeta(z)$  en fonction de 2 constantes seulement.

Conditions aux limites sur les parois verticales  $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$  pour  $y = +a_r$  ou  $-a_r$ , d'où :

$$(A e^{\lambda y} + B e^{-\lambda y})(\lambda C \cos \lambda a_r \pm \lambda D \sin \lambda a_r) = 0$$

1<sup>er</sup> cas  $C = 0$  avec  $\lambda = \frac{n\pi}{a_r}$  quelque soit  $D$

2<sup>ème</sup> cas  $D = 0$  avec  $\lambda = \frac{(2n-1)\pi}{2a_r}$  quelque soit  $C$

Conditions aux limites sur le fond :  $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$  pour  $z = -h_r$

$$(\lambda A e^{-\lambda h_r} - \lambda B e^{\lambda h_r})(C \sin \lambda z + D \cos \lambda z) = 0$$

$$A = B e^{2\lambda h_r}$$

On a deux fonctions possibles :

$$\phi_1 = B D (e^{\lambda(y+2h_r)} + e^{-\lambda y}) \cos \lambda z \quad (\text{antisymétrique}) \quad \text{avec } \lambda = \frac{n\pi}{a_r}$$

$$\text{et } \phi_2 = B C (e^{\lambda(y+2h_r)} + e^{-\lambda y}) \sin \lambda z \quad (\text{symétrique}) \quad \text{avec } \lambda = \frac{(2n-1)\pi}{2a_r}$$

A.I.7 Pour déterminer le mouvement de la surface dans le cas qui nous intéresse, on pose  $G(t) = \cos \omega t$ . En reprenant l'équation obtenue à la question A.I.3, déterminer les valeurs de  $\omega$  pour le premier mode propre antisymétrique (en cosinus).

$$\Phi(y, z, t) = B D (e^{\lambda(y+2h_r)} + e^{-\lambda y}) \cos \lambda z \cos \omega t \quad \text{que l'on remplace dans } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

$$-(\omega^2 B D (e^{\lambda(y+2h_r)} + e^{-\lambda y}) \sin \lambda z) \cos \omega t + g (\lambda B D (e^{\lambda(y+2h_r)} - e^{-\lambda y}) \sin \lambda z) \cos \omega t = 0$$

$$\omega^2 = g \lambda \frac{e^{3h_r \lambda} - e^{-\lambda h_r}}{e^{3h_r \lambda} + e^{-\lambda h_r}} \quad \text{avec } \lambda = \frac{\pi}{2a}$$

A.I.8 En déduire l'équation de la surface pour ce premier mode.

On a  $\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  soit :

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \lambda B D (e^{3h_r \lambda} - e^{-\lambda h_r}) \sin \lambda z \cos \omega t$$

$$\delta = \frac{\lambda}{\omega} B D (e^{3h_r \lambda} - e^{-\lambda h_r}) \sin \lambda z \sin \omega t$$

$$\text{avec } \lambda = \frac{n\pi}{a}$$

Les 2 constantes dépendent des positions et vitesses initiales de la surface du fluide. Si ces valeurs restent petites, conformément aux hypothèses, on pourra dans un premier temps assimiler l'équation de la "surface" du fluide à une droite.

## B Etude dynamique du renversement : Analogie mécanique, modélisation du déplacement du fluide par un modèle de pendule rigide

B.I.1 Ecrire la relation qui traduit le contact en A en liant le paramètre  $z_3$  à  $\psi_3$  et  $\psi_4$ .

$$\overrightarrow{O^*_3 A} \cdot \overrightarrow{z_3} = 0$$

$$\overrightarrow{O^*_3 A} = \overrightarrow{O^*_3 B} + \overrightarrow{BA} = z_3 \overrightarrow{z_3} - \bar{b} \overrightarrow{y_4}$$

$$(z_3 \overrightarrow{z_3} - \bar{b} \overrightarrow{y_4}) \cdot \overrightarrow{z_3} = 0$$

$$\bar{b} \cos(\overrightarrow{y_4}, \overrightarrow{z_3}) = \bar{b} \cos((\overrightarrow{y_4}, \overrightarrow{z_4}) + (\overrightarrow{z_4}, \overrightarrow{z_3})) = \bar{b} \cos(-\frac{\pi}{2} + (\psi_3 - \psi_4)) = -\bar{b} \sin(\psi_3 - \psi_4)$$

$$z_3 - \bar{b} \sin(\psi_4 - \psi_3) = 0$$

B.I.2 Exprimer en  $O_2$  le torseur des actions des pneumatiques sur l'essieu en fonction des données, de  $y_2$ ,  $\psi_2$ , et de leurs dérivées. On rappelle que  $\psi_2$  peut être considéré comme petit.

$$\{\overrightarrow{\mathcal{F}}_{1 \rightarrow 2}\} : \begin{cases} \overrightarrow{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \overrightarrow{M}_{1 \rightarrow 2}(O_2) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{R}_{1 \rightarrow 2} = \overrightarrow{F}_{g1 \rightarrow 2} + \overrightarrow{F}_{d1 \rightarrow 2} = -k_p(P'_g P_g - y_{r0}) \overrightarrow{y_0} - c_p \frac{d(P'_g P_g)}{dt} \overrightarrow{y_0} - k_p(P'_d P_d - y_{r0}) \overrightarrow{y_0} - c_p \frac{d(P'_d P_d)}{dt} \overrightarrow{y_0}$$

$$P'_g P_g = y_2 - \frac{e_v}{2} \psi_2 \quad P'_d P_d = y_2 + \frac{e_v}{2} \psi_2$$

$$\frac{d(P'_g P_g)}{dt} = \dot{y}_2 - \frac{e_v}{2} \dot{\psi}_2 \quad \frac{d(P'_d P_d)}{dt} = \dot{y}_2 + \frac{e_v}{2} \dot{\psi}_2$$

$$\overrightarrow{R}_{1 \rightarrow 2} = -k_p(y_2 - \frac{e_v}{2} \psi_2 - y_{r0}) \overrightarrow{y_0} - c_p(\dot{y}_2 - \frac{e_v}{2} \dot{\psi}_2) \overrightarrow{y_0} - k_p(y_2 + \frac{e_v}{2} \psi_2 - y_{r0}) \overrightarrow{y_0} - c_p(\dot{y}_2 + \frac{e_v}{2} \dot{\psi}_2) \overrightarrow{y_0}$$

$$\overrightarrow{R}_{1 \rightarrow 2} = -2(k_p(y_2 - y_{r0}) + c_p \dot{y}_2) \overrightarrow{y_0}$$

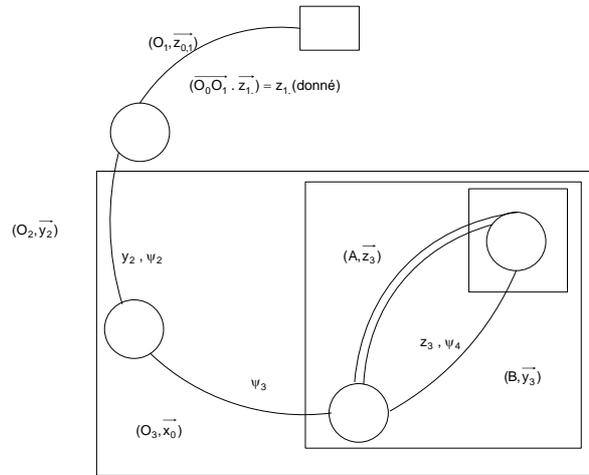
$$\overrightarrow{M}_{1 \rightarrow 2}(O_2) = -(k_p \frac{e_v^2}{2} \psi_2 \overrightarrow{x_0} + c_p \frac{e_v^2}{2} \dot{\psi}_2 \overrightarrow{x_0})$$

B.I.3 Ecrire les conditions concernant les actions mécaniques, donnant les limites de décollement des roues.

$$-k_p(y_2 - \frac{e_v}{2} \psi_2 - y_{r0}) - c_p(\dot{y}_2 - \frac{e_v}{2} \dot{\psi}_2) < 0 \quad \text{ou} \quad -k_p(y_2 + \frac{e_v}{2} \psi_2 - y_{r0}) - c_p(\dot{y}_2 + \frac{e_v}{2} \dot{\psi}_2) < 0$$

B.I.4 Définir une stratégie afin d'obtenir le nombre minimum d'équations de la dynamique.

Résolution par l'utilisation des théorèmes généraux :



Inconnues		Equations	
Cinématique			
$y_2, z_3, \psi_2, \psi_3, \psi_4$	5	Contact en entre 4 et 3 au point A	1
Dynamique			
$Z_{34}$	1	1 équation de moment dynamique appliquée à 4 suivant $(B, \vec{x}_0)$	1
		1 équation de résultante dynamique appliquée à 4 suivant $\vec{z}_3$	1
		1 équation de moment dynamique appliquée à 4+3 suivant $(O_3, \vec{x}_0)$	1
		1 équation de résultante dynamique appliquée à 4+3+2 suivant $\vec{y}_0$	1
		1 équation de moment dynamique appliquée à 4+3+2 suivant $(O_2, \vec{x}_0)$	1
	6		6

Résolution par l'utilisation des équations de Lagrange avec multiplicateurs :

Inconnues		Equations	
Cinématique			
$y_2, z_3, \psi_2, \psi_3, \psi_4$	5	Contact en entre 4 et 3 au point A (déjà écrite B11)	1
Dynamique			
$\lambda$	1	1 équation de Lagrange en $y_2$	1
		1 équation de Lagrange en $z_3$	1
		1 équation de Lagrange en $\psi_2$	1
		1 équation de Lagrange en $\psi_3$	1
		1 équation de Lagrange en $\psi_4$	1
	6		6

Résolution par l'utilisation des équations de Lagrange après réduction au nombre minimum de paramètres :

Linéaire an  
d'axe

Inconnues		Equations	
Cinématique			
$y_2, z_3, \psi_2, \psi_3, \psi_4$	5	Contact en entre 4 et 3 au point A	1
Dynamique			
		1 équation de Lagrange en $y_2$	1
		1 équation de Lagrange en $\psi_2$	1
		1 équation de Lagrange en $\psi_3$	1
		1 équation de Lagrange en $\psi_4$	1
	5		5

B.I.5 Ecrire ces équations.

### Premier mode de résolution : théorèmes généraux

- Equation de moment appliqué à 4 suivant  $(B, \vec{x}_0)$

avec :

$$\begin{aligned} z_1 &= E \cos \Omega t \\ \dot{z}_1 &= -E \Omega \sin \Omega t \\ \ddot{z}_1 &= -E \Omega^2 \cos \Omega t \end{aligned}$$

$$Z_{34} \bar{b} \cos(\psi_4 - \psi_3) - m_4 g c \sin \psi_4 = \overrightarrow{\delta(B,4/0)} \cdot \vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{\delta(B,4/0)} = \overrightarrow{BC} \wedge m_4 \overrightarrow{\Gamma(C,4/0)}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(C,4/0)} = \frac{d^2}{dt^2} (\overrightarrow{O_0 O_1} + \overrightarrow{O_1 O_2} + \overrightarrow{O_2 O_3} + \overrightarrow{O_3 O^*_3} + \overrightarrow{O^*_3 B} + \overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{\Gamma(C,4/0)} = \frac{d^2}{dt^2} (z_1 \vec{z}_0 + y_2 \vec{y}_0 + h \vec{y}_3 + z_3 \vec{z}_3 - c \vec{y}_4)$$

$$\overrightarrow{\Gamma(C,4/0)} = \frac{d}{dt} (\dot{z}_1 \vec{z}_0 + \dot{y}_2 \vec{y}_0 + \dot{\psi}_3 h \vec{z}_3 + \dot{z}_3 \vec{z}_3 - \dot{\psi}_3 z_3 \vec{y}_3 - c \dot{\psi}_4 \vec{z}_4)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma(C,4/0)} &= \ddot{z}_1 \vec{z}_0 + \ddot{y}_2 \vec{y}_0 + (\ddot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3 - \dot{\psi}_3^2 z_3) \vec{z}_3 - (\dot{\psi}_3^2 h + \ddot{\psi}_3 z_3 + 2\dot{\psi}_3 \dot{z}_3) \vec{y}_3 \\ &\quad - c \ddot{\psi}_4 \vec{z}_4 + c \dot{\psi}_4^2 \vec{y}_4 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\delta(B,4/0)} = -c \vec{y}_4 \wedge m_4 \overrightarrow{\Gamma(C,4/0)}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta(B,4/0)} \cdot \vec{x}_0 &= -m_4 c (\ddot{z}_1 \cos \psi_4 - \ddot{y}_2 \sin \psi_4 + (\ddot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3 - \dot{\psi}_3^2 z_3) \cos(\psi_3 - \psi_4) \\ &\quad - (\dot{\psi}_3^2 h + \ddot{\psi}_3 z_3 + 2\dot{\psi}_3 \dot{z}_3) \sin(\psi_3 - \psi_4) - c \ddot{\psi}_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{34} \bar{b} \cos(\psi_4 - \psi_3) - m_{4F} g c \sin \psi_4 = & -m_4 c (\ddot{z}_1 \cos \psi_4 - \ddot{y}_2 \sin \psi_4 - c \ddot{\psi}_4 \\ & + (\ddot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3 - \dot{\psi}_3^2 z_3) \cos(\psi_3 - \psi_4) - (\dot{\psi}_3^2 h + \ddot{\psi}_3 z_3 + 2\dot{\psi}_3 \dot{z}_3) \sin(\psi_3 - \psi_4) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(C,4/0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\dot{\psi}_3^2 h + \ddot{\psi}_3 z_3 + 2\dot{\psi}_3 \dot{z}_3) + \ddot{z}_1 \sin \psi_3 + \ddot{y}_2 \cos \psi_3 + c \ddot{\psi}_4 \sin(\psi_3 - \psi_4) + c \dot{\psi}_4^2 \cos(\psi_3 - \psi_4) \\ (\ddot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3 - \dot{\psi}_3^2 z_3) + \ddot{z}_1 \cos \psi_3 - \ddot{y}_2 \sin \psi_3 - c \ddot{\psi}_4 \cos(\psi_3 - \psi_4) - c \dot{\psi}_4^2 \sin(\psi_3 - \psi_4) \end{bmatrix}_3$$

- Equation de résultante appliquée à 4 suivant  $\vec{z}_3$

$$Z_{34} + m_4 g \sin \psi_3 = m_4 \overrightarrow{\Gamma(C,4/0)} \cdot \vec{z}_3$$

$$\begin{aligned} Z_{34} + m_4 g \sin \psi_3 = m_4 (\ddot{z}_1 \cos \psi_3 - \ddot{y}_2 \sin \psi_3 + (\ddot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3 - \dot{\psi}_3^2 z_3) \\ - c \ddot{\psi}_4 \cos(\psi_4 - \psi_3) + c \dot{\psi}_4^2 \sin(\psi_4 - \psi_3)) \end{aligned}$$

- Equation de moment appliquée à 4+3 suivant  $(O_3, \vec{x}_0)$

$$\overrightarrow{\delta(O_3,4/0)} = \overrightarrow{\delta(B,4/0)} + \vec{O}_3 \vec{B} \wedge m_4 \overrightarrow{\Gamma(C,4/0)}$$

$$\vec{O}_3 \vec{B} \wedge m_4 \overrightarrow{\Gamma(C,4/0)} = (h \vec{y}_3 + z_3 \vec{z}_3) \wedge m_4 \overrightarrow{\Gamma(C,4/0)}$$

$$\vec{O}_3 \vec{B} \wedge m_4 \overrightarrow{\Gamma(C,4/0)} =$$

$$\begin{aligned} (h \vec{y}_3 + z_3 \vec{z}_3) \wedge m_4 (\ddot{z}_1 \vec{z}_0 + \ddot{y}_2 \vec{y}_0 + (\ddot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3 - \dot{\psi}_3^2 z_3) \vec{z}_3 - (\dot{\psi}_3^2 h + \ddot{\psi}_3 z_3 + 2\dot{\psi}_3 \dot{z}_3) \vec{y}_3 \\ - c \ddot{\psi}_4 \vec{z}_4 + c \dot{\psi}_4^2 \vec{y}_4) \end{aligned}$$

$$\vec{O}_3 \vec{B} \wedge m_4 \overrightarrow{\Gamma(C,4/0)} =$$

$$\begin{aligned} m_4 (h ((\ddot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3 - \dot{\psi}_3^2 z_3) + \ddot{z}_1 \cos \psi_3 - \ddot{y}_2 \sin \psi_3 - c \ddot{\psi}_4 \cos(\psi_3 - \psi_4) - c \dot{\psi}_4^2 \sin(\psi_3 - \psi_4)) \\ - z_3 (-(\dot{\psi}_3^2 h + \ddot{\psi}_3 z_3 + 2\dot{\psi}_3 \dot{z}_3) + \ddot{z}_1 \sin \psi_3 + \ddot{y}_2 \cos \psi_3 + c \ddot{\psi}_4 \sin(\psi_3 - \psi_4) + c \dot{\psi}_4^2 \cos(\psi_3 - \psi_4))) \vec{x}_0 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\delta(O_3,4/0)} \cdot \vec{x}_0 =$$

$$\begin{aligned} -m_4 c (\ddot{z}_1 \cos \psi_4 - \ddot{y}_2 \sin \psi_4 + (\ddot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3 - \dot{\psi}_3^2 z_3) \cos(\psi_3 - \psi_4) \\ - (\dot{\psi}_3^2 h + \ddot{\psi}_3 z_3 + 2\dot{\psi}_3 \dot{z}_3) \sin(\psi_3 - \psi_4) - c \ddot{\psi}_4) \\ + m_4 (h ((\ddot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3 - \dot{\psi}_3^2 z_3) + \ddot{z}_1 \cos \psi_3 - \ddot{y}_2 \sin \psi_3 - c \ddot{\psi}_4 \cos(\psi_3 - \psi_4) - c \dot{\psi}_4^2 \sin(\psi_3 - \psi_4)) \\ - z_3 (-(\dot{\psi}_3^2 h + \ddot{\psi}_3 z_3 + 2\dot{\psi}_3 \dot{z}_3) + \ddot{z}_1 \sin \psi_3 + \ddot{y}_2 \cos \psi_3 + c \ddot{\psi}_4 \sin(\psi_3 - \psi_4) + c \dot{\psi}_4^2 \cos(\psi_3 - \psi_4))) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\delta(O_3,3/0)} = I_{3x} \ddot{\psi}_3 \vec{x}_0 + y_{G3} \vec{y}_3 \wedge m_3 \overrightarrow{\Gamma(G_3,3/0)}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G_3,3/0)} = \ddot{z}_1 \vec{z}_0 + \ddot{y}_2 \vec{y}_0 + \ddot{\psi}_3 y_{G3} \vec{z}_3 - \dot{\psi}_3^2 y_{G3} \vec{y}_3$$

$$\overrightarrow{\delta(O_3,3/0)} = I_{3x} \ddot{\psi}_3 \vec{x}_0 + y_{G3} \vec{y}_3 \wedge m_3 (\ddot{z}_1 \vec{z}_0 + \ddot{y}_2 \vec{y}_0 + \ddot{\psi}_3 y_{G3} \vec{z}_3 - \dot{\psi}_3^2 y_{G3} \vec{y}_3)$$

$$\overrightarrow{\delta(O_3,3/0)} \cdot \vec{x}_0 = I_{3x} \ddot{\psi}_3 + y_{G3} m_3 (\ddot{z}_1 \cos \psi_3 - \ddot{y}_2 \sin \psi_3 + \ddot{\psi}_3 y_{G3})$$

$$\begin{aligned}
& m_4 g (h \sin \psi_3 - c \sin \psi_4 + z_3 \cos \psi_3) + m_3 y_{G3} g \sin \psi_3 - k_s (\psi_3 - \psi_2) - C_s (\dot{\psi}_3 - \dot{\psi}_2) \\
& = I_{3x} \ddot{\psi}_3 + y_{G3} m_3 (\ddot{z}_1 \cos \psi_3 - \ddot{y}_2 \sin \psi_3 + \dot{\psi}_3 y_{G3}) \\
& - m_4 c (\ddot{z}_1 \cos \psi_4 - \ddot{y}_2 \sin \psi_4 + (\dot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3 - \dot{\psi}_3^2 z_3) \cos(\psi_3 - \psi_4) \\
& - (\dot{\psi}_3^2 h + \dot{\psi}_3 z_3 + 2\dot{\psi}_3 \dot{z}_3) \sin(\psi_3 - \psi_4) - c \ddot{\psi}_4) \\
& + m_4 (h ((\dot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3 - \dot{\psi}_3^2 z_3) + \ddot{z}_1 \cos \psi_3 - \ddot{y}_2 \sin \psi_3 - c \ddot{\psi}_4 \cos(\psi_3 - \psi_4) - c \dot{\psi}_4^2 \sin(\psi_3 - \psi_4)) \\
& - z_3 (-\dot{\psi}_3^2 h + \dot{\psi}_3 z_3 + 2\dot{\psi}_3 \dot{z}_3) + \ddot{z}_1 \sin \psi_3 + \ddot{y}_2 \cos \psi_3 + c \ddot{\psi}_4 \sin(\psi_3 - \psi_4) + c \dot{\psi}_4^2 \cos(\psi_3 - \psi_4))
\end{aligned}$$

On pose :

$$\delta_{x(O_3, \Sigma/0)} = (\overrightarrow{\delta(O_3, 4/0)} + \overrightarrow{\delta(O_3, 3/0)}) \cdot \vec{x}_0$$

- Equation de moment appliquée à 4+3+2 suivant  $(O_2, \vec{x}_0)$

$O_2$  confondu avec  $O_3$

$$\delta_{x(O_3, \Sigma/0)} = \delta_{x(O_2, \Sigma/0)}$$

$$m_4 g (h \sin \psi_3 - c \sin \psi_4 + z_3 \cos \psi_3) + m_3 g y_{G3} \sin \psi_3 - (c_p \frac{e_v^2}{2} \dot{\psi}_2 + k_p \frac{e_v^2}{2} \psi_2) = \delta_{x(O_3, \Sigma/0)}$$

- Equation de résultante appliquée à 4+3+2 suivant  $\vec{y}_0$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma(C, 4/0)} &= \ddot{z}_1 \vec{z}_0 + \ddot{y}_2 \vec{y}_0 + (\dot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3 - \dot{\psi}_3^2 z_3) \vec{z}_3 - (\dot{\psi}_3^2 h + \dot{\psi}_3 z_3 + 2\dot{\psi}_3 \dot{z}_3) \vec{y}_3 \\
&\quad - c \ddot{\psi}_4 \vec{z}_4 + c \dot{\psi}_4^2 \vec{y}_4
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/0)} = \ddot{z}_1 \vec{z}_0 + \ddot{y}_2 \vec{y}_0 + \dot{\psi}_3 y_{G3} \vec{z}_3 - \dot{\psi}_3^2 y_{G3} \vec{y}_3$$

$$(m_3 \overrightarrow{\Gamma(G_3, 3/0)} + m_4 \overrightarrow{\Gamma(C, 4/0)}) \cdot \vec{y}_0 = -(m_3 + m_4) g - 2 k_p (y_2 - y_{r0}) - 2 c_p \dot{y}_2$$

$$\begin{aligned}
-(m_3 + m_4) g - 2 k_p (y_2 - y_{r0}) - 2 c_p \dot{y}_2 &= m_4 (\ddot{y}_2 - (\dot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3 - \dot{\psi}_3^2 z_3) \sin \psi_3 - (\dot{\psi}_3^2 h + \dot{\psi}_3 z_3 + 2\dot{\psi}_3 \dot{z}_3) \cos \psi_3 \\
&\quad + c \ddot{\psi}_4 \sin \psi_4 + c \dot{\psi}_4^2 \cos \psi_4) \\
&\quad + m_3 (\ddot{y}_2 - \dot{\psi}_3 y_{G3} \sin \psi_3 - \dot{\psi}_3^2 y_{G3} \cos \psi_3)
\end{aligned}$$

### Deuxième mode de résolution : équations de Lagrange avec multiplicateurs

Calcul de l'énergie cinétique du système 2+3+4

$$\overrightarrow{V(C, 4/0)} = \dot{z}_1 \vec{z}_0 + \dot{y}_2 \vec{y}_0 + \dot{\psi}_3 h \vec{z}_3 + \dot{z}_3 \vec{z}_3 - \dot{\psi}_3 z_3 \vec{y}_3 - c \dot{\psi}_4 \vec{z}_4$$

$$\begin{aligned} \overline{V(C,4/0)}^2 &= (\dot{z}_1)^2 + \dot{y}_2^2 + (\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3)^2 + (-\dot{\psi}_3 z_3)^2 + (-c \dot{\psi}_4)^2 \\ &+ 2(\dot{z}_1)(\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) \cos(\psi_3) - 2(\dot{z}_1)(-\dot{\psi}_3 z_3) \sin(\psi_3) + 2(\dot{z}_1)(-c \dot{\psi}_4) \cos(\psi_4) \\ &- 2 \dot{y}_2 (\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) \sin(\psi_3) + 2 \dot{y}_2 (-\dot{\psi}_3 z_3) \cos(\psi_3) - 2 \dot{y}_2 (-c \dot{\psi}_4) \sin(\psi_4) \\ &+ 2(\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3)(-c \dot{\psi}_4) \cos(\psi_4 - \psi_3) \\ &- 2(-\dot{\psi}_3 z_3)(-c \dot{\psi}_4) \sin(\psi_4 - \psi_3) \end{aligned}$$

$$\overline{V(G_3,3/0)} = \dot{z}_1 \overrightarrow{z_0} + \dot{y}_2 \overrightarrow{y_0} + \dot{\psi}_3 y_{G3} \overrightarrow{z_3}$$

$$\overline{V(G_3,3/0)}^2 = (\dot{z}_1)^2 + \dot{y}_2^2 + (\dot{\psi}_3 y_{G3})^2 + 2(\dot{z}_1)(\dot{\psi}_3 y_{G3}) \cos(\psi_3) - 2 \dot{y}_2 (\dot{\psi}_3 y_{G3}) \sin(\psi_3)$$

$$\begin{aligned} 2T_{2+3+4/0} &= m_4 (\dot{z}_1^2 + \dot{y}_2^2 + (\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3)^2 + \dot{\psi}_3^2 z_3^2 + c^2 \dot{\psi}_4^2) \\ &+ 2 \dot{z}_1 (\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) \cos(\psi_3) - 2 \dot{z}_1 \dot{\psi}_3 z_3 \sin(\psi_3) - 2 \dot{z}_1 c \dot{\psi}_4 \cos(\psi_4) \\ &- 2 \dot{y}_2 (\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) \sin(\psi_3) - 2 \dot{y}_2 \dot{\psi}_3 z_3 \cos(\psi_3) + 2 \dot{y}_2 c \dot{\psi}_4 \sin(\psi_4) \\ &- 2(\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) c \dot{\psi}_4 \cos(\psi_4 - \psi_3) \\ &- 2 \dot{\psi}_3 z_3 c \dot{\psi}_4 \sin(\psi_4 - \psi_3) \\ &+ I_{x3} \dot{\psi}_3^2 + m_3 (\dot{z}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{\psi}_3^2 y_{G3}^2 + 2 \dot{z}_1 \dot{\psi}_3 y_{G3} \cos(\psi_3) - 2 \dot{y}_2 \dot{\psi}_3 y_{G3} \sin(\psi_3)) \end{aligned}$$

Puissances virtuelles dans une transformation compatible :

$$\begin{aligned} P_{\text{poids3/0}} &= -m_3 g \overrightarrow{y_0} \cdot \overline{V^*(G_3,3/0)} = m_3 g \overrightarrow{y_0} (\dot{y}_2^* \overrightarrow{y_0} + \dot{\psi}_3^* y_{G3} \overrightarrow{z_3}) \\ &= -m_3 g (\dot{y}_2^* - \dot{\psi}_3^* y_{G3} \sin(\psi_3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{poids4/0}} &= -m_4 g \overrightarrow{y_0} \cdot \overline{V^*(C,4/0)} = m_4 g \overrightarrow{y_0} (\dot{y}_2^* \overrightarrow{y_0} + (\dot{\psi}_3^* h + \dot{z}_3^*) \overrightarrow{z_3} - \dot{\psi}_3^* z_3 \overrightarrow{y_3} - c \dot{\psi}_4^* \overrightarrow{z_4}) \\ &= -m_4 g (\dot{y}_2^* - (\dot{\psi}_3^* h + \dot{z}_3^*) \sin(\psi_3) - \dot{\psi}_3^* z_3 \cos(\psi_3) + c \dot{\psi}_4^* \sin(\psi_4)) \end{aligned}$$

$$P_{\text{susp}} = (-k_s (\psi_3 - \psi_2) - C_s (\dot{\psi}_3 - \dot{\psi}_2)) (\dot{\psi}_3^* - \dot{\psi}_2^*)$$

$$P_{\text{pneu/0}} = -\frac{e_v}{2} (k_p \dot{\psi}_2 + C_p \dot{\psi}_2) \dot{\psi}_2^* - 2 k_p (y_2 - y_{r0}) \dot{y}_2^* - 2 C_p \dot{y}_2 \dot{y}_2^*$$

Equation de liaison :

$$z_3 - \bar{b} \sin(\psi_4 - \psi_3) = 0$$

$$\dot{z}_3 - \bar{b} (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_3) \cos(\psi_4 - \psi_3) = 0$$

Equation de Lagrange en  $y_2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{y}_2} T_{2+3+4/0} &= m_4 (\dot{y}_2 - (\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) \sin(\psi_3) - \dot{\psi}_3 z_3 \cos(\psi_3) + c \dot{\psi}_4 \sin(\psi_4)) \\ &+ m_3 (\dot{y}_2 - \dot{\psi}_3 y_{G3} \sin(\psi_3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{y}_2} T_{2+3+4/0} \right) &= m_4 (\ddot{y}_2 - (\ddot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3) \sin(\psi_3) - (\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) \dot{\psi}_3 \cos(\psi_3) - \ddot{\psi}_3 z_3 \cos(\psi_3) - \dot{\psi}_3 \dot{z}_3 \cos(\psi_3) \\ &+ \dot{\psi}_3^2 z_3 \sin(\psi_3) + c \dot{\psi}_4 \sin(\psi_4) + c \dot{\psi}_4^2 \cos(\psi_4)) + m_3 (\ddot{y}_2 - \ddot{\psi}_3 y_{G3} \sin(\psi_3) - \dot{\psi}_3^2 y_{G3} \cos(\psi_3)) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dy_2} T_{2+3+4/0} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{y}_2} T_{2+3+4/0} \right) - \frac{d}{dy_2} T_{2+3+4/0} = -(m_3 + m_4) g - 2(k_p(y_2 - y_{r0}) + c_p \dot{y}_2)$$

Equation de Lagrange en  $z_3$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{z}_3} T_{2+3+4/0} = m_4((\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) + \dot{z}_1 \cos(\psi_3) - \dot{y}_2 \sin(\psi_3) - c \dot{\psi}_4 \cos(\psi_4 - \psi_3))$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{z}_3} T_{2+3+4/0} \right) = m_4(\ddot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3 + \ddot{z}_1 \cos(\psi_3) - \dot{z}_1 \dot{\psi}_3 \sin(\psi_3) - \ddot{y}_2 \sin(\psi_3) - \dot{y}_2 \dot{\psi}_3 \cos(\psi_3) - c \ddot{\psi}_4 \cos(\psi_4 - \psi_3) + c \dot{\psi}_4 (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_3) \sin(\psi_4 - \psi_3))$$

$$\frac{d}{dz_3} T_{2+3+4/0} = m_4(2 \dot{\psi}_3^2 z_3 - 2 \dot{z}_1 \dot{\psi}_3 \sin(\psi_3) - 2 \dot{y}_2 \dot{\psi}_3 \cos(\psi_3) - 2 \dot{\psi}_3 c \dot{\psi}_4 \sin(\psi_4 - \psi_3))$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{z}_3} T_{2+3+4/0} \right) - \frac{d}{dz_3} T_{2+3+4/0} = -m_4 g \sin(\psi_3) + \lambda$$

Equation de Lagrange en  $\psi_2$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_2} T_{2+3+4/0} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_2} = 0$$

$$\frac{d}{d\psi_2} T_{2+3+4/0} = 0$$

$$0 = -\frac{e_v^2}{2} (k_p \dot{\psi}_2 + C_p \dot{\psi}_2) + k_s (\psi_3 - \psi_2) + C_s (\dot{\psi}_3 - \dot{\psi}_2)$$

Equation de Lagrange en  $\psi_3$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_3} T_{2+3+4/0} = m_4((\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) h + \dot{\psi}_3 z_3^2 + \dot{z}_1 h \cos(\psi_3) - \dot{z}_1 z_3 \sin(\psi_3) - \dot{y}_2 h \sin(\psi_3) - \dot{y}_2 z_3 \cos(\psi_3) - h c \dot{\psi}_4 \cos(\psi_4 - \psi_3) - z_3 c \dot{\psi}_4 \sin(\psi_4 - \psi_3)) + I_{x3} \dot{\psi}_3 + m_3 (y_{G3}^2 \dot{\psi}_3 + \dot{z}_1 y_{G3} \cos(\psi_3) - \dot{y}_2 y_{G3} \sin(\psi_3))$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_3} T_{2+3+4/0} \right) =$$

$$m_4((\ddot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3) h + \ddot{\psi}_3 z_3^2 + 2 \dot{\psi}_3 z_3 \dot{z}_3 + \ddot{z}_1 h \cos(\psi_3) - \dot{z}_1 h \dot{\psi}_3 \sin(\psi_3) - \ddot{z}_1 z_3 \sin(\psi_3) - \dot{z}_1 \dot{z}_3 \sin(\psi_3) - \dot{z}_1 z_3 \dot{\psi}_3 \cos(\psi_3) - \ddot{y}_2 h \sin(\psi_3) - \dot{y}_2 h \dot{\psi}_3 \cos(\psi_3) - \ddot{y}_2 z_3 \cos(\psi_3) - \dot{y}_2 \dot{z}_3 \cos(\psi_3) + \dot{y}_2 z_3 \dot{\psi}_3 \sin(\psi_3) - h c \ddot{\psi}_4 \cos(\psi_4 - \psi_3) + h c \dot{\psi}_4 (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_3) \sin(\psi_4 - \psi_3) - \dot{z}_3 c \dot{\psi}_4 \sin(\psi_4 - \psi_3) - z_3 c \ddot{\psi}_4 \sin(\psi_4 - \psi_3) - z_3 c \dot{\psi}_4 (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_3) \cos(\psi_4 - \psi_3)) + I_{x3} \ddot{\psi}_3 + m_3 (y_{G3}^2 \ddot{\psi}_3 + \ddot{z}_1 y_{G3} \cos(\psi_3) - \dot{z}_1 y_{G3} \dot{\psi}_3 \sin(\psi_3) - \ddot{y}_2 y_{G3} \sin(\psi_3) - \dot{y}_2 y_{G3} \dot{\psi}_3 \cos(\psi_3))$$

$$\frac{d}{d\psi_3} T_{2+3+4/0} = m_4(-\dot{z}_1(\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) \sin(\psi_3) - \dot{z}_1 \dot{\psi}_3 z_3 \cos(\psi_3) - \dot{y}_2(\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) \cos(\psi_3) + \dot{y}_2 \dot{\psi}_3 z_3 \sin(\psi_3) \\ - c \dot{\psi}_4(\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) \sin(\psi_4 - \psi_3) + \dot{\psi}_3 z_3 c \dot{\psi}_4 \cos(\psi_4 - \psi_3)) + m_3(-\dot{z}_1 \dot{\psi}_3 y_{G3} \sin(\psi_3) - \dot{y}_2 \dot{\psi}_3 y_{G3} \cos(\psi_3))$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_3} T_{2+3+4/0} \right) - \frac{d}{d\psi_3} T_{2+3+4/0} = m_3 g y_{G3} \sin(\psi_3) + g(m_4 h \sin(\psi_3) + z_3 \cos(\psi_3)) \\ - k_s(\psi_3 - \psi_2) - C_s(\dot{\psi}_3 - \dot{\psi}_2) + \bar{b} \lambda \cos(\psi_4 - \psi_3)$$

Equation de Lagrange en  $\psi_4$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_4} T_{2+3+4/0} = m_4(c^2 \dot{\psi}_4 - \dot{z}_1 c \cos(\psi_4) + \dot{y}_2 c \sin(\psi_4) - (\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) c \cos(\psi_4 - \psi_3) \\ - \dot{\psi}_3 z_3 c \sin(\psi_4 - \psi_3))$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_4} T_{2+3+4/0} \right) = m_4(c^2 \ddot{\psi}_4 - \ddot{z}_1 c \cos(\psi_4) + \dot{z}_1 c \dot{\psi}_4 \sin(\psi_4) + \ddot{y}_2 c \sin(\psi_4) + \dot{y}_2 c \dot{\psi}_4 \cos(\psi_4) \\ - (\ddot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3) c \cos(\psi_4 - \psi_3) + (\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) c (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_3) \sin(\psi_4 - \psi_3) \\ - \ddot{\psi}_3 z_3 c \sin(\psi_4 - \psi_3) - \dot{\psi}_3 \dot{z}_3 c \sin(\psi_4 - \psi_3) - \dot{\psi}_3 z_3 c (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_3) \cos(\psi_4 - \psi_3))$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi_4} T_{2+3+4/0} = m_4(\dot{z}_1 c \dot{\psi}_4 \sin(\psi_4) + \dot{y}_2 c \dot{\psi}_4 \cos(\psi_4) + (\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) c \dot{\psi}_4 \sin(\psi_4 - \psi_3) \\ - \dot{\psi}_3 z_3 c \dot{\psi}_4 \cos(\psi_4 - \psi_3))$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_4} T_{2+3+4/0} \right) - \frac{\partial}{\partial \psi_4} T_{2+3+4/0} = -\bar{b} \lambda \cos(\psi_4 - \psi_3)$$

**Troisième mode de résolution** : équations de Lagrange avec réduction au nombre minimum de paramètres :

$$z_3 = \bar{b} \sin(\psi_4 - \psi_3)$$

$$\dot{z}_3 = \bar{b} (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_3) \cos(\psi_4 - \psi_3)$$

$$\ddot{z}_3 = -\bar{b} (\ddot{\psi}_4 - \ddot{\psi}_3) \sin(\psi_4 - \psi_3)$$

Equation de Lagrange en  $y_2$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}_2} T_{2+3+4/0} = m_4(\dot{y}_2 - (\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) \sin(\psi_3) - \dot{\psi}_3 z_3 \cos(\psi_3) + c \dot{\psi}_4 \sin(\psi_4)) \\ + m_3(\dot{y}_2 - \dot{\psi}_3 y_{G3} \sin(\psi_3))$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{y}_2} T_{2+3+4/0} \right) = m_4(\ddot{y}_2 - (\ddot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3) \sin(\psi_3) - (\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) \dot{\psi}_3 \cos(\psi_3) - \ddot{\psi}_3 z_3 \cos(\psi_3) - \dot{\psi}_3 \dot{z}_3 \cos(\psi_3) \\ + \dot{\psi}_3^2 z_3 \sin(\psi_3) + c \ddot{\psi}_4 \sin(\psi_4) + c \dot{\psi}_4^2 \cos(\psi_4)) + m_3(\ddot{y}_2 - \ddot{\psi}_3 y_{G3} \sin(\psi_3) - \dot{\psi}_3^2 y_{G3} \cos(\psi_3))$$

$$\frac{d}{dy_2} T_{2+3+4/0} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{y}_2} T_{2+3+4/0} \right) - \frac{d}{dy_2} T_{2+3+4/0} = -(m_3 + m_4) g - 2(k_p(y_2 - y_{r0}) + c_p \dot{y}_2)$$

Equation de Lagrange en  $\psi_2$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_2} T_{2+3+4/0} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_2} = 0$$

$$\frac{d}{d\psi_2} T_{2+3+4/0} = 0$$

$$0 = -\frac{e_v^2}{2} (k_p \dot{\psi}_2 + C_p \psi_2) + k_s(\psi_3 - \psi_2) + C_s(\dot{\psi}_3 - \dot{\psi}_2)$$

Equation de Lagrange en  $\psi_3$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_3} T_{2+3+4/0} = & m_4((\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) h + \dot{\psi}_3 z_3^2 + \dot{z}_1 h \cos(\psi_3) - \dot{z}_1 z_3 \sin(\psi_3) - \dot{y}_2 h \sin(\psi_3) - \dot{y}_2 z_3 \cos(\psi_3)) \\ & - h c \dot{\psi}_4 \cos(\psi_4 - \psi_3) - z_3 c \dot{\psi}_4 \sin(\psi_4 - \psi_3) + I_{x3} \dot{\psi}_3 + m_3(y_{G3}^2 \dot{\psi}_3 + \dot{z}_1 y_{G3} \cos(\psi_3) - \dot{y}_2 y_{G3} \sin(\psi_3)) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_3} T_{2+3+4/0} \right) =$$

$$\begin{aligned} & m_4((\ddot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3) h + \ddot{\psi}_3 z_3^2 + 2 \dot{\psi}_3 z_3 \dot{z}_3 + \ddot{z}_1 h \cos(\psi_3) - \dot{z}_1 h \dot{\psi}_3 \sin(\psi_3) - \ddot{z}_1 z_3 \sin(\psi_3) - \dot{z}_1 \dot{z}_3 \sin(\psi_3) - \dot{z}_1 z_3 \dot{\psi}_3 \cos(\psi_3) \\ & - \ddot{y}_2 h \sin(\psi_3) - \dot{y}_2 h \dot{\psi}_3 \cos(\psi_3) - \ddot{y}_2 z_3 \cos(\psi_3) - \dot{y}_2 \dot{z}_3 \cos(\psi_3) + \dot{y}_2 z_3 \dot{\psi}_3 \sin(\psi_3) - h c \ddot{\psi}_4 \cos(\psi_4 - \psi_3) \\ & + h c \dot{\psi}_4 (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_3) \sin(\psi_4 - \psi_3) - \dot{z}_3 c \dot{\psi}_4 \sin(\psi_4 - \psi_3) - z_3 c \ddot{\psi}_4 \sin(\psi_4 - \psi_3) - z_3 c \dot{\psi}_4 (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_3) \cos(\psi_4 - \psi_3)) \\ & + I_{x3} \ddot{\psi}_3 + m_3(y_{G3}^2 \ddot{\psi}_3 + \ddot{z}_1 y_{G3} \cos(\psi_3) - \dot{z}_1 y_{G3} \dot{\psi}_3 \sin(\psi_3) - \ddot{y}_2 y_{G3} \sin(\psi_3) - \dot{y}_2 y_{G3} \dot{\psi}_3 \cos(\psi_3)) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\psi_3} T_{2+3+4/0} = m_4(-\dot{z}_1(\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) \sin(\psi_3) - \dot{z}_1 \dot{\psi}_3 z_3 \cos(\psi_3) - \dot{y}_2(\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) \cos(\psi_3) + \dot{y}_2 \dot{\psi}_3 z_3 \sin(\psi_3))$$

$$- c \dot{\psi}_4 (\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) \sin(\psi_4 - \psi_3) + \dot{\psi}_3 z_3 c \dot{\psi}_4 \cos(\psi_4 - \psi_3) + m_3(-\dot{z}_1 \dot{\psi}_3 y_{G3} \sin(\psi_3) - \dot{y}_2 \dot{\psi}_3 y_{G3} \cos(\psi_3))$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_3} T_{2+3+4/0} \right) - \frac{d}{d\psi_3} T_{2+3+4/0} = & m_3 g y_{G3} \sin(\psi_3) + g(m_4 h \sin(\psi_3) + z_3 \cos(\psi_3)) \\ & - k_s(\psi_3 - \psi_2) - C_s(\dot{\psi}_3 - \dot{\psi}_2) \end{aligned}$$

Equation de Lagrange en  $\psi_4$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_4} T_{2+3+4/0} = m_4(c^2 \dot{\psi}_4 - \dot{z}_1 c \cos(\psi_4) + \dot{y}_2 c \sin(\psi_4) - (\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) c \cos(\psi_4 - \psi_3))$$

$$- \dot{\psi}_3 z_3 c \sin(\psi_4 - \psi_3))$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_4} T_{2+3+4/0} \right) = m_4(c^2 \ddot{\psi}_4 - \ddot{z}_1 c \cos(\psi_4) + \dot{z}_1 c \dot{\psi}_4 \sin(\psi_4) + \ddot{y}_2 c \sin(\psi_4) + \dot{y}_2 c \dot{\psi}_4 \cos(\psi_4))$$

$$- (\ddot{\psi}_3 h + \ddot{z}_3) c \cos(\psi_4 - \psi_3) + (\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) c (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_3) \sin(\psi_4 - \psi_3)$$

$$- \ddot{\psi}_3 z_3 c \sin(\psi_4 - \psi_3) - \dot{\psi}_3 \dot{z}_3 c \sin(\psi_4 - \psi_3) - \dot{\psi}_3 z_3 c (\dot{\psi}_4 - \dot{\psi}_3) \cos(\psi_4 - \psi_3))$$

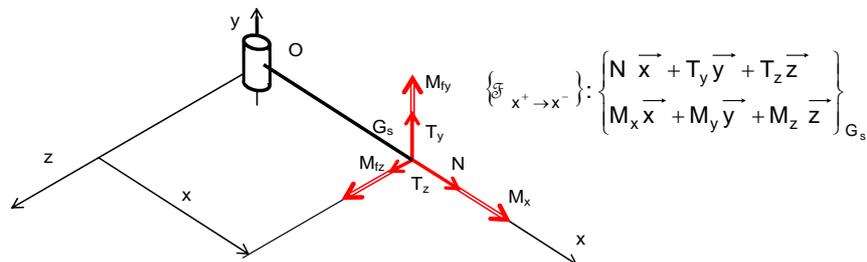
$$\frac{\partial}{\partial \psi_4} T_{2+3+4/0} = m_4 (\dot{z}_1 c \psi_4 \sin(\psi_4) + \dot{y}_2 c \psi_4 \cos(\psi_4) + (\dot{\psi}_3 h + \dot{z}_3) c \psi_4 \sin(\psi_4 - \psi_3) - \dot{\psi}_3 z_3 c \psi_4 \cos(\psi_4 - \psi_3))$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_4} T_{2+3+4/0} \right) - \frac{\partial}{\partial \psi_4} T_{2+3+4/0} = 0$$

## Modélisation 3D

### A. Etude de la citerne

A.I.1 En supposant connue la composante verticale  $B_y$  de l'effort  $\vec{B} = B_y \vec{y} + B_z \vec{z}$ , calculer les composantes du torseur des efforts internes  $\left\{ \mathcal{F}_{x^+ \rightarrow x^-} \right\}$  au centre de gravité  $G_s$  d'une section droite, le long de OA et en fonction de  $q_y$ ,  $q_z$ ,  $B_y$ ,  $B_z$ , de l'abscisse  $x = OG_s$  et de la géométrie.



Torseur des efforts internes sur ce tronçon

$$\begin{cases} N_x \vec{x} + T_y \vec{y} + T_z \vec{z} \\ M_x \vec{x} + M_y \vec{y} + M_z \vec{z} \end{cases}$$

Si l'on isole le tronçon entre  $x$  et  $L$  on obtient :

$$\begin{cases} N_x = 0 \\ T_y = B_y - (L-x) q_y \\ T_z = B_z - (L-x) q_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_x = -y_B B_z + z_B B_y + (L-x) q_z y_G \\ M_y = -(L-x) B_z + (L-x)^2 \frac{q_z}{2} \\ M_z = (L-x) B_y - (L-x)^2 \frac{q_y}{2} \end{cases}$$

A.I.2 Ecrire l'expression de l'énergie de déformation dans la poutre OA en fonction des composantes du torseur des efforts internes, en négligeant les effets de l'effort tranchant. On ne développera pas le calcul.

$$w = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{M_x^2}{GJ} + \frac{M_y^2}{EI_{yy}} + \frac{M_z^2}{EI_{zz}} \right) dx$$

A.I.3 En utilisant les méthodes énergétiques ainsi que l'expression de  $B_y$  en fonction de la raideur de l'appui  $k_y$  et du déplacement du point B suivant  $\vec{y}$  noté  $U_y$ , écrire l'équation qui permet de déterminer la valeur de ce déplacement ( $U_y=0$  avant chargement).

$$\frac{\partial w}{\partial B_y} = U_y \quad U_y = -\frac{B_y}{k_y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial B_y} = \int_0^L \left( \frac{1}{GJ} (-y_B B_z + z_B B_y + (L-x) q_z y_G) (z_B) + \frac{1}{EI_{zz}} \left( (L-x) B_y - (L-x)^2 \frac{q_y}{2} \right) (L-x) \right) dx$$

$$-\frac{B_y}{k_y} = -\frac{q_y L^4}{8EI_{zz}} + \frac{B_y L^3}{3EI_{zz}} + \frac{z_B L (-2y_B B_z + q_z y_G L)}{2GJ} + \frac{z_B^2 B_y L}{GJ}$$

$$B_y = \frac{-\frac{q_y L^4}{8EI_{zz}} + \frac{z_B L (-2y_B B_z + q_z y_G L)}{2GJ}}{-\frac{1}{k_y} - \frac{L^3}{3EI_{zz}} - \frac{z_B^2 L}{GJ}}$$

A.I.4 En écrivant une équation d'équilibre statique calculer la composante horizontale  $B_z$  de l'effort  $\vec{B} = B_y \vec{y} + B_z \vec{z}$ .

On écrit une équation de moment appliquée à la citerne complète suivant  $(O, \vec{y})$

$$(L q_z \frac{L}{2} - L B_z) \vec{y} = \vec{0}$$

$$B_z = q_z \frac{L}{2}$$

A.I.5 Sachant que le moment de torsion  $M_t$  en un point  $G_s$  d'une section droite de la poutre est égal à la somme des moments élémentaires induits par les contraintes de cisaillement  $\tau_{x3}$ , donner la relation qui existe entre  $M_t$  et  $\tau_{x3}$ .

La contrainte de cisaillement  $\tau_{x3}$  s'exerce sur un élément de surface  $e d\ell$  dans la direction  $\vec{d\ell}$

$$\vec{d\ell} = \begin{bmatrix} dx_i \\ dy_j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \sin \theta d\theta \\ b \cos \theta d\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_t \vec{z}_i = \int_{\ell} \tau_{x3} \vec{e} \, d\ell \wedge \vec{\rho} = \tau_{x3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (ab \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta) d\theta \vec{z}_i$$

dans notre cas  $\vec{z}_i = \vec{x}$

$$M_t = 2\pi a b e \tau_{x3}$$

A.I.6 En considérant un élément de poutre de longueur  $dx$  comme un ressort de torsion, donner l'expression de l'énergie de déformation  $dw$  de celui-ci soumis à un moment  $M_t$ . On appellera  $\frac{d\phi}{dx}$  la rotation unitaire de la section.

Par analogie avec un ressort de torsion :

$$dw = \frac{1}{2} M_t d\phi$$

A.I.7 On rappelle que l'expression de l'énergie de déformation peut être exprimée à l'aide des composantes des contraintes et des déformations par :  $W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$ . En utilisant la loi de Hooke généralisée, exprimer les déformations en fonction des contraintes; puis exprimer  $dw$ , énergie de déformation d'un élément de poutre de longueur  $dx$  ( $dw = \frac{dx}{2} \int_S \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dS$ ) en fonction de  $\tau_{x3}$ .

Loi de Hooke en cisaillement  $\varepsilon_{x3} = \frac{\tau_{x3}}{2G}$

$$dw = \frac{dx}{2} \int_S \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dS = \frac{dx}{2} \int_S 2 \tau_{x3} \varepsilon_{x3} dS$$

$$dw = \frac{dx}{2} \int_{\ell} 2 \frac{\tau_{x3}^2}{2G} e \, d\ell = dx \int_{\ell} \frac{\tau_{x3}^2}{2G} e \, d\ell$$

$$dw = \frac{\tau_{x3}^2}{2G} \int_{\ell} e \, d\ell = \frac{\tau_{x3}^2}{2G} e \pi (a+b) dx$$

A.I.8 A partir des résultats des deux questions précédentes, trouver l'expression de  $d\phi$  en fonction de  $M_t$ . En se souvenant que  $\frac{d\phi}{dx} = \frac{M_t}{GJ}$ , donner l'expression du moment quadratique de torsion  $J$  du tube elliptique.

$$\frac{1}{2} M_t d\phi = \frac{\tau_{x3}^2}{2G} e \int_l dl \quad \frac{1}{2} M_t d\phi = \frac{\left(\frac{M_t}{2\pi a b e}\right)^2}{2G} e \pi (a+b) dx$$

$$\frac{1}{2} M_t d\phi = \frac{M_t^2}{2G(2\pi a b e)^2} e \pi (a+b) dx$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{M_t}{4Ge\pi a^2 b^2} (a+b)$$

$$J = \frac{4 e \pi a^2 b^2}{a+b}$$

A.I.9 Application numérique : calculer les valeurs de  $B_y$ ,  $B_z$ ,  $M_z$ ,  $M_x$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  et  $J$  pour le point de coordonnées  $(0, -b, 0)$  dans le repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$$B_y = \frac{-\frac{q_y L^4}{8EI_{zz}} + \frac{z_B L(-2y_B B_z + q_z y_G L)}{2GJ}}{-\frac{1}{k_y} - \frac{L^3}{3EI_{zz}} - \frac{z_B^2 L}{GJ}} = 18 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$B_z = q_z \frac{L}{2} = 53 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$I_{yy} = \frac{3}{4} \pi a^2 e (3b+a) = 31 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$I_{zz} = \frac{1}{4} \pi b^2 e (3a+b) = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$M_x = -y_B B_z + z_B B_y + L q_z y_G = 1.4 \cdot 10^5 \text{ mN}$$

$$M_z = L B_y - L^2 \frac{q_y}{2} = -9.7 \cdot 10^5 \text{ mN}$$

$$J = \frac{4 e \pi a^2 b^2}{a+b} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

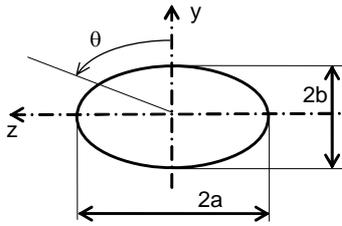
A.I.10 En déduire les valeurs des contraintes normale de flexion et tangentielle de torsion pour ce même point.

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_z}{I_{zz}} (-b) = -130 \text{ MPa}$$

## A.II SOLLICITATIONS CREEES PAR LE FLUIDE SUR L'ENVELOPPE DE LA CITERNE

A.II.1 Déterminer les éléments de réduction du torseur des actions du fluide sur les extrémités de la citerne, au centre de cette paroi que l'on peut considérer comme

$$\text{plane : } \left\{ \mathcal{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{fond\_citerne}} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{FF} = R_{FFx} \vec{x} \\ \vec{M}_{FF}(A) = M_{FFz} \vec{z} \end{array} \right\}_A$$



Aire de la section :

$$Q = a b \frac{\pi}{2}$$

Faire attention aux bornes, dans ce cas on doit choisir le sens des y croissant.

La pression est constante sur une bande

$$p = -\rho_F g_{fic} b \cos \theta \quad \cos \theta \text{ étant négatif pour } \pi > \theta > \frac{\pi}{2}$$

$$R_{FFx} = -2 \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \rho_F g_{fic} b \sin \theta a \sin \theta b \cos \theta d\theta$$

$$R_{FFx} = \frac{2}{3} \rho_F g_{fic} a b^2$$

$$M_{FFz} = 2 \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \rho_F g_{fic} (-b \cos \theta) a b \sin^2 \theta b \cos \theta d\theta$$

$$M_{FFz} = \frac{\pi}{8} \rho_F g_{fic} a b^3$$

Il est beaucoup plus facile de faire le calcul après un changement de repère (i, j) on évite les problèmes de signe....

A.II.2 En isolant une portion de citerne comprise entre 0 et x déduire l'expression de la contrainte normale pour un point de coordonnées (x, -b, 0) . Faire l'application numérique.

Torseur des efforts internes sur ce tronçon dans le vrai repère de la citerne

$$\begin{cases} N_{Fx(s+/s-)} \vec{x} + T_{Fy(s+/s-)} \vec{y} + T_{Fz(s+/s-)} \vec{z} \\ M_{Fx(s+/s-)} \vec{x} + M_{Fy(s+/s-)} \vec{y} + M_{Fz(s+/s-)} \vec{z} \end{cases}$$

Si l'on isole le tronçon entre x et  $\frac{L}{2}$  on obtient :

$$\begin{cases} N_{F_x(s+/s-)} = R_{FFx} \\ T_{F_y(s+/s-)} = 0 \\ T_{F_z(s+/s-)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} M_{F_x(s+/s-)} = 0 \\ M_{F_y(s+/s-)} = 0 \\ M_{F_z(s+/s-)} = M_{FFz} \end{cases}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{R_F}{\pi e(a+b)} + \frac{M_{FFz}}{I_{zz}} b$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\frac{4}{3} \rho_F g_{fic} a b^2}{\pi e(a+b)} + \frac{\frac{\pi}{8} \rho_F g_{fic} a b^3}{\frac{1}{4} \pi b^2 e (3a+b)} = 1.3 \text{ MPa}$$

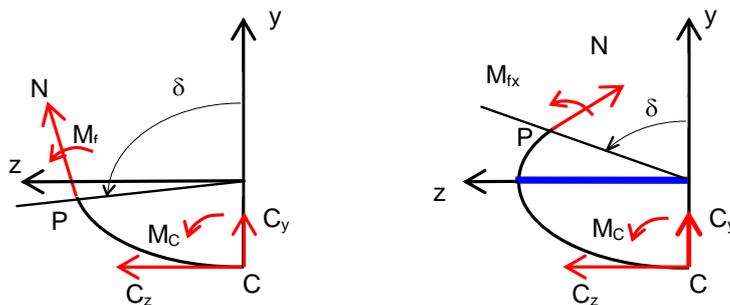
A.II.3 On suppose que la poutre s'appuie sur son point le plus bas. Par raison de symétrie on étudie le comportement d'une demi-poutre verticale encastree au point C et en liaison glissiere avec la verticale au point D. Ecrire les equations d'equilibre de ce systeme de facon a exprimer les inconnues de liaison en C en fonction des inconnues de liaison en D et du chargement du au fluide.

$$C_z + D_z + \frac{\rho_F g_{fic} L b^2}{2} = 0$$

$$C_y - \frac{\rho_F g_{fic} L b a \pi}{4} = 0$$

$$M_C + M_D - b C_z + b D_z + \frac{\rho_F g_{fic} L b (a^2 - b^2)}{3} = 0$$

A.II.4 Pour determiner les inconnues d'effort en D on souhaite utiliser les methodes energetiques. Donner l'expression du moment de flexion pour tout point P compris entre C et D (sans developper les calculs).



1ier tronçon

$$M_{fx} = -(M_C + C_y z_P - C_z(b + y_P) + \int_{\pi}^{\delta} \rho_F g_{fic} L y ((y_P - y) dy + (z_P - z) dz) d\theta)$$

2ieme tronçon

$$M_{fx} = M_D + D_z(b - b \cos \delta)$$

A.II.5 Ecrire les intégrales permettant d'obtenir l'énergie de déformation de flexion de cette poutre (On négligera les effets de l'effort tranchant et de l'effort normal). Justifier pourquoi on ne développera pas les calculs analytiques.

Sur le premier tronçon  $\pi$  et  $\frac{\pi}{2}$

$$w = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{M_1^2}{EI_{zz}} \right) d\ell \quad \frac{\partial w}{\partial M_C} = 0$$

On obtient une intégrale elliptique.

### A.III MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS DE LA CITERNE

A.III.1 Déterminer la matrice Jacobienne de cet élément et son déterminant.

Définition de la Jacobienne

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \text{ avec } x = [N][X_e] \quad y = [N][Y_e]$$

$$x_{,\xi} = [N_{,\xi}][X_e] \quad y_{,\xi} = [N_{,\xi}][Y_e]$$

$$x_{,\eta} = [N_{,\eta}][X_e] \quad y_{,\eta} = [N_{,\eta}][Y_e]$$

$$[N_{,\xi}] = \left[ -\frac{1}{4}(1-\eta), \frac{1}{4}(1-\eta), \frac{1}{4}(1+\eta), -\frac{1}{4}(1+\eta) \right]$$

$$[N_{,\eta}] = \left[ -\frac{1}{4}(1-\xi), -\frac{1}{4}(1+\xi), \frac{1}{4}(1+\xi), \frac{1}{4}(1-\xi) \right]$$

$${}^t[X_e] = [x_i, x_i + 2c, x_i + 2c, x_i] \quad {}^t[Y_e] = [y_i, y_i, y_i + 2c, y_i + 2c]$$

$$[J] = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(J) = c^2$$

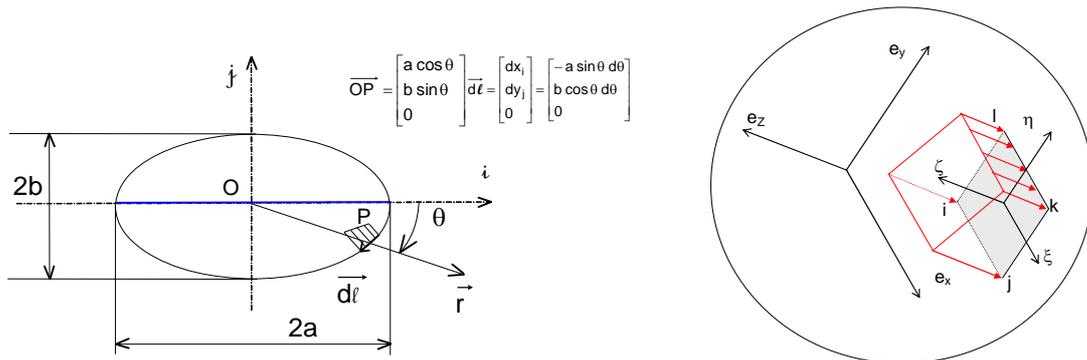
A.III.2 Justifier le fait que le vecteur des déplacements d'un point de l'élément noté  $[u]$ , et le vecteur des efforts d'un point dans l'élément noté  $[p]$ , sont des scalaires.

La dimension de  $[u]$  correspond au nombre de ddl par nœud de l'élément donc 1

Le produit de  $[u]$  par  $[p]$  définissant le travail des efforts de pression, il s'agit donc d'un scalaire.

Comme  $[u]$  est un scalaire il faut donc que  $[p]$  soit aussi un scalaire

A.III.3 Compte tenu du maillage choisi la pression sur un élément n'est fonction que de  $\eta$ . Afin de déterminer la loi d'évolution des pressions sur cet élément, donner l'expression de la pression sur les bords inférieur et supérieur en fonction de la position de l'élément par rapport à la surface libre du fluide. En déduire dans l'élément de référence l'expression de  $p(\eta)$  en fonction  $p_i$  et de  $p_k$ . On pourra utiliser le repère de travail suivant :



$$p_{i,j} = -\rho_F g_{fic} (b \sin \theta + c \cos \gamma)$$

$$p_{k,l} = -\rho_F g_{fic} b (b \sin \theta - c \cos \gamma)$$

avec  $\tan \gamma = \frac{a}{b} |\tan \theta|$

$$p(\eta) = A\eta + B$$

$$p(\eta) = -\frac{p_{i,j} - p_{k,l}}{2} \eta + \frac{p_{i,j} + p_{k,l}}{2}$$

A.III.4 Donner l'expression du travail virtuel des efforts externes appliqués à l'élément, sous les deux formes  $w^* = \frac{1}{2} {}^t[U^*][P]$  et  $w^* = \frac{1}{2} \int_D {}^t[u^*][p] dD$  explicitées en annexe. En déduire l'expression intégrale permettant d'établir le vecteur des forces nodales. Préciser le domaine, les variables et les bornes d'intégration.

$$w^* = \frac{1}{2} \int_D {}^t[u^*][p] dD$$

$$w^* = \frac{1}{2} {}^t[U^*][P]$$

$$\frac{1}{2} {}^t[U^*][P] = \frac{1}{2} \int_D {}^t[u^*][p] dD$$

Sachant que  $[u^*] = [N][U^*]$

$$\frac{1}{2} {}^t[U^*][P] = \frac{1}{2} \int_D {}^t[N][U^*][p] dD$$

$$\frac{1}{2} {}^t[U^*][P] = \frac{1}{2} \int_D {}^t[U^*] {}^t[N][p] dD$$

$$\frac{1}{2} {}^t[U^*][P] = \frac{1}{2} {}^t[U^*] \int_D {}^t[N][p] dD \quad {}^t[U^*] \text{ constante pour un élément}$$

$$[P] = \int_D {}^t[N][p] dD$$

Le domaine d'intégration correspond à la surface de l'élément  $dS$ .

Comme  $N$  et  $p$  sont exprimés dans le repère de référence de l'élément il faut intégrer entre  $-1$  et  $+1$  pour les variables  $\xi$  et  $\eta$ .

$$[P] = \int_S {}^t[N][p] dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}^t[N][p] \det([J]) d\xi d\eta$$

A.III.5  $[P]$  est le résultat d'une intégrale continue sur le domaine  $D$  que l'on remplace par une sommation discrète (voir annexe II). Donner en justifiant votre réponse le nombre minimum de points d'intégration nécessaire au calcul exact des différentes intégrales.

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^m \omega_j f(\xi_j) \quad \text{intégration exacte des polynômes de degré } \leq 2 \cdot m - 1$$

Chaque composante  ${}^t[N][p] \det([J])$  est le produit d'un polynôme de degré 2 en  $\eta$  et d'un polynôme de degré 1 en  $\xi$ . Pour intégrer exactement ces fonctions il faut  $2 \leq 2 \cdot m - 1$

d'où :

$$m=2$$

A.III.6 On choisit pour l'ensemble des intégrales 2 points d'intégration. Calculer  $P_i$  et  $P_k$  en fonction de  $p_j$  et  $p_k$ .

$$P_i = \int_D \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta) p(\eta) dD$$

$$P_i = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta) \left( -\frac{p_{i,j} - p_{k,l}}{2} \eta + \frac{p_{i,j} + p_{k,l}}{2} \right) \det(J) d\xi d\eta$$

$$P_i = \frac{\det([J])}{4} \int_{-1}^1 (1-\xi) d\xi \int_{-1}^1 (1-\eta) \left(-\frac{p_{i,j}-p_{k,l}}{2} \eta + \frac{p_{i,j}+p_{k,l}}{2}\right) d\eta$$

$$P_i = \frac{c^2}{4} \left[ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] \left[ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{p_{i,j}-p_{k,l}}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{p_{i,j}+p_{k,l}}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(-\frac{p_{i,j}-p_{k,l}}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{p_{i,j}+p_{k,l}}{2}\right) \right]$$

$$P_i = \frac{c^2}{3} (2 p_{i,j} + p_{k,l})$$

$$P_k = \int_D \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta) p(\eta) dD$$

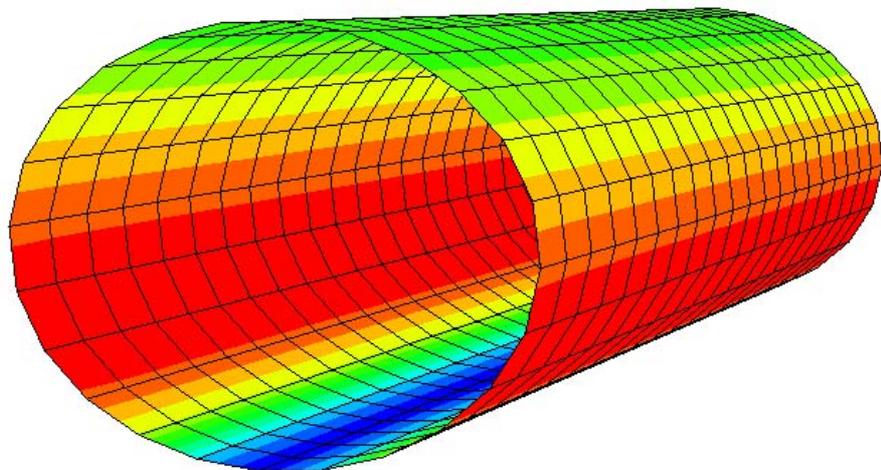
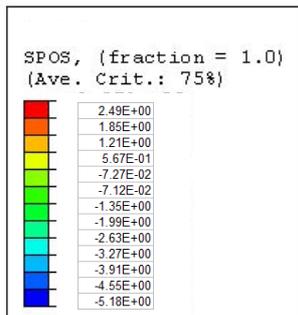
$$P_k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta) \left(-\frac{p_{i,j}-p_{k,l}}{2} \eta + \frac{p_{i,j}+p_{k,l}}{2}\right) \det(J) d\xi d\eta$$

$$P_k = \frac{\det([J])}{4} \int_{-1}^1 (1+\xi) d\xi \int_{-1}^1 (1+\eta) \left(-\frac{p_{i,j}-p_{k,l}}{2} \eta + \frac{p_{i,j}+p_{k,l}}{2}\right) d\eta$$

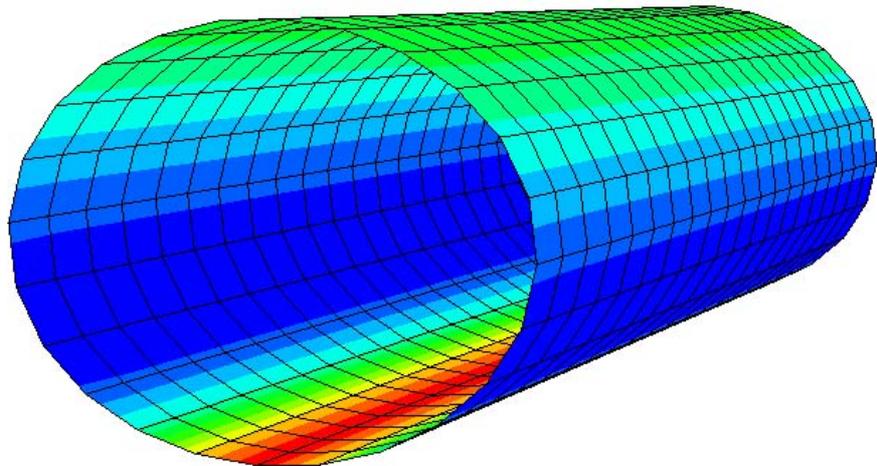
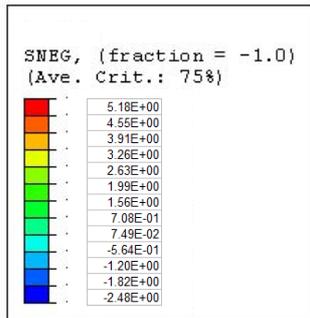
$$P_k = \frac{a^2}{2} \left[ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{p_{i,j}-p_{k,l}}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{p_{i,j}+p_{k,l}}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(-\frac{p_{i,j}-p_{k,l}}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{p_{i,j}+p_{k,l}}{2}\right) \right]$$

$$P_k = \frac{c^2}{3} [p_{i,j} + 2 p_{k,l}]$$

A.III.7 Le calcul des contraintes sur les parois donne les résultats suivants :



Contraintes « circonférentielle » sur la face externe de la citerne (en MPa).



Contraintes « circonférentielle » sur la face interne de la citerne (en MPa).

Donner la position des points les plus sollicités dans la citerne en précisant la nature des sollicitations et les valeurs maximales de la contrainte.

Point bas intérieur en traction, point bas extérieur compression. La sollicitation est de la flexion.

A.III.8 Ce modèle de répartition ne représente pas la réalité compte tenu de l'influence de la présence des fonds, malgré cela nous allons faire l'hypothèse qu'il est suffisamment proche de la réalité au point de coordonnées (0, -b, 0). En appliquant le principe de superposition donner les composantes du tenseur des contraintes dans la base ( $\vec{x}$ ,  $\vec{t}_2$ ,  $\vec{t}_3$ ) exprimées en MPa. En déduire la contrainte équivalente de von Mises.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \tau_{x3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{x3} & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -130 + 1 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 \right) + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} (129^2 + 6^2 + 135^2) + 3(24^2)} = 138 \text{ MPa}$$

#### A.IV ETUDE DES SOLLICITATIONS EN FATIGUE DE LA CITERNE

A.IV.1 Au cours d'un trajet on suppose que le camion tourne autant de fois à droite et à gauche. Ce changement de direction introduit une contrainte alternée de torsion  $\tau_{max} = 24$  MPa et une contrainte de flexion variant très peu, on suppose que les contraintes "circonférentielles"

dues au fluide sont également constantes  $\sigma_{33} = 6 \text{ MPa}$  au point  $(0, -b, 0)$  et  $\sigma_{33} = 2 \text{ MPa}$  au point  $(0, b, 0)$ . Ecrire les deux chargements sous la forme  $[\sigma]_{\text{cst}} + [\sigma]_{\text{alt}} \sin \omega t$ .

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -129 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sin \omega t \qquad [\sigma] = \begin{bmatrix} 131 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sin \omega t$$

Le chargement n'étant pas uniaxial la vérification en fatigue nécessite l'utilisation d'un critère. On choisit celui de Dang Van, voir annexe III.

A.IV.2 Calculer la pression hydrostatique maximale et contrainte tangentielle alternée maximale pour ces 2 points.

$$\sigma_{H\text{max}} = \frac{-129+6}{3} = -41 \text{ MPa} \qquad \sigma_{H\text{max}} = \frac{131+2}{3} = 44 \text{ MPa}$$

$$\tau_{h\text{max}} = 24 \text{ MPa} \qquad \tau_{h\text{max}} = 24 \text{ MPa}$$

A.IV.3 Les caractéristiques en fatigue du matériau utilisé sont  $\sigma_{-1} = 100 \text{ MPa}$  et  $\tau_{-1} = 60 \text{ MPa}$ . Calculer  $E_{\text{DV}}$  pour les deux points et conclure.

$\sigma_H$  et  $\tau_h$  étant maxi en même temps le max de  $E_h(t)$  par rapport au temps et en fonction de l'orientation (une facette de normale  $\vec{h}$ ) est  $E_{\text{DV}} = \frac{\tau_{h\text{max}} + a_f \sigma_{H\text{max}}}{b_f}$

avec:  $a_f = 3 \left( \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{2} \right)$  et  $b_f = \tau_{-1}$ .

Application numérique :

$$E_{\text{DV}} = \frac{\tau_{h\text{max}} + a_f \sigma_{H\text{max}}}{b_f} = \frac{24 - 0.3 \cdot 41}{60} = 0.19$$

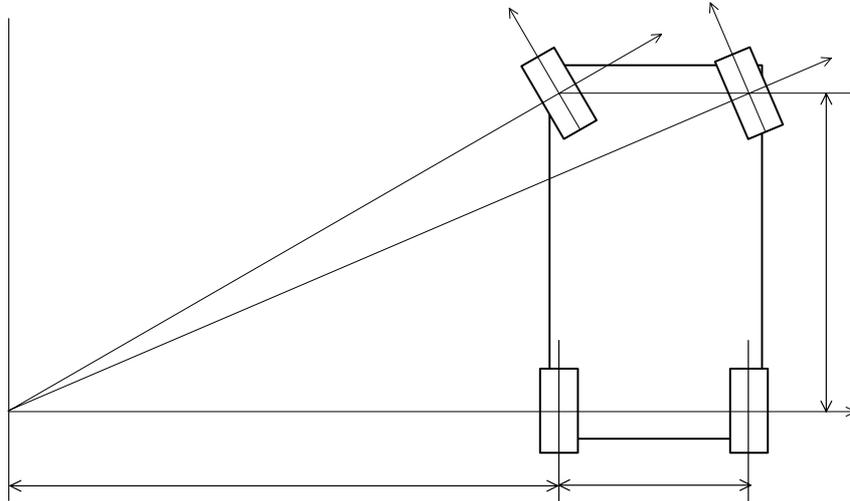
$$E_{\text{DV}} = \frac{\tau_{h\text{max}} + a_f \sigma_{H\text{max}}}{b_f} = \frac{24 + 0.3 \cdot 44}{60} = 0.62$$

Conclusion : La citerne ne fatigue pas et le point le plus sollicité est le point haut.

## **B Etude de la direction**

## B.I CALCULS PRELIMINAIRES

- B.I.1 La figure ci-dessous représente une configuration de l'essieu avant en phase de virage. Connaissant le rayon de courbure  $\rho_c$  de la trajectoire du point  $C_1$  dans  $R_0$  à l'instant  $t$ , déterminer la relation qui existe entre les angles  $\delta_g$  et  $\delta_d$  et la géométrie du tracteur. On utilisera les indications données sur la figure ci-dessous.



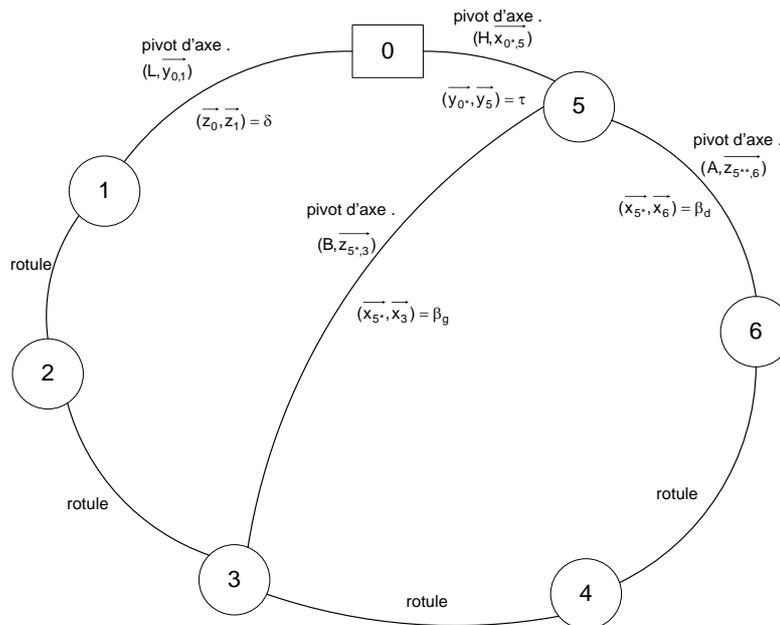
$$\tan \delta_d = \frac{L}{\rho_c + e_v}$$

$$\tan \delta_g = \frac{L}{\rho_c}$$

$$\rho_c \tan \delta_g = (\rho_c + v) \tan \delta_d$$

## B.II MODELISATION ET ETUDE CINEMATIQUE

- B.II.1 Réaliser le graphe des liaisons.



B.II.2 Déterminer le nombre cyclomatique, la mobilité et le degré d'hyperstatisme du mécanisme tel qu'il a été modélisé précédemment.

2 boucles

6 pièces

4 pivots

4 rotules

2 mvt indépendants

2 mobilités internes

système isostatique

B.II.3 Ecrire les deux relations reliant l'angle de rotation de la bielle pendante 1, l'angle d'inclinaison de l'essieu  $\tau$ , et les angles de braquage des roues droite et gauche.

2 équations de liaisons relient les 4 paramètres cinématiques.

$$\overrightarrow{MG}^2 = l_2^2 \text{ et } \overrightarrow{DE}^2 = l_4^2$$

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BG}$$

$$\overrightarrow{MG} = l_1 \overrightarrow{z_1} - e \overrightarrow{x_0} - f \overrightarrow{y_0} - g \overrightarrow{z_0} + l_5 \overrightarrow{y_5} + b_z \overrightarrow{z_3} + b_x \overrightarrow{x_{3^{**}}}$$

Pour minimiser les calculs on projette dans 0.

$$\overrightarrow{z_1} = \sin \delta \overrightarrow{x_0} + \cos \delta \overrightarrow{z_0}$$

$$\begin{aligned}\vec{y}_5 &= \cos \tau \vec{y}_{0^*} + \sin \tau \vec{z}_{0^*} \\ &= \cos \tau \vec{y}_0 + \sin \tau (\cos \varepsilon \vec{z}_0 + \sin \varepsilon \vec{x}_0) \\ &= Z_{5x0} \vec{x}_0 + Z_{5y0} \vec{y}_0 + Z_{5z0} \vec{z}_0\end{aligned}$$

$$\vec{x}_{3^{**}} = \cos(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) \vec{x}_{5^*} + \sin(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) \vec{y}_{5^*}$$

$$\vec{x}_{3^{**}} = \cos(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) \vec{x}_{0^*} + \sin(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) (\cos(\tau + \psi) \vec{y}_{0^*} + \sin(\tau + \psi) \vec{z}_{0^*})$$

$$\vec{x}_{3^{**}} = \cos(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) (\cos \varepsilon \vec{x}_0 - \sin \varepsilon \vec{z}_0) + \sin(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) (\cos(\tau + \psi) \vec{y}_0 + \sin(\tau + \psi) (\sin \varepsilon \vec{x}_0 + \cos \varepsilon \vec{z}_0))$$

$$\begin{aligned}\vec{x}_{3^{**}} &= (\cos(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) \cos \varepsilon + \sin(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) \sin(\tau + \psi) \sin \varepsilon) \vec{x}_0 + \sin(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) \cos(\tau + \psi) \vec{y}_0 \\ &+ (\sin(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) \sin(\tau + \psi) \cos \varepsilon - \cos(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) \sin \varepsilon) \vec{z}_0\end{aligned}$$

$$\vec{x}_{3^{**}} = X_{3^{**}x0} \vec{x}_0 + X_{3^{**}y0} \vec{y}_0 + X_{3^{**}z0} \vec{z}_0$$

$$\begin{aligned}\vec{z}_{3,5^*} &= \cos(\tau + \psi) \vec{z}_{0^*} - \sin(\tau + \psi) \vec{y}_{0^*} \\ &= \cos(\tau + \psi) (\cos \varepsilon \vec{z}_0 + \sin \varepsilon \vec{x}_0) - \sin(\tau + \psi) \vec{y}_0 \\ &= \cos(\tau + \psi) \sin \varepsilon \vec{x}_0 - \sin(\tau + \psi) \vec{y}_0 + \cos(\tau + \psi) \cos \varepsilon \vec{z}_0\end{aligned}$$

$$\vec{z}_{3,5^*} = Z_{3x0} \vec{x}_0 + Z_{3y0} \vec{y}_0 + Z_{3z0} \vec{z}_0$$

$$\begin{aligned}\ell_2^2 &= (\ell_1 z_{1x0} - e + \ell_5 z_{5x0} + b_z z_{3x0} + b_x x_{3^{**}x0})^2 \\ &+ (-f + \ell_5 z_{5y0} + b_z z_{3y0} + b_x x_{3^{**}y0})^2 \\ &+ (\ell_1 z_{1z0} - g + \ell_5 z_{5z0} + b_z z_{3z0} + b_x x_{3^{**}z0})^2\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse des petits angles :

$$\vec{z}_1 = \delta \vec{x}_0 + \vec{z}_{0,1} \quad \vec{y}_5 = y_{0,0^*,5} + \tau \vec{z}_0$$

$$\vec{z}_{3,5^*} = \varepsilon \vec{x}_0 - (\tau + \psi) \vec{y}_0 + \vec{z}_0$$

$$\vec{x}_{3^{**}} = \cos(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) \vec{x}_{0^*} + \sin(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) (\vec{y}_{0^*} + (\tau + \psi) \vec{z}_{0^*})$$

$$\vec{x}_{3^{**}} = \cos(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) (\vec{x}_0 - \varepsilon \vec{z}_0) + \sin(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) \vec{y}_0 + \sin(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) (\tau + \psi) \vec{z}_0$$

$$\vec{x}_{3^{**}} = \cos(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) (\cos \varepsilon \vec{x}_0 - \sin \varepsilon \vec{z}_0) + \sin(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) (\cos(\tau + \psi) \vec{y}_0 + \sin(\tau + \psi) (\sin \varepsilon \vec{x}_0 + \cos \varepsilon \vec{z}_0))$$

$$\begin{aligned}\vec{x}_{3^{**}} &= (\cos \gamma_{3^{**}} \cos \beta_g - \sin \gamma_{3^{**}} \sin \beta_g) \vec{x}_0 \\ &+ (\sin \gamma_{3^{**}} \cos \beta_g + \cos \gamma_{3^{**}} \sin \beta_g) \vec{y}_0 \\ &+ ((\sin \gamma_{3^{**}} \cos \beta_g + \cos \gamma_{3^{**}} \sin \beta_g) (\tau + \psi) - (\cos \gamma_{3^{**}} \cos \beta_g - \sin \gamma_{3^{**}} \sin \beta_g) \varepsilon) \vec{z}_0\end{aligned}$$

$$\vec{x}_{3^{**}} = (\cos \gamma_{3^{**}} - \beta_g \sin \gamma_{3^{**}}) \vec{x}_0 + (\sin \gamma_{3^{**}} + \beta_g \cos \gamma_{3^{**}}) \vec{y}_0 + ((\tau + \psi) \sin \gamma_{3^{**}} - \varepsilon \cos \gamma_{3^{**}}) \vec{z}_0$$

$$\begin{aligned}l_2^2 &= (\ell_1 \delta - e + b_z \varepsilon + b_x (\cos(\gamma_{3^{**}}) - \sin(\gamma_{3^{**}}) \beta_g))^2 \\ &+ (-f + \ell_5 - b_z (\tau + \psi) + b_x (\sin \gamma_{3^{**}} + \beta_g \cos \gamma_{3^{**}}))^2 \\ &+ (\ell_1 - g + \ell_5 \tau + b_z + b_x (\sin(\gamma_{3^{**}})(\tau + \psi) - \cos(\gamma_{3^{**}}) \varepsilon))^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l_2^2 &= (e^2 + b_x^2 \cos^2 \gamma_{3^{**}} + 2\ell_1 \delta (-e + b_x \cos \gamma_{3^{**}}) - 2e(b_z \varepsilon + b_x \cos \gamma_{3^{**}} - \beta_g \sin \gamma_{3^{**}}) \\ &+ 2 + b_z \varepsilon b_x (\cos(\gamma_{3^{**}}) - 2 b_x \beta_g \cos \gamma_{3^{**}} \sin \gamma_{3^{**}}) \\ &+ (f^2 + \ell_5^2 + b_x^2 \sin^2 \gamma_{3^{**}} - 2f(\ell_5 - b_z (\tau + \psi) + b_x (\sin \gamma_{3^{**}} + \beta_g \cos \gamma_{3^{**}})) + 2\ell_5 (-b_z (\tau + \psi) + b_x \sin \gamma_{3^{**}}) \\ &- 2 b_z (\tau + \psi) b_x \sin \gamma_{3^{**}}) \\ &+ (\ell_1^2 - g^2 + b_z^2 + 2\ell_1 (-g + \ell_5 \tau + b_z + b_x (\sin(\gamma_{3^{**}})(\tau + \psi) - \cos(\gamma_{3^{**}}) \varepsilon)) \\ &+ 2g(\ell_5 \tau + b_z + b_x (\sin(\gamma_{3^{**}})(\tau + \psi) - \cos(\gamma_{3^{**}}) \varepsilon) + 2 b_z b_x \varepsilon (\sin(\gamma_{3^{**}})(\tau + \psi) - \cos(\gamma_{3^{**}})))\end{aligned}$$

Seconde équation :

$$\vec{DE} = \vec{DB} + \vec{BH} + \vec{HA} + \vec{AE}$$

Pour minimiser les calculs on projette dans 5.

$$\vec{DE} = b_z \vec{z}_3 - b_{x^*} \vec{x}_{3^*} - 2\ell_5 \vec{y}_5 - b_z \vec{z}_6 + b_{x^*} \vec{x}_{6^*}$$

$$\vec{z}_{3,5^*} = -\sin \psi \vec{y}_5 + \cos \psi \vec{z}_5$$

$$\vec{x}_{3^*} = \cos(-\gamma_{3^*} + \beta_g) \vec{x}_{5^*} + \sin(-\gamma_{3^*} + \beta_g) \vec{y}_{5^*}$$

$$\vec{x}_{3^*} = \cos(-\gamma_{3^*} + \beta_g) \vec{x}_5 + \sin(-\gamma_{3^*} + \beta_g) (\cos \psi \vec{y}_5 + \sin \psi \vec{z}_5)$$

$$\vec{x}_{3^*} = x_{3^*x5} \vec{x}_5 + x_{3^*y5} \vec{y}_5 + x_{3^*z5} \vec{z}_5$$

$$\vec{x}_{6^*} = \cos(-\gamma_{3^*} + \beta_d) \vec{x}_{5^{**}} + \sin(-\gamma_{3^*} + \beta_d) \vec{y}_{5^{**}}$$

$$\vec{x}_{6^*} = \cos(-\gamma_{3^*} + \beta_d) \vec{x}_{5^*} + \sin(-\gamma_{3^*} + \beta_d) (\cos \psi \vec{y}_5 - \sin \psi \vec{z}_5)$$

$$\vec{x}_{6^*} = \cos(-\gamma_{3^*} + \beta_d) \vec{x}_5 + \sin(-\gamma_{3^*} + \beta_d) \cos \psi \vec{y}_5 - \sin(-\gamma_{3^*} + \beta_d) \sin \psi \vec{z}_5$$

$$\vec{x}_{6^*} = x_{6^*x5} \vec{x}_5 + x_{6^*y5} \vec{y}_5 + x_{6^*z5} \vec{z}_5$$

$$\vec{z}_{6,5^{**}} = \cos \psi \vec{z}_5 + \sin \psi \vec{y}_5$$

$$\vec{z}_{6,5^{**}} = z_{6x5} \vec{x}_5 + z_{6y5} \vec{y}_5$$

En utilisant l'hypothèse dans petits angles :

$$\begin{aligned} \ell_4^2 &= (b_{x^*} x_{3^*x5} + b_{x^*} x_{6^*x5})^2 \\ &\quad + (-b_z \sin \psi + b_{x^*} x_{3^*y5} - 2\ell_5 - b_z \sin \psi + b_{x^*} x_{6^*y5})^2 \\ &\quad + (-b_z \cos \psi + b_{x^*} x_{3^*z5} + b_z \cos \psi + b_{x^*} x_{6^*z5})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell_4^2 &= (b_{x^*} \beta_g \sin \gamma_{3^{**}} + b_{x^*} \beta_b \sin \gamma_{3^{**}})^2 \\ &\quad + (b_{x^*} \beta_d \cos \gamma_{3^{**}} - b_{x^*} \beta_g \cos \gamma_{3^{**}} - 2b_{x^*} \sin \gamma_{3^{**}} - 2\ell_5 - 2b_z \psi)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell_4^2 &= +(b_{x^*} \beta_d \cos \gamma_{3^{**}})^2 + (b_{x^*} \beta_g \cos \gamma_{3^{**}})^2 + 4(b_{x^*} \sin \gamma_{3^{**}})^2 + 4\ell_5^2 \\ &\quad + 2b_{x^*} \beta_d \cos \gamma_{3^{**}} (-2b_{x^*} \sin \gamma_{3^{**}} - 2\ell_5) \\ &\quad - 2b_{x^*} \beta_g \cos \gamma_{3^{**}} (-2b_{x^*} \sin \gamma_{3^{**}} - 2\ell_5) \\ &\quad - 8b_{x^*} \sin \gamma_{3^{**}} (\ell_5 + b_z \psi) \\ &\quad + 8\ell_5 b_z \psi \end{aligned}$$

### B.III ÉTUDE DES EFFORTS DANS LA DIRECTION

B.III.1 En isolant successivement les fusées droite et gauche écrire les relations qui permettent de déterminer l'effort dans la bielle de direction  $\vec{F}_{2 \rightarrow 3} = \frac{F_{23}}{\ell_2} (x_{MG} \vec{x}_{5^*} + y_{MG} \vec{y}_{5^*} + z_{MG} \vec{z}_{5^*})$  et l'effort dans la bielle de connexion en fonction des efforts dans les roues, de la géométrie et des paramètres cinématiques.

On écrit une équation de moment autour de  $(B, \vec{z}_{5^*})$  appliquée à 3.

$$\vec{BG} \wedge \frac{F_{23}}{\ell_2} (x_{MG} \vec{x}_{5^*} + y_{MG} \vec{y}_{5^*} + z_{MG} \vec{z}_{5^*}) + \vec{BD} \wedge \frac{-F_{46}}{\ell_5} (x_{DE} \vec{x}_5 + y_{DE} \vec{y}_{5^*} + z_{DE} \vec{z}_{5^*}) + N_{03} \vec{z}_{5^*} = \vec{0}$$

$$\vec{BG} = b_x (\cos(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) \vec{x}_{5^*} + \sin(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) \vec{y}_{5^*}) + b_z \vec{z}_{5^*}$$

$$\vec{BD} = b_{x^*} (\cos(\gamma_{3^*} + \beta_g) \vec{x}_{5^*} + \sin(\gamma_{3^*} + \beta_g) \vec{y}_{5^*}) - b_z \vec{z}_{5^*}$$

$$\begin{bmatrix} b_x \cos(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) \\ b_x \sin(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) \\ b_z \end{bmatrix} \wedge \frac{F_{23}}{\ell_2} \begin{bmatrix} x_{MG} \\ y_{MG} \\ z_{MG} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{x^*} \cos(\gamma_{3^*} + \beta_g) \\ b_{x^*} \sin(\gamma_{3^*} + \beta_g) \\ -b_z \end{bmatrix} \wedge \frac{-F_{46}}{\ell_5} \begin{bmatrix} x_{DE} \\ y_{DE} \\ z_{DE} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{F_{23}}{\ell_2} (b_x \cos(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) y_{MG} - b_x \sin(\gamma_{3^{**}} + \beta_g) x_{MG}) - \frac{F_{46}}{\ell_5} (b_{x^*} \cos(\gamma_{3^*} + \beta_g) y_{DE} - b_{x^*} \sin(\gamma_{3^*} + \beta_g) x_{DE}) + N_{03} = 0$$

On écrit une équation de moment autour de  $(A, \vec{z}_{5^{**}})$  appliquée à 6.

$$\vec{AE} \wedge \frac{F_{46}}{\ell_5} (x_{DE} \vec{x}_{5^{**}} + y_{DE} \vec{y}_{5^{**}} + z_{DE} \vec{z}_{5^{**}}) + N_{06} \vec{z}_{5^{**}} = \vec{0}$$

$$\vec{AE} = b_{x^*} (\cos(-\gamma_{3^*} + \beta_d) \vec{x}_{5^{**}} + \sin(-\gamma_{3^*} + \beta_d) \vec{y}_{5^{**}}) - b_z \vec{z}_{5^{**}}$$

$$\begin{bmatrix} b_{x^*} \cos(-\gamma_{3^*} + \beta_d) \\ b_{x^*} \sin(-\gamma_{3^*} + \beta_d) \\ -b_z \end{bmatrix} \wedge \frac{F_{46}}{\ell_5} \begin{bmatrix} x_{DE} \\ y_{DE} \\ z_{DE} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{06} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{F_{46}}{\ell_5} (b_{x^*} \cos(-\gamma_{3^*} + \beta_d) y_{DE} - b_{x^*} \sin(-\gamma_{3^*} + \beta_d) x_{DE}) + N_{06} = 0$$

B.III.2 Sans effectuer de calcul dire comment on peut obtenir le couple au volant.

On écrit une équation de moment sur le levier pendant autour de y et on prend en compte de rapport de réduction.

## C Modélisation complète du poids lourd articulé en solides rigides

C.I.1 On demande au candidat de construire le modèle complet en faisant des choix et en les justifiant tout en tenant compte de ce qui a été vu précédemment. Pour ce faire, il est nécessaire de définir pour chaque sous ensembles de pièces liées :

- les repères et les paramètres géométriques associés à ces sous ensembles et nécessaires à la mise en équation, on pourra compléter l'ébauche de schéma proposée sur la feuille réponse ;
- la cinétique et la géométrie des masses ainsi que les hypothèses qui y sont associées ;
- les liaisons ainsi que les hypothèses qui y sont associées ;
- si nécessaire les actions mécaniques extérieures (données) et intérieures (lois de comportement), ainsi que les équations supplémentaires de type cinématique.

- Solide 1 : Le tracteur

o Etant donné que l'on s'intéresse en priorité au renversement de la citerne, on supposera que les déformations des suspensions du tracteur sont nulles.

o Les paramètres du mouvement du tracteur par rapport à R0 sont données par

$$\vec{O_0G_1} = (x_1 \vec{x}_1 + R \vec{y}_1 + z_1 \vec{z}_1) \text{ et } (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \varphi_1. \text{ Avec } R \text{ rayon des roues.}$$

- o Le tracteur est de masse  $m_1$  située au point  $G_1$  le tenseur d'inertie est tel que :

$$\overline{I}(G_1, S_1) = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{R_1}$$

- Solide 2 : La citerne

o La citerne est accrochée au tracteur par mécanisme que l'on pourra modéliser par une liaison sphérique en  $K$ , associée à un torseur d'effort tel que

$$\{\overline{\mathcal{F}}_{1/2}\} : \left\{ \begin{array}{l} \overline{R}_{12} = X_{12} \overline{x}_3 + Y_{12} \overline{y}_3 + Z_{12} \overline{z}_3 \\ \overline{M}_{12}(K) = (-k_{12} \beta_2 - c_{12} \dot{\beta}_2) \overline{x}_3 \end{array} \right\}, \text{ la composante de moment modélisant la torsion.}$$

o Les paramètres du mouvement de la citerne par rapport à  $R_1$  sont données par une rotation autour de  $\overline{y}_{1,3}$  avec  $(\overline{x}_1, \overline{x}_3) = \varphi_2$  et une rotation autour de  $\overline{x}_2$  avec  $(\overline{y}_{1,3}, \overline{y}_2) = \beta_2$ , avec

$$\overline{G}_2 K = (\ell_3 \overline{x}_3 + h_3 \overline{y}_{1,3}) \quad \overline{G}_2 C_R = (-\ell_4 \overline{x}_3 - h_4 \overline{y}_3) \cdot \ell_3, \ell_4, h_3, h_4 \text{ étant des longueurs constantes.}$$

- o La citerne est de masse  $m_2$  située au point  $G_2$  le tenseur d'inertie est tel que

$$\overline{I}(G_2, S_2) = \begin{bmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{bmatrix}_{R_2}$$

- Solide 3 : L'essieu arrière

o L'essieu est accroché à la citerne en  $CR$  ( $(CR, K)$  définissant l'axe de roulis) par une « pseudo » liaison pivot d'axe  $\overline{x}_2$

o Le paramètre du mouvement de l'essieu par rapport à la citerne est donné par  $(\overline{y}_{1,3}, \overline{y}_2) = \beta_2$

- On négligera la masse de l'essieu devant la masse de la citerne.

- Solide  $i$  : Les roues  $i=4,5,6,7,8,9$

o Dans la réalité les essieux arrière du tracteur et de la citerne sont doubles et équipés de quatre pneumatiques. Pour ce modèle nous utiliserons des essieux simples équipés de deux pneumatiques.

o On suppose que les roues sont de même rayon  $R$  et roulent sans glisser sur le sol. Les paramètres des mouvements des roues par rapport au solide 3 et 1 sont donnés par

$$(\overline{z}_{1,3}, \overline{z}_i) = \theta_i$$

- o On négligera leurs masses devant la masse de la citerne et du tracteur.

- Les torseurs des efforts du sol sur les roues sont donnés dans les repères des

plans de jantes des roues par  $\{\mathcal{F}_{0/i}\}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{0i} = X_{0i}\vec{x}_{pi} + Y_{0i}\vec{y}_{pi} + Z_{0i}\vec{z}_{pi} \\ \vec{M}_{0i}(J_i) = \vec{0} \end{array} \right\}$$

- Les roues motrices sont les roues 6 et 7 du tracteur sur lesquelles on applique les couples  $C_{m6}$  et  $C_{m7}$ .

- Les roues directrices sont les roues 4 et 5 du tracteur. L'angle au volant impose à ces roues un angle  $\delta_d$  et  $\delta_g$  par rapport l'axe  $\vec{x}_i$ .

- L'entraxe des roues sur l'essieu avant est noté  $v_1$  et  $v_3$  sur l'essieu arrière.

- "Solide j": Le fluide  $j=10,11,12,13,14\dots$

- On décompose en une masse fixe  $m_{fixe}$  et  $j$  masses mobiles identiques  $m_{fm}$

- Les positions des  $j$  pendules de dimensions identiques  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ .

- Les paramètres des mouvements seront notés  $(y_{citerne}, y_{pendule\_i}) = \psi_{pi}$