

# ETUDE DU COMPORTEMENT ROUTIER D'UN POIDS LOURD TRACTANT UNE CITERNE

<b>PRESENTATION</b>	<b>2</b>
<b>MODELISATION 2D</b>	<b>5</b>
<b>A ETUDE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DU FLUIDE DANS LA CITERNE</b>	<b>5</b>
<b>B ETUDE DYNAMIQUE DU RENVERSEMENT : ANALOGIE MECANIQUE, MODELISATION DU DEPLACEMENT DU FLUIDE PAR UN MODELE DE PENDULE RIGIDE</b>	<b>7</b>
<b>MODELISATION 3D</b>	<b>11</b>
<b>A. ETUDE DE LA CITERNE</b>	<b>11</b>
<i>A.I Citerne considérée comme une poutre</i>	11
<i>A.II Sollicitations créées par le fluide sur l'enveloppe de la citerne</i>	14
<i>A.III Modélisation par éléments finis de la citerne</i>	17
<i>A.IV Etude des sollicitations en fatigue de la citerne</i>	19
<b>B ETUDE DE LA DIRECTION</b>	<b>20</b>
<i>B.I Calculs préliminaires</i>	21
<i>B.II Modélisation et étude cinématique</i>	21
<i>B.III Etude des efforts dans la direction</i>	24
<b>C MODELISATION COMPLETE DU POIDS LOURD ARTICULE EN SOLIDES RIGIDES</b>	<b>24</b>
<b>ANNEXES</b>	<b>26</b>
<i>Annexe I : Elément de coque mince quadrangulaire isoparamétrique à quatre nœuds</i>	26
<i>Annexe II : Points d'intégration</i>	28
<i>Annexe III : Critère de Dang Van</i>	28
<b>FEUILLE REPONSE</b>	<b>29</b>

---

# Présentation

---



*Accident sur le pont de Tancarville-2005*

*« L'accidentologie Poids Lourds en France en 1999 : alors que les 550 000 poids lourds de plus de 3.5 tonnes ne représentent que 2% du parc des véhicules et effectuent 5% des kilomètres parcourus, ils sont impliqués dans 5.3% des accidents corporels et font 12.9 % des tués. Ainsi 1032 des 8029 personnes tuées sur la route en France en 1999 l'ont été dans un accident impliquant un poids lourd, soit un taux de gravité 2.4 fois supérieur à l'ensemble des accidents. A signaler que seules 104 de ces victimes étaient des usagers de poids lourds. Parmi les 125 000 accidents corporels recensés, 6 600 impliquent au moins un poids lourd, et cette répartition fait apparaître 1 185 véhicules avec remorque et 2 854 tracteurs routiers avec semi-remorque. Ces grandes tendances de l'accidentologie "poids lourds" font donc apparaître à la fois une fréquence d'implication plus forte et une gravité moyenne plus élevée. Au-delà des statistiques, concernant le problème du renversement des citernes, et tout particulièrement celles transportant des matières dangereuses, c'est l'importante gravité potentielle de ces accidents qui justifie pleinement la réalisation de ce programme. »*

Ce texte, extrait de « SIA - Actes du Congrès de Dynamique du Véhicule - CENTRALE LYON - 6-7 Juin 2001 », met en évidence l'intérêt grandissant accordé à l'étude du renversement des citernes de poids lourd, au vu de la gravité des accidents qui impliquent ce genre de véhicule.

Les poids lourds ont un centre de gravité élevé. Ils présentent par conséquent des problèmes de stabilité pour des trajectoires en virage à grande vitesse et pour les changements brutaux de voies (comme les évitements par exemple). Les accidents les plus graves et les plus fréquents concernent plus particulièrement les véhicules lourds articulés, avec remorque et éventuellement citerne, en circulation sur autoroute. Dans le cas de citerne transportant des liquides, les mouvements propres du fret liquide interagissent avec ceux du véhicule et amplifient le risque de renversement. Des études ont

montré également que la torsion du châssis-plateau et de la citerne de ces véhicules contribue de manière non négligeable à la dégradation des performances.

Aujourd'hui, l'augmentation de la demande de sécurité, en particulier pour le transport des matières dangereuses, mais surtout l'énorme coût engendré par ce type d'accident, conduisent à la volonté de mieux comprendre les performances dynamiques de ces véhicules, les phénomènes qui pourraient réduire sa fiabilité, et les solutions qui pourraient améliorer leur stabilité lors de leur conception.

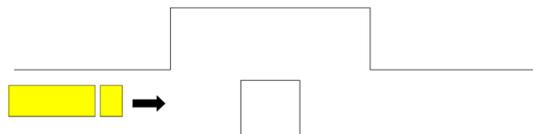
Se limiter à des solutions de règles de conduites du véhicule ne suffit pas. Il est difficile pour le chauffeur de ressentir la stabilité de son véhicule, puisque sa perception est celle du comportement du tracteur alors que généralement c'est la remorque tractée qui bascule en premier. C'est pourquoi les investigations s'orientent vers des systèmes de contrôle actif pouvant agir sur l'angle de basculement, les transferts de charge latéraux, ou les accélérations latérales.

Pour mettre au point ces systèmes, la simulation des poids lourds à fret liquide et à châssis "torsible" s'est avérée nécessaire à une meilleure appréhension des phénomènes dynamiques, dans la mesure où les tests réels sont difficiles à mettre en œuvre et très coûteux.

L'objectif de ce travail est donc de mettre en place une modélisation, avec des approches de complexité croissante, pour appréhender le comportement dynamique d'un véhicule de type poids-lourds avec citerne, avec prise en compte du ballonnement de liquide.

On s'intéressera dans un premier temps au comportement du fluide dans la citerne, auquel on associera un modèle mécanique de type pendule pour l'analyse dynamique. Une modélisation plane à base de ressorts et amortisseurs du véhicule permettra alors l'étude dynamique de l'ensemble dans le but d'évaluer les conditions limites du renversement.

Dans un deuxième temps, on utilisera un modèle plus complexe tridimensionnel. Il sera complété par la prise en compte des effets de torsion et flexion de la citerne, dans le but d'évaluer l'influence des effets de la citerne sur le véhicule en cas d'évitement.



Enfin dans une troisième partie, l'étude du comportement cinématique de la direction sera menée.

Le but ultime de l'ensemble de ces études étant de pouvoir élaborer un système de contrôle de trajectoire (ESP) adapté à ce type de véhicule.

L'étude proposée reflète l'évolution de la démarche menée ces dernières années lors de l'étude du comportement de poids lourds tractant une citerne. Lors de cette épreuve le candidat abordera les différents grands domaines de la mécanique :

Modélisation 2D :

- Mécanique des fluides 15%
- Dynamique des systèmes 2D 20%

Modélisation 3D :

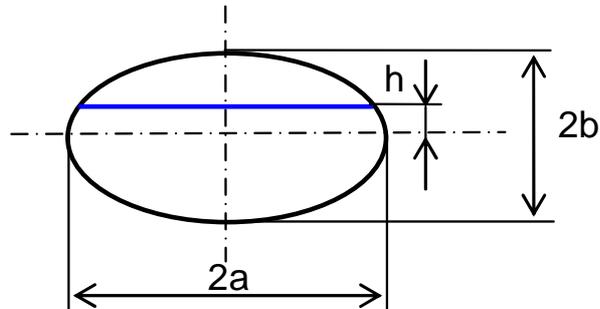
- Etude de la citerne
  - Résistance des matériaux et Mécanique des milieux continus 35%
- Etude de la direction
  - Etude géométrique des mécanismes 3D 10%
  - Statique 3D 10%
- Etude de l'ensemble
  - Modélisation d'un système multicorps 10%

Ces parties sont indépendantes et peuvent être abordées dans l'ordre qui conviendra au candidat.

# Modélisation 2D

## A Etude du comportement dynamique du fluide dans la citerne

Soit à étudier le mouvement d'un fluide dans une citerne elliptique dont les caractéristiques sont les suivantes :



On suppose que la longueur  $L$  de la citerne est suffisamment longue pour ne pas avoir d'influence sur le mouvement transverse du fluide.

Des études ont montré que lorsque la citerne n'était ni presque pleine ni presque vide, on pouvait assimiler le mouvement du fluide dans ce type de citerne au mouvement dans une citerne rectangulaire. Cette citerne rectangulaire a pour longueur celle de la citerne initiale et pour largeur  $2a_r$ , égale à la largeur de la surface libre de la citerne initiale. La hauteur de liquide  $2h_r$  est telle que le volume du liquide présent dans le réservoir rectangulaire est le même que celui du réservoir elliptique.

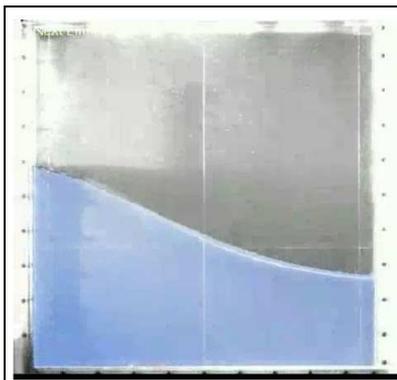
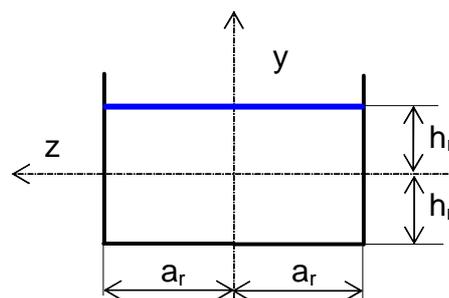


Image expérience "Xflow"



Réservoir rectangulaire

Nous allons donc étudier le mouvement de ballonnement de ce fluide dans un réservoir de section rectangulaire.

### Hypothèses et données :

- fluide parfait incompressible
- écoulement plan
- écoulement à potentiel  $\Phi$
- longueur du réservoir  $L$  très grande devant la largeur  $2a_r$  et la hauteur de fluide  $2h_r$ .

### Rappels :

- Fluide incompressible :  $\nabla^2\Phi = 0$
- Equation de Bernoulli instationnaire :  $\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g y + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = f(t)$

$$\text{avec } u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

Où  $\Phi$  est le potentiel des vitesses,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $\rho$  la masse volumique du fluide transporté,  $p$  la pression,  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont les composantes cartésiennes du champ des vitesses, fonctions de  $y$ ,  $z$  et  $t$ .

- $y_s = \delta(z, t)$  est l'équation de la surface libre du fluide, avec  $p_s$  la pression sur cette surface.

On souhaite déterminer les modes propres des oscillations de la surface. Dans le cas qui nous intéresse la "constante" d'intégration  $f(t)$  sera incluse dans la définition de  $\Phi$ . Tout cela nous amène à rechercher la solution générale de l'équation différentielle sans second membre.

- A.I.1 Simplifier l'équation de Bernoulli, en considérant un écoulement plan  $(O, \vec{y}, \vec{z})$  ayant de faibles vitesses d'écoulement.
- A.I.2 En exprimant de deux manières différentes la vitesse d'une particule de la surface, écrire la relation qui lie  $\delta$  à  $\Phi$ .
- A.I.3 En utilisant l'équation de Bernoulli au niveau de la surface libre, ainsi que l'équation précédente écrire une relation qui lie  $\Phi$ ,  $t$ ,  $g$  et  $y$ .
- A.I.4 On cherche une solution de cette équation sous la forme :  $\Phi(y, z, t) = \psi(y) \zeta(z) G(t)$  où les fonctions  $\psi$  et  $\zeta$  ne dépendent respectivement que de  $y$  et de  $z$ . Traduire l'équation d'incompressibilité par une équation différentielle en  $\psi$  et une équation différentielle en  $\zeta$ .
- A.I.5 Donner les ensembles de solutions possibles de ces deux équations différentielles.
- A.I.6 On pose  $\psi(y) = A e^{\lambda y} + B e^{-\lambda y}$  et  $\zeta(z) = C \sin \lambda z + D \cos \lambda z$  où  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $\lambda$  sont des constantes. A partir des conditions aux limites sur les parois du réservoir déterminer l'ensemble des solutions de  $\psi(y) \cdot \zeta(z)$  en fonction de 2 constantes seulement.

A.I.7 Pour déterminer le mouvement de la surface dans le cas qui nous intéresse, on pose  $G(t) = \cos \omega t$ . En reprenant l'équation obtenue à la question A.I.3, déterminer les valeurs de  $\omega$  pour le premier mode propre antisymétrique (en cosinus).

A.I.8 En déduire l'équation de la surface pour ce premier mode.

Les 2 constantes dépendent des positions et vitesses initiales de la surface du fluide. Si ces valeurs restent petites, conformément aux hypothèses, on pourra dans un premier temps assimiler l'équation de la "surface" du fluide à une droite.

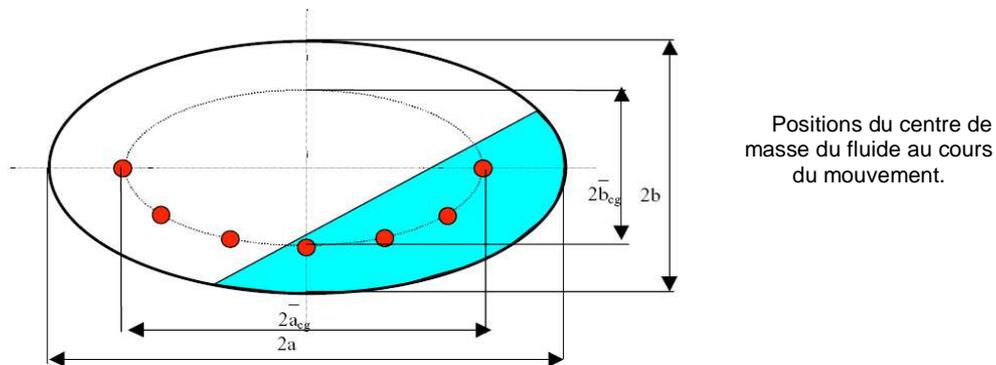
## **B Etude dynamique du renversement : Analogie mécanique, modélisation du déplacement du fluide par un modèle de pendule rigide**

### **Présentation de la modélisation**

Le premier problème consiste à déterminer la position du centre de gravité du fluide dans la citerne elliptique pour les différentes inclinaisons de la surface.

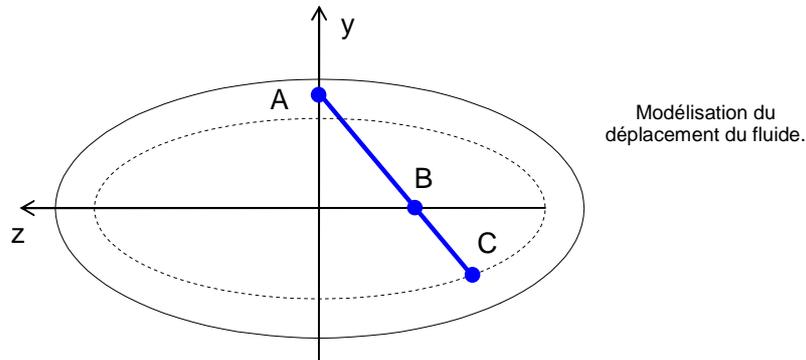
Pour cette modélisation on se place dans le cadre de l'étude précédente où le mode d'excitation de la citerne reste loin du premier mode propre, dans ce cas la surface peut être assimilée à un plan.

Une approche numérique permet de montrer que le centre de gravité du fluide se déplace alors sur une ellipse.



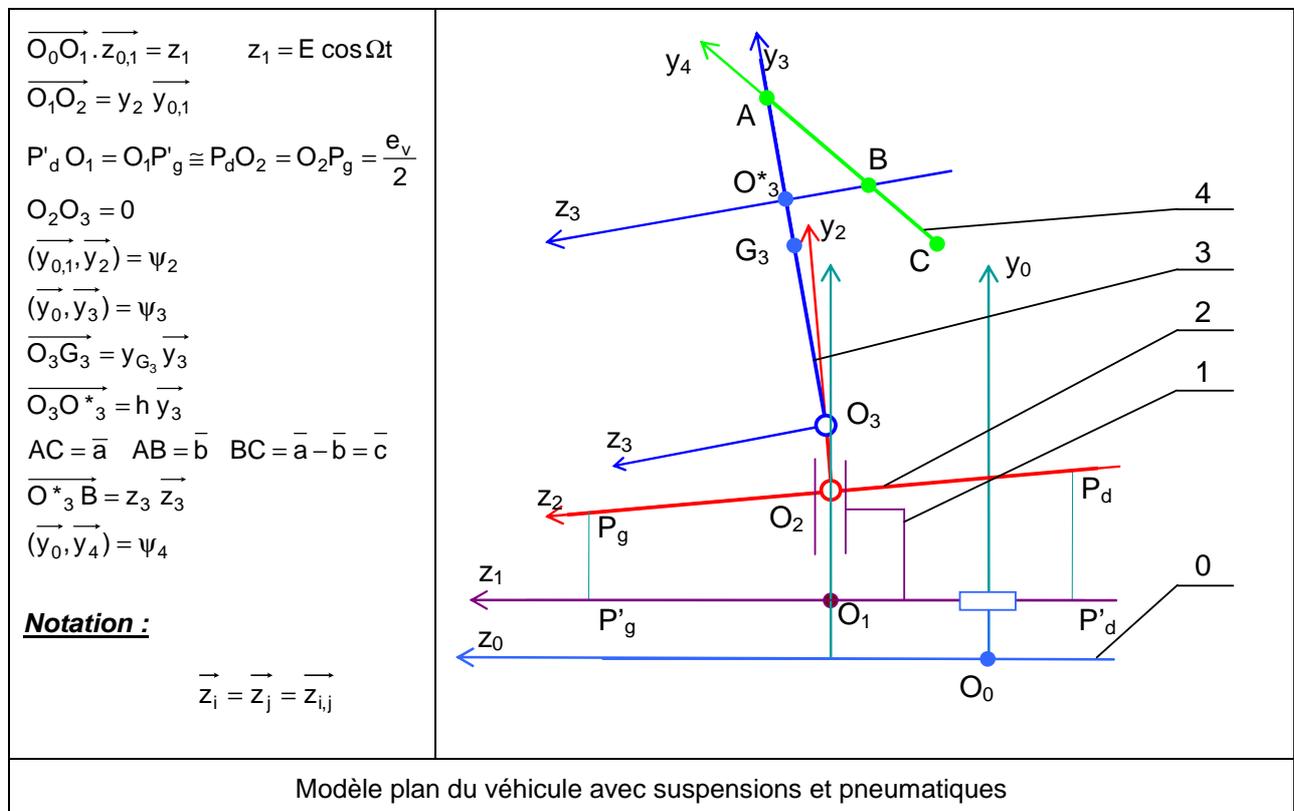
Pour modéliser le déplacement du fluide, on considère celui-ci dissocié en deux masses : une première masse fixe liée à la citerne, et une seconde mobile, liée à l'extrémité C d'un pendule.

Ce pendule est tel que  $AC = \bar{a}$  et  $AB = \bar{b}$ . On impose au point A de se déplacer le long de l'axe  $(O, \vec{y})$  et au point B se déplacer le long de l'axe  $(O, \vec{z})$ .



Par une étude non détaillée ici, on détermine les valeurs de  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ , ainsi que celles des masses fixe et mobile, telles que ce pendule ait les mêmes modes propres que la surface du fluide.

Le comportement 2D du véhicule peut alors être modélisé sous la forme suivante :



**Hypothèses :**

- Les liaisons cinématiques sont parfaites.
- Le repère  $R_0$  lié au sol est galiléen.
- Le repère  $R_1$ , est introduit dans le modèle pour mettre en place les effets dynamiques induits par un changement de direction. Il est caractérisé par  $\overrightarrow{O_0O_1} \cdot \overrightarrow{z_{0,1}} = z_1$ .

## Données :

### Solide 2 : Essieu plus jantes

---

- Son mouvement est tel que le point  $O_2$  est astreint à se déplacer suivant l'axe  $(O_1, \vec{y}_{0,1})$ . Les paramètres du mouvement sont donnés par  $\overrightarrow{O_1O_2} = y_2 \vec{y}_{0,1}$  et  $(\vec{y}_{0,1}, \vec{y}_2) = \psi_2$ .
- Masse négligée
- Les pneumatiques sont modélisés par des couples ressorts amortisseurs identiques tels que  $\overrightarrow{F_{g1 \rightarrow 2}} = -k_p(P'_g P_g - y_{r0}) \vec{y}_0 - c_p \frac{d(P'_g P_g)}{dt} \vec{y}_0$  et  $\overrightarrow{F_{d1 \rightarrow 2}} = -k_p(P'_d P_d - y_{r0}) \vec{y}_0 - c_p \frac{d(P'_d P_d)}{dt} \vec{y}_0$   
avec  $P'_d O_1 = O_1 P'_g \cong P_d O_2 = O_2 P_g = \frac{e_v}{2}$

tels que :  $y_{r0}$  représente la longueur libre des ressorts équivalents.

$k_p$  représente la raideur de ces ressorts.

$c_p$  représente le coefficient d'amortissement des pneumatiques.

On suppose que la rotation  $(\vec{y}_{0,1}, \vec{y}_2) = \psi_2$  de l'essieu est suffisamment petite pour ne pas influencer l'orientation de  $\overrightarrow{F_{g1 \rightarrow 2}}$  et  $\overrightarrow{F_{d1 \rightarrow 2}}$ .

### Solide 3 : La citerne + châssis + partie de fluide considérée comme fixe / citerne

---

- Les suspensions du véhicule introduisent un mouvement relatif du châssis par rapport à l'essieu. On peut considérer ce mouvement comme un mouvement de rotation autour du centre de roulis que l'on positionne en  $O_3$ . Très souvent ce point se trouve proche de  $O_2$ , nous prendrons donc  $O_3$  confondu avec  $O_2$ . Le paramètre du mouvement est donné par  $(\vec{y}_0, \vec{y}_3) = \psi_3$ .
- La masse de l'ensemble constitué de la citerne, du châssis et de la partie fixe du fluide est désignée par  $m_3$ . Le centre de masse de cet ensemble est positionné en  $G_3$  tel que  $\overrightarrow{O_3G_3} = y_{G_3} \vec{y}_3$  et  $\overrightarrow{O_3O^*_3} = h \vec{y}_3$ . Le moment d'inertie suivant l'axe  $(G_3, \vec{x}_0)$  est donné par  $I_{3x}$ .
- Les suspensions exercent sur la citerne des actions que l'on pourra réduire à un couple tel que  $\overrightarrow{M_{2 \rightarrow 3}(O_3)} = (-k_s(\psi_3 - \psi_2) - c_s(\dot{\psi}_3 - \dot{\psi}_2)) \vec{x}_0$  où  $k_s$  et  $c_s$  représentent « la raideur et l'amortissement » des suspensions.

## Solide 4 : « le fluide »

---

- o La part mobile du fluide, de masse  $m_4$ , est considérée comme ponctuelle et liée à l'extrémité C d'un pendule elliptique de longueurs  $AC = \bar{a}$  et  $AB = \bar{b}$  (On pourra écrire  $BC = \bar{a} - \bar{b} = \bar{c}$ ). Le mouvement est tel que le point A est astreint à suivre l'axe  $(O^*_3, \vec{y}_3)$  pendant que le point B suit l'axe  $(O^*_3, \vec{z}_3)$  (contacts ponctuels en A et B). Les paramètres du mouvement sont donnés par  $\vec{O^*_3 B} = z_3 \vec{z}_3$  et  $(y_0, y_4) = \psi_4$

On sollicite le véhicule avec un déplacement latéral de la forme :  $z_1 = E \cos \Omega t$ , où E est une constante, de façon à simuler une manœuvre d'évitement.

On propose d'écrire le système minimum d'équations permettant de déterminer les lois du mouvement. Pour cela nous commencerons par écrire les équations de liaison puis les lois de comportements et enfin les équations de la dynamique nécessaires à la mise en équations du problème.

Les torseurs d'actions mécaniques inconnues pourront être notés de la manière suivante :

$$\left\{ \mathcal{F}_{i \rightarrow j} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{i \rightarrow j} \\ \vec{M}_{i \rightarrow j}(P) \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} X_{ij} \vec{x} + Y_{ij} \vec{y} + Z_{ij} \vec{z} \\ L_{ij} \vec{x} + M_{ij} \vec{y} + N_{ij} \vec{z} \end{array} \right\}_P$$

- B.I.1 Ecrire la relation qui traduit le contact en A en liant le paramètre  $z_3$  à  $\psi_3$  et  $\psi_4$ .
- B.I.2 Exprimer en  $O_2$  le torseur des actions des pneumatiques sur l'essieu en fonction des données, de  $y_2$ ,  $\psi_2$ , et de leurs dérivées. On rappelle que  $\psi_2$  peut être considéré comme petit.
- B.I.3 Ecrire les conditions concernant les actions mécaniques, donnant les limites de décollement des roues.
- B.I.4 Définir une stratégie afin d'obtenir le nombre minimum d'équations de la dynamique.
- B.I.5 Ecrire ces équations.

---

# Modélisation 3D

---

Cette étude va nous permettre d'élaborer un modèle dynamique de l'ensemble {tracteur + remorque-citerne} et d'étudier le comportement routier du véhicule à partir de la commande imposée au volant lors d'une manœuvre d'évitement.

*Pour la suite de l'épreuve on envisagera le cas d'une citerne à moitié remplie  $h=0$ .*

## **A. Etude de la citerne**

Nous allons séparer l'étude en trois parties. Dans la première partie on étudiera les sollicitations sur la citerne considérée comme une poutre droite de section tubulaire elliptique. Dans la deuxième partie on étudiera les sollicitations créées par le fluide sur l'enveloppe de la citerne. On appliquera alors le principe de superposition des contraintes. Lors de la troisième partie nous étudierons cette citerne à l'aide de la méthode des éléments finis.



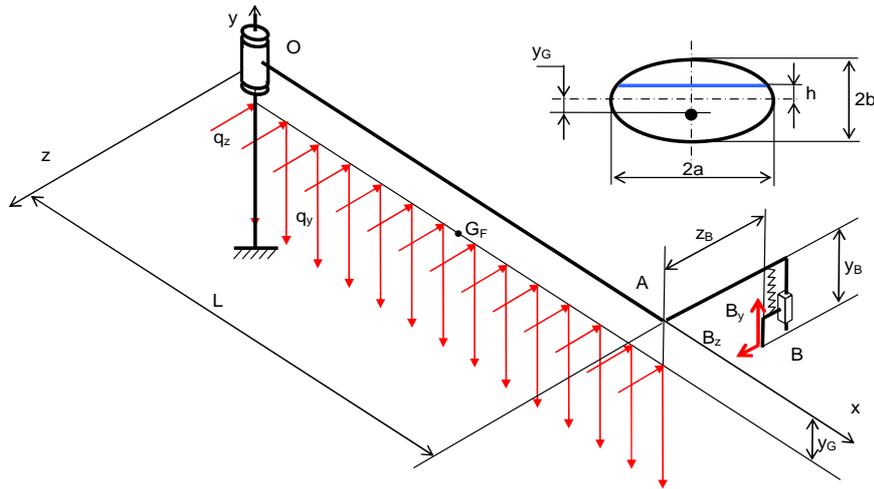
Torsional rigidity test for the first Made in Greece aluminum ADR tank (Jet Engineering SA)

### **A.I CITERNE CONSIDEREE COMME UNE POUTRE**

Pour cette première partie, on ne s'intéressera qu'aux sollicitations induites par les effets dynamiques sur le fluide, par son poids et par les effets de la pression du fluide sur le fond arrière (que l'on considérera comme plan).

On étudiera le comportement de la citerne dans un virage, lors du décolllement des roues intérieures au virage avec écrasement de la suspension et des pneumatiques.

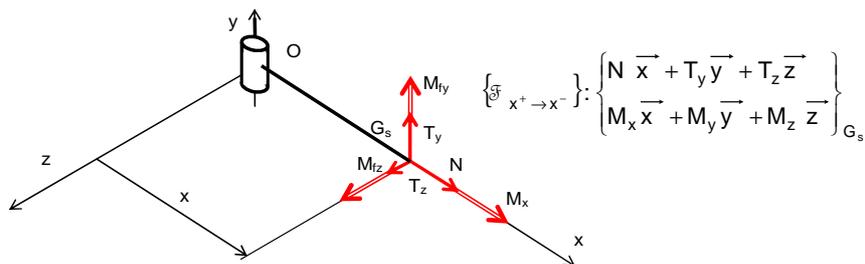
Le modèle proposé est celui d'une poutre de section elliptique en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{y})$  par rapport au tracteur et en appui élastique avec adhérence sur le sol en B, au niveau des pneumatiques extérieurs (Voir figure ci-après).



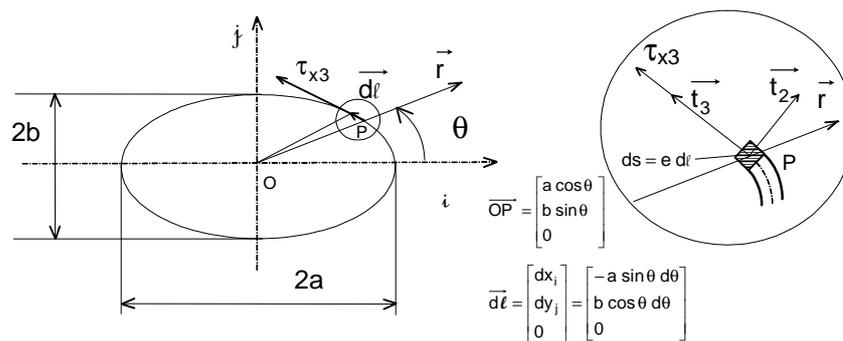
**Hypothèses :**

- Le camion se trouve sur une trajectoire circulaire à vitesse constante, le rayon de la courbe est suffisamment grand pour que l'on puisse considérer que tous les points de la citerne subissent la même accélération transversale.
- On négligera le poids de la citerne devant celui du fluide transporté.
- L'inclinaison de la surface du fluide et la variation de position de son centre de masse ont peu d'influence sur le comportement élastique de la structure.
- La présence de la suspension et des pneumatiques est modélisée par un ressort de raideur  $k_y$ .
- Une répartition linéique de charge appliquée le long de l'axe  $(G_F, \vec{x})$  et dont les composantes sont :  $\vec{q} = -q_y \vec{y} - q_z \vec{z}$  (avec  $q_z = \beta q_y$  et  $\overrightarrow{G_F O} \cdot \vec{y} = y_G$ ) modélisera le poids et les effets dynamiques du fluide sur la poutre représentant la citerne.
- Les effets du fluide sur les fonds seront pris en compte dans la seconde partie.

A.I.1 En supposant connue la composante verticale  $B_y$  de l'effort  $\vec{B} = B_y \vec{y} + B_z \vec{z}$ , calculer les composantes du torseur des efforts internes  $\left\{ \int_{x^+ \rightarrow x^-} \right\}$  au centre de gravité  $G_s$  d'une section droite, le long de OA et en fonction de  $q_y$ ,  $q_z$ ,  $B_y$ ,  $B_z$ , de l'abscisse  $x = OG_s$  et de la géométrie.



- A.1.2 Ecrire l'expression de l'énergie de déformation dans la poutre OA en fonction des composantes du torseur des efforts internes, en négligeant les effets de l'effort tranchant. On ne développera pas le calcul.
- A.1.3 En utilisant les méthodes énergétiques ainsi que l'expression de  $B_y$  en fonction de la raideur de l'appui  $k_y$  et du déplacement du point B suivant  $\vec{y}$  noté  $U_y$ , écrire l'équation qui permet de déterminer la valeur de ce déplacement ( $U_y=0$  avant chargement).
- A.1.4 En écrivant une équation d'équilibre statique calculer la composante horizontale  $B_z$  de l'effort  $\vec{B} = B_y \vec{y} + B_z \vec{z}$ .
- A.1.5 Sachant que le moment de torsion  $M_t$  en un point  $G_s$  d'une section droite de la poutre est égal à la somme des moments élémentaires induits par les contraintes de cisaillement  $\tau_{x3}$ , donner la relation qui existe entre  $M_t$  et  $\tau_{x3}$ . On rappelle que dans un profilé mince fermé, la contrainte de cisaillement  $\tau_{x3}$ , tangente au profil, varie selon l'abscisse curviligne en raison inverse de l'épaisseur  $e$  du profil au point considéré. Pour effectuer ces calculs on pourra utiliser le repérage suivant :



- A.1.6 En considérant un élément de poutre de longueur  $dx$  comme un ressort de torsion, donner l'expression de l'énergie de déformation  $dw$  de celui-ci soumis à un moment  $M_t$ . On appellera  $\frac{d\phi}{dx}$  la rotation unitaire de la section.
- A.1.7 On rappelle que l'expression de l'énergie de déformation peut être exprimée à l'aide des composantes des contraintes et des déformations par :  $W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV$ . En utilisant la loi de Hooke généralisée, exprimer les déformations en fonction des contraintes; puis exprimer  $dw$ , énergie de déformation d'un élément de poutre de longueur  $dx$  ( $dw = \frac{dx}{2} \int_S \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dS$ ) en fonction de  $\tau_{x3}$ .

A.I.8 A partir des résultats des deux questions précédentes, trouver l'expression de  $d\phi$  en fonction de  $M_t$ . En se souvenant que  $\frac{d\phi}{dx} = \frac{M_t}{GJ}$ , donner l'expression du moment quadratique de torsion  $J$  du tube elliptique.

A.I.9 Application numérique : calculer les valeurs de  $B_y$ ,  $B_z$ ,  $M_z$ ,  $M_x$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  et  $J$  pour le point de coordonnées  $(0, -b, 0)$  dans le repère .

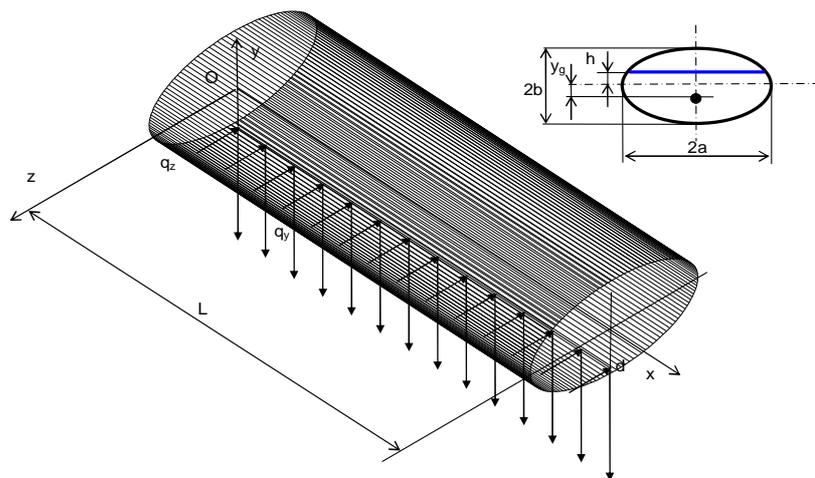
**Données :**

- Citerne à moitié remplie  $h=0$
- On donne l'aire de l'ellipse  $S_{EI} = \pi a b$
- Les moments quadratiques  $I_{yy} = \frac{3}{4} \pi a^2 e(3b + a)$  et  $I_{zz} = \frac{1}{4} \pi b^2 e(3a + b)$
- Position du centre de masse du fluide  $y_G = \frac{4 b}{3 \pi}$  (voir figure)
- $L=11$  m ;  $a=1.25$  m ;  $b=1$  m ;  $e=2$  mm ;  $E= 200$  GPa ;  $\nu=0.3$  ;  $\rho_F=1000$  kg/m<sup>3</sup> ;  $\beta=0.5$  ;  $k_y=1000$  kN/m,  $g=9.81$  m/s<sup>2</sup> ,  $y_B=1.9$  m ,  $z_B=1$  m.

A.I.10 En déduire les valeurs des contraintes normale de flexion et tangentielle de torsion pour ce même point.

**A.II SOLLICITATIONS CREEES PAR LE FLUIDE SUR L'ENVELOPPE DE LA CITERNE**

Cette étude va nous permettre de déterminer les différentes composantes du tenseur des contraintes agissant dans la citerne considérée à partir de maintenant comme une enveloppe mince elliptique d'épaisseur  $e$  constante, et de d'étudier la tenue à la fatigue au point le plus sollicité.



**Hypothèses :**

- On suppose les contraintes de cisaillement dues aux efforts tranchants négligeables.
- On néglige les effets de bords.

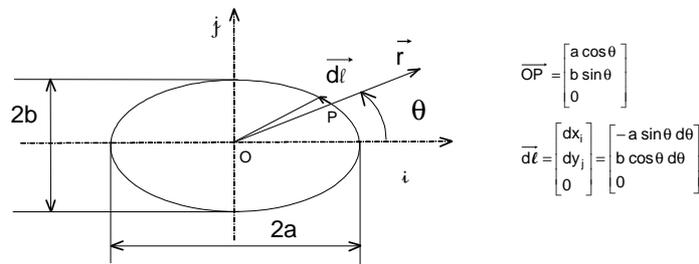
- ✦ Pour prendre en compte les effets dynamiques sur le fluide tout en évitant d'alourdir les calculs on considérera la citerne remplie d'un fluide soumis uniquement à une accélération de pesanteur verticale fictive  $g_{fic} = g \sqrt{1+\beta^2}$  ; la surface du fluide est considérée comme horizontale.
- ✦ On suppose que la citerne est remplie à moitié  $h=0$ .
- ✦ On négligera le poids de la citerne devant celui du fluide transporté.

**Données :**

- ✦ On donne la surface de la section droite de la citerne  $S_E \cong \pi e(a+b)$  où  $e$  est l'épaisseur de la citerne.
- ✦ Aire de l'ellipse  $Q = \pi a b$

**Rappels :**

- Equation paramétrique de l'ellipse :

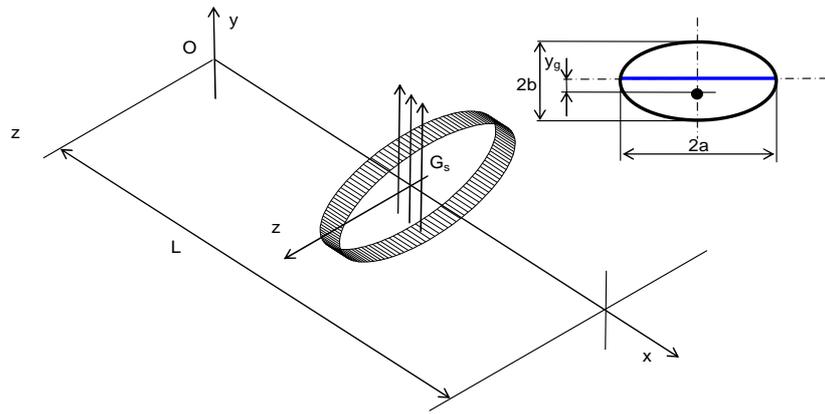


A.II.1 Déterminer les éléments de réduction du torseur des actions du fluide sur les extrémités de la citerne, au centre de cette paroi que l'on peut considérer comme

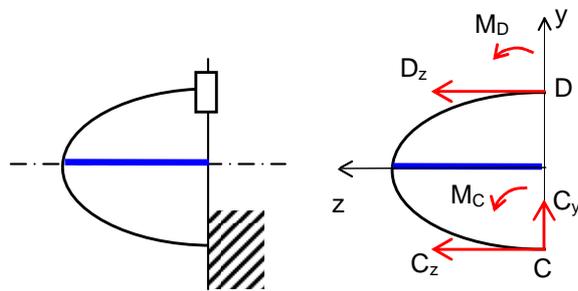
$$\text{plane : } \left\{ \mathcal{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{fond\_citerne}} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{FF} = R_{FFx} \vec{x} \\ \vec{M}_{FF}(A) = M_{FFz} \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

A.II.2 En isolant une portion de citerne comprise entre 0 et  $x$  déduire l'expression de la contrainte normale pour un point de coordonnées  $(x, -b, 0)$  . Faire l'application numérique.

Dans cette partie on s'intéressera au changement de forme de la citerne sous l'effet de son contenu. Pour cela nous allons isoler une tranche  $dx$  de l'enveloppe de la citerne située à  $x = \frac{L}{2}$  . On peut alors admettre que l'on se trouve dans un état plan de déformation. Dans ces conditions on peut traiter cette tranche comme poutre courbe de section  $e dx$ .

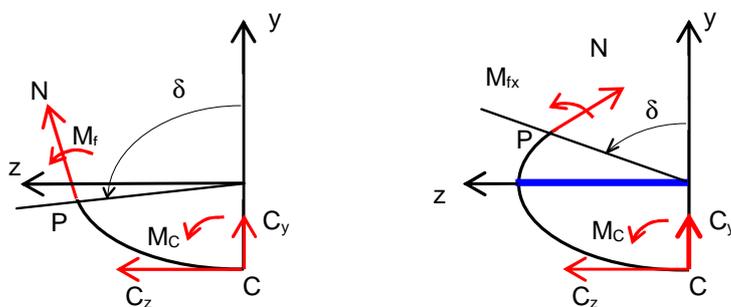


Nous allons étudier le déplacement de cette poutre relativement au point le plus bas. Ce qui nous permet d'adopter le modèle suivant :



A.II.3 On suppose que la poutre s'appuie sur son point le plus bas. Par raison de symétrie on étudie le comportement d'une demi-poutre verticale encastree au point C et en liaison glissiere avec la verticale au point D. Ecrire les equations d'equilibre de ce systeme de facon a exprimer les inconnues de liaison en C en fonction des inconnues de liaison en D et du chargement du au fluide.

A.II.4 Pour determiner les inconnues d'effort en D on souhaite utiliser les methodes energetiques. Donner l'expression du moment de flexion pour tout point P compris entre C et D (sans developper les calculs).

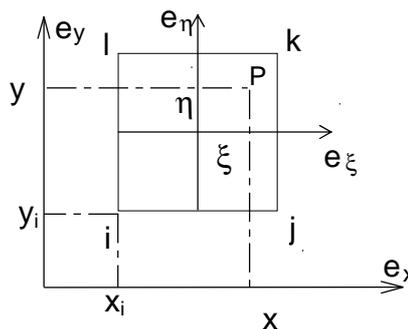


A.II.5 Ecrire les integrales permettant d'obtenir l'energie de deformation de flexion de cette poutre (On negligera les effets de l'effort tranchant et de l'effort normal). Justifier pourquoi on ne developpera pas les calculs analytiques.

### A.III MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS DE LA CITERNE

Compte tenu des conclusions de la partie II, nous sommes contraints de poursuivre le calcul de manière numérique. Notre but étant toujours de déterminer les contraintes "circonférentielles" dues au fluide nous allons modéliser la coque elliptique à l'aide d'éléments finis quadrangulaires à quatre nœuds. Le logiciel de base à notre disposition ne permettant pas d'imposer une pression hydrostatique sur les éléments, cela nécessite le calcul des forces nodales équivalentes à un tel état de chargement (Voir théorie en annexe I).

On choisit un élément coque tel que :



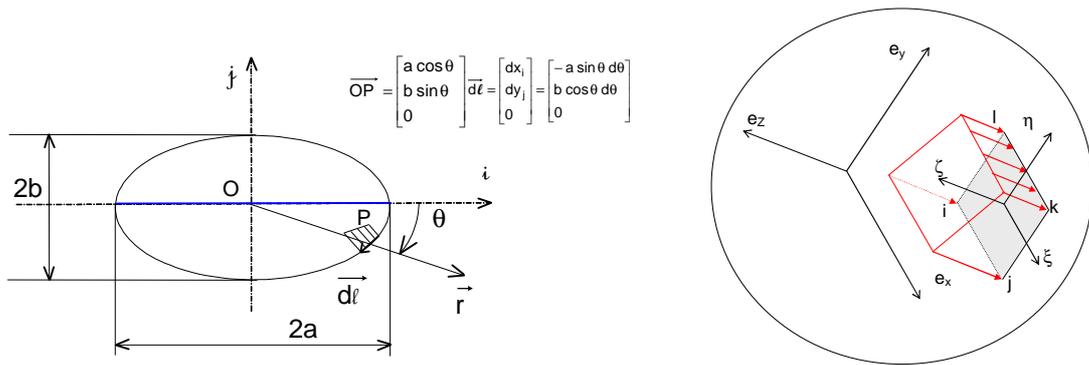
Les cotés (i, j) et (k, l) sont parallèles à  $\vec{e}_x$  lui-même confondu avec l'axe de la citerne.  $\vec{e}_y$  est tangent au profil de la coque et est contenu dans le plan d'une section droite. L'élément (i, j, k, l) est un carré de côté  $2c$ .

Les effets de membrane et de flexion pouvant être dissociés on ne s'intéressera qu'à ce dernier et on considérera un élément à un seul degré de liberté par nœud : le déplacement perpendiculaire au plan moyen :  $U_z$ .

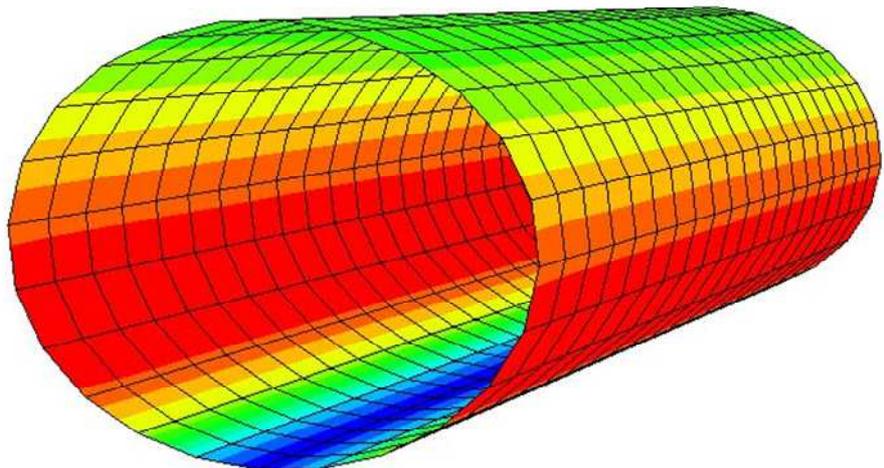
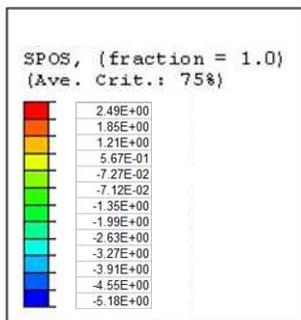
A.III.1 Déterminer la matrice Jacobienne de cet élément et son déterminant.

A.III.2 Justifier le fait que le vecteur des déplacements d'un point de l'élément noté  $[u]$ , et le vecteur des efforts d'un point dans l'élément noté  $[p]$ , sont des scalaires.

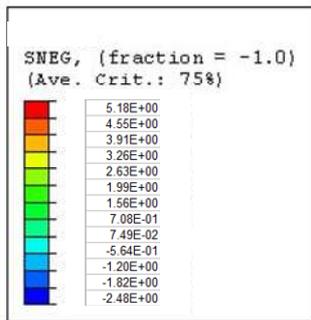
A.III.3 Compte tenu du maillage choisi la pression sur un élément n'est fonction que de  $\eta$ . Afin de déterminer la loi d'évolution des pressions sur cet élément, donner l'expression de la pression sur les bords inférieur et supérieur en fonction de la position de l'élément par rapport à la surface libre du fluide. En déduire dans l'élément de référence l'expression de  $p(\eta)$  en fonction  $p_j$  et de  $p_k$ . On pourra utiliser le repère de travail suivant :



- A.III.4 Donner l'expression du travail virtuel des efforts externes appliqués à l'élément, sous les deux formes  $w^* = \frac{1}{2} \mathbf{t}^t [\mathbf{U}^*] [\mathbf{P}]$  et  $w^* = \frac{1}{2} \int_D \mathbf{t}^t [\mathbf{u}^*] [\mathbf{p}] dD$  explicitées en annexe. En déduire l'expression intégrale permettant d'établir le vecteur des forces nodales. Préciser le domaine, les variables et les bornes d'intégration.
- A.III.5  $[\mathbf{P}]$  est le résultat d'une intégrale continue sur le domaine D que l'on remplace par une sommation discrète (voir annexe II). Donner en justifiant votre réponse le nombre minimum de points d'intégration nécessaire au calcul exact des différentes intégrales.
- A.III.6 On choisit pour l'ensemble des intégrales 2 points d'intégration. Calculer  $P_i$  et  $P_k$  en fonction de  $p_j$  et  $p_k$ .
- A.III.7 Le calcul des contraintes sur les parois donne les résultats suivants :



Contraintes « circonférentielle » sur la face externe de la citerne (en MPa).



Contraintes « circonférentielle » sur la face interne de la citerne (en MPa).

Donner la position des points les plus sollicités dans la citerne en précisant la nature des sollicitations et les valeurs maximales de la contrainte.

- A.III.8 Ce modèle de répartition ne représente pas la réalité compte tenu de l'influence de la présence des fonds, malgré cela nous allons faire l'hypothèse qu'il est suffisamment proche de la réalité au point de coordonnées  $(0, -b, 0)$ . En appliquant le principe de superposition donner les composantes du tenseur des contraintes dans la base  $(\vec{x}, \vec{t}_2, \vec{t}_3)$  exprimées en MPa. En déduire la contrainte équivalente de von Mises.

#### A.IV ETUDE DES SOLLICITATIONS EN FATIGUE DE LA CITERNE

- A.IV.1 Au cours d'un trajet on suppose que le camion tourne autant de fois à droite et à gauche. Ce changement de direction introduit une contrainte alternée de torsion  $\tau_{\max} = 24$  MPa et une contrainte de flexion variant très peu, on suppose que les contraintes "circonférentielles" dues au fluide sont également constantes  $\sigma_{33} = 6$  MPa au point  $(0, -b, 0)$  et  $\sigma_{33} = 2$  MPa au point  $(0, b, 0)$ . Ecrire les deux chargements sous la forme  $[\sigma]_{\text{cst}} + [\sigma]_{\text{alt}} \sin \omega t$ .

Le chargement n'étant pas uniaxial la vérification en fatigue nécessite l'utilisation d'un critère. On choisit celui de Dang Van, voir annexe III.

- A.IV.2 Calculer la pression hydrostatique maximale et contrainte tangentielle alternée maximale pour ces 2 points.
- A.IV.3 Les caractéristiques en fatigue du matériau utilisé sont  $\sigma_{-1} = 100$  MPa et  $\tau_{-1} = 60$  MPa. Calculer  $E_{\text{DV}}$  pour les deux points et conclure.

## **B Etude de la direction**

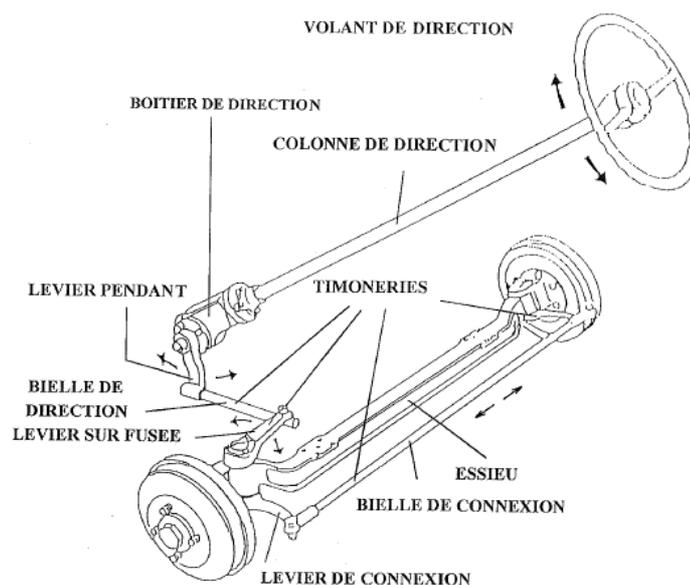
Dans le but d'améliorer la sécurité on peut envisager d'installer sur ce type de véhicule des systèmes de contrôle de "trajectoire". Avant de concevoir une stratégie de contrôle on propose d'étudier la cinématique de la timonerie de la direction.

Sur la plupart des poids lourds les suspensions sont montées sur des essieux dits « rigides ». Les déplacements des roues par rapport à la caisse ne sont pas indépendants.

Le système de direction, qui assure la démultiplication du mouvement et la transmission des efforts du volant aux roues, comporte les éléments suivants :

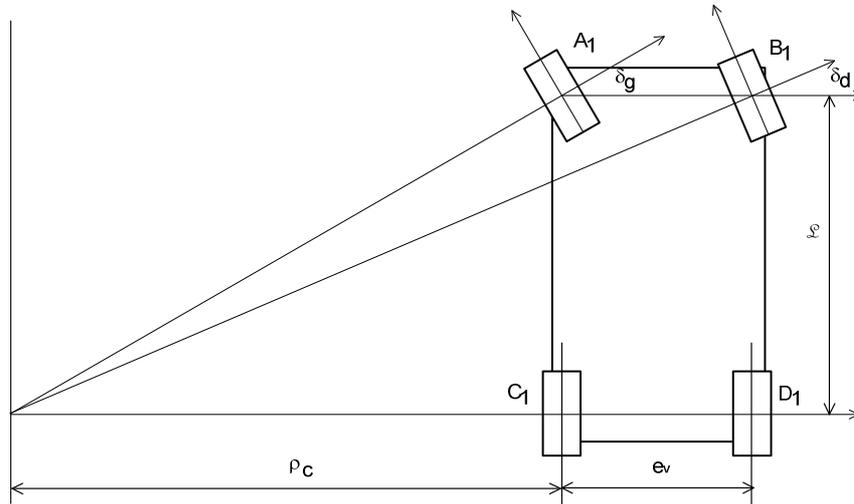
- Un ensemble d'arbres et de joints de transmissions assurant la liaison du volant au boîtier de direction.
- Un boîtier de direction qui transforme le mouvement de rotation du volant en mouvement de rotation du levier pendant. Ce mécanisme est généralement assisté hydrauliquement. Le rapport de transmission se situe entre 20 et 25.
- La timonerie de direction transmet le mouvement du levier pendant au levier de fusée qui agit directement sur l'une des roues.
- La bielle de connexion renvoie le mouvement sur la seconde roue.

Les longueurs des bielles et les positions initiales des leviers de fusées sont calculées afin de faire en sorte que lors d'un virage, les axes de rotations des roues convergent vers le centre de courbure de la trajectoire du véhicule.



## B.I CALCULS PRELIMINAIRES

- B.I.1 La figure ci-dessous représente une configuration de l'essieu avant en phase de virage. Connaissant le rayon de courbure  $\rho_c$  de la trajectoire du point  $C_1$  dans  $R_0$  à l'instant  $t$ , déterminer la relation qui existe entre les angles  $\delta_g$  et  $\delta_d$  et la géométrie du tracteur. On utilisera les indications données sur la figure ci-dessous.



## B.II MODELISATION ET ETUDE CINEMATIQUE

Le mouvement du système de direction est étudié par rapport à la caisse.

On étudie le système constitué des solides suivant :

### Solide 0 : La caisse

---

- L'axe du véhicule est donné par  $\vec{x}_0$ , dirigé vers l'avant
- L'orientation de l'essieu impose de définir un repère intermédiaire  $R_{0^*}$  lié à  $R_0$  tel que  $\vec{y}_0 = \vec{y}_{0^*}$  avec  $(\vec{z}_0, \vec{z}_{0^*}) = \varepsilon$

### Solide 1 : Levier pendant

---

- Le levier est lié à la caisse par une liaison pivot d'axe  $(L, \vec{y}_{0,1})$ . Le paramètre du mouvement de  $R_1/R_0$  est donné par  $(\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \delta$ . Avec  $\vec{ML} = l_1 \vec{z}_1$ .

### Solide 2 : Bielle de direction

---

- Cette bielle permet de transmettre le mouvement du levier pendant à la fusée. La longueur de bielle est  $MG = l_2$ .
- Les liaisons par rapport à 1 et par rapport à 3 peuvent être modélisées par des rotules en M et en G.

### Solide 3 : Fusée gauche

---

- Cette pièce est constituée de trois bras répartis autour d'un axe  $(B, \vec{z}_3)$ , le premier est relié à la bielle tel que  $\vec{BG} = b_x \vec{x}_{3^{**}} + b_z \vec{z}_3$  ( $\vec{x}_3, \vec{x}_{3^{**}} = \gamma_{3^{**}}$ ), le deuxième est relié à la bielle de connexion tel que  $\vec{BD} = -b_z \vec{z}_3 + b_{x^*} \vec{x}_{3^*}$  ( $\vec{x}_3, \vec{x}_{3^*} = \gamma_{3^*}$ ), le troisième d'axe  $(B, \vec{y}_3)$  est relié à l'axe de la roue.
- L'axe de la fusée est lié à l'essieu par une liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_{5^*,3})$ . Le paramètre du mouvement de  $R_3/R_5$  est donné par  $(\vec{x}_{5^*}, \vec{x}_3) = \beta_g$ .

### Solide 4 : Bielle de connexion

---

- Cette bielle permet de transmettre le mouvement à l'ensemble roue et fusée de droite. La longueur de la bielle est  $l_4$ , elle est en liaison rotule avec la fusée gauche et la fusée droite aux points D et E.

### Solide 5 : Essieu

---

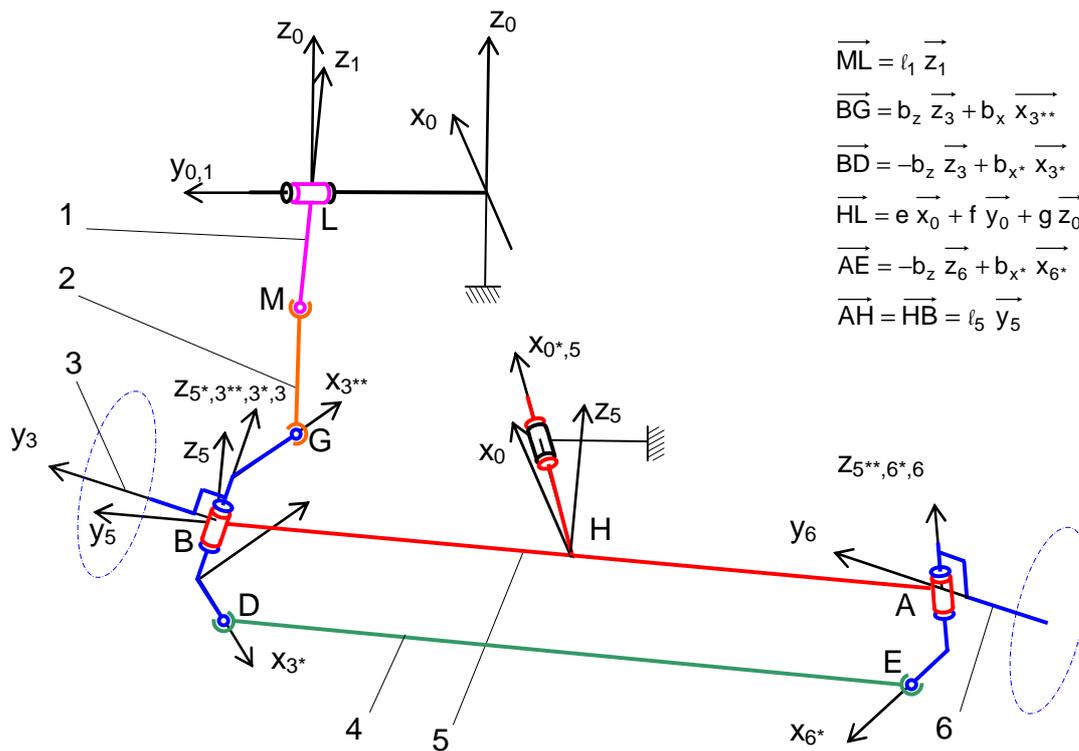
- La suspension par lame de ressort est modélisée par un bras tiré. On ne prendra pas en compte le déplacement latéral ni le phénomène de pompage (déplacement vertical). Dans ces conditions on peut alors supposer que le point H reste fixe par rapport à la caisse  $\vec{HL} = e \vec{x}_0 + f \vec{y}_0 + g \vec{z}_0$  et  $\vec{AB} = 2 l_5 \vec{y}_5$
- L'essieu est lié à la caisse par une liaison pivot d'axe  $(H, \vec{x}_{0^*,5})$ . Le paramètre du mouvement de  $R_5/R_0$  est donné par  $(\vec{y}_{0^*}, \vec{y}_5) = \tau$ .
- Les axes des pivots de liaison avec les fusées droite et gauche sont repérés tels que :  $\vec{x}_5 = \vec{x}_{5^*} = \vec{x}_{5^{**}}$  et  $(\vec{z}_5, \vec{z}_{5^*}) = \psi$  ( $\vec{z}_{5^{**}}, \vec{z}_5) = \psi$

### Solide 6 : Fusée droite

---

- Cette pièce est constituée de deux bras répartis autour d'un axe  $(A, \vec{z}_{5^{**},6})$ , le premier est relié à la bielle de direction tel que  $\vec{AE} = -b_z \vec{z}_6 + b_{x^*} \vec{x}_{6^*}$  ( $\vec{x}_6, \vec{x}_{6^*} = -\gamma_{3^*}$ ), le deuxième d'axe  $(A, \vec{x}_6)$  est relié à l'axe de la roue.
- L'axe de la fusée est lié à l'essieu par une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_{5^{**},6})$ . Le paramètre du mouvement de  $R_6/R_5$  est donné par  $(\vec{x}_{5^{**}}, \vec{x}_6) = \beta_d$ .

Les paramètres dimensionnels de la suspension étant choisis de telle sorte que les angles  $\beta_d$  et  $\beta_g$  restent proches de  $\delta_d$  et  $\delta_g$  au cours d'une manœuvre.



Repère intermédiaire			Bielle pendante		
Essieu					
Leviers sur fusées : gauche et droite					

### Hypothèse :

- On pourra considérer les angles  $\varepsilon, \delta, \tau, \psi, \beta_g, \beta_d$  comme petits.

B.II.1 Réaliser le graphe des liaisons.

B.II.2 Déterminer le nombre cyclomatique, la mobilité et le degré d'hyperstatisme du mécanisme tel qu'il a été modélisé précédemment.

B.II.3 Ecrire les deux relations reliant l'angle de rotation de la bielle pendante 1, l'angle d'inclinaison de l'essieu  $\tau$ , et les angles de braquage des roues droite et gauche.

### **B.III ETUDE DES EFFORTS DANS LA DIRECTION**

On désire calculer le couple au volant, pour cela nous allons déterminer l'action de la bielle 2 sur le bras de la fusée gauche.

Les évolutions des efforts au cours du temps étant relativement lentes nous allons déterminer ces efforts statiquement.

### Hypothèses :

- on suppose que les liaisons sont parfaites,
- on néglige le poids propre des pièces devant les efforts transmis
- les torseurs des actions du sol sur les roues (fusée + roue) exprimés en A et B sont donnés :

$$\left\{ \mathcal{F}_{0 \rightarrow 3} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{03} = X_{03} \vec{x}_5 + Y_{03} \vec{y}_{5^*} + Z_{03} \vec{z}_{5^*} \\ \vec{M}_{03}(B) = L_{03} \vec{x}_5 + M_{03} \vec{y}_{5^*} + N_{03} \vec{z}_{5^*} \end{array} \right\}_A \quad \text{et} \quad \left\{ \mathcal{F}_{0 \rightarrow 6} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{06} = X_{06} \vec{x}_5 + Y_{06} \vec{y}_{5^{**}} + Z_{06} \vec{z}_{5^{**}} \\ \vec{M}_{06}(A) = L_{06} \vec{x}_5 + M_{06} \vec{y}_{5^{**}} + N_{06} \vec{z}_{5^{**}} \end{array} \right\}_B$$

B.III.1 En isolant successivement les fusées droite et gauche écrire les relations qui permettent de déterminer l'effort dans la bielle de direction  $\vec{F}_{2 \rightarrow 3} = \frac{F_{23}}{l_2} (x_{MG} \vec{x}_{5^*} + y_{MG} \vec{y}_{5^*} + z_{MG} \vec{z}_{5^*})$  et

l'effort dans la bielle de connexion en fonction des efforts dans les roues, de la géométrie et des paramètres cinématiques.

B.III.2 Sans effectuer de calcul dire comment on peut obtenir le couple au volant.

### **C Modélisation complète du poids lourd articulé en solides rigides**

On désire réaliser le modèle complet du véhicule. Pour cela nous allons devoir définir les repères et le paramétrage, et faire les hypothèses nécessaires à l'écriture des équations donnant les lois des mouvements. Ce nouveau modèle doit nous amener à prévoir de manière plus précise les limites de renversement du camion citerne. (Dans cette partie on ne demande pas de calcul.)



L'ensemble est constitué d'un tracteur monté sur deux essieux suspendus (ressort + amortisseurs) et d'une citerne accrochée au tracteur. La citerne repose sur plusieurs essieux.

C.I.1 On demande au candidat de construire le modèle complet en faisant des choix et en les justifiant tout en tenant compte de ce qui a été vu précédemment. Pour ce faire, il est nécessaire de définir pour chaque sous ensembles de pièces liées :

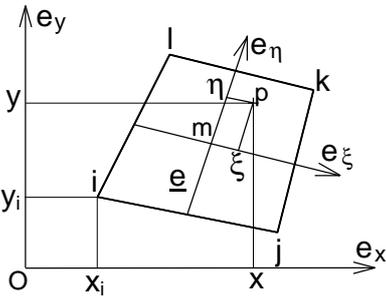
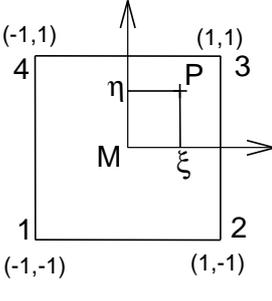
- les repères et les paramètres géométriques associés à ces sous ensembles et nécessaires à la mise en équation, on pourra compléter l'ébauche de schéma proposée sur la feuille réponse ;
- la cinétique et la géométrie des masses ainsi que les hypothèses qui y sont associées ;
- les liaisons ainsi que les hypothèses qui y sont associées ;
- si nécessaire les actions mécaniques extérieures (données) et intérieures (lois de comportement), ainsi que les équations supplémentaires de type cinématique.

# Annexes

## ANNEXE I : ELEMENT DE COQUE MINCE QUADRANGULAIRE ISOPARAMETRIQUE A QUATRE

### NŒUDS

Dans le cas général, les éléments finis réels ne sont pas forcément des carrés. Afin de faciliter et d'automatiser la programmation nous allons travailler avec des éléments de référence carrés de côté 2. Le passage de l'un à l'autre se fait par l'intermédiaire de la matrice jacobienne.

Elément réel	Elément de référence	Interpolation géométrique
		$[X_e] = \begin{bmatrix} X_i \\ X_j \\ X_k \\ X_l \end{bmatrix} \quad [Y_e] = \begin{bmatrix} Y_i \\ Y_j \\ Y_k \\ Y_l \end{bmatrix}$
(O, $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ ) repère local associé à la pièce.	(m, $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$ ) repère associé à l'élément de référence.	$x = [N][X_e] \quad y = [N][Y_e]$

où les composantes de  $[N]$  sont :  $N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi).(1-\eta)$  ;  $N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi).(1-\eta)$  ;  
 $N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi).(1+\eta)$  et  $N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi).(1+\eta)$

Le passage des coordonnées du point P dans l'élément de référence aux coordonnées de p dans le repère  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  se fait par l'utilisation des fonctions d'interpolation  $N_1 N_2 N_3 N_4$ .

Les mêmes fonctions d'interpolation seront utilisées pour les déplacements (cas des éléments isoparamétriques).

- Matrice jacobienne.

Soit  $d\vec{P} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = d\xi \begin{bmatrix} x_{,\xi} \\ y_{,\xi} \end{bmatrix} + d\eta \begin{bmatrix} x_{,\eta} \\ y_{,\eta} \end{bmatrix} = d\xi \vec{e}_\xi + d\eta \vec{e}_\eta$  (avec  $x_{,\xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}$  ....)

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = {}^t[J] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \text{ matrice jacobienne qui permet de passer de l'élément de référence à l'élément}$$

réel.

- Définition vectorielle de l'aire de l'élément

$$dS = (dx \cdot \vec{e}_x \wedge dy \cdot \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_z = dx \cdot dy$$

$$dS = (x_{,\xi} \cdot y_{,\eta} - x_{,\eta} \cdot y_{,\xi}) \cdot d\xi \cdot d\eta = \det[J] d\xi \cdot d\eta$$

- Travail virtuel des efforts externes appliqués à l'élément :
  - en utilisant les quantités nodales (forces et déplacement des nœuds)

$w^* = \frac{1}{2} {}^t[U^*][P]$  où  ${}^t[U^*]$  est le vecteur des déplacements virtuels des nœuds et  $[P]$  est le vecteur des efforts nodaux équivalents

- en utilisant les chargements repartis sur l'élément

$w^* = \frac{1}{2} \int_D {}^t[u^*][p] dD$  où  ${}^t[u^*]$  est le vecteur des déplacements virtuels d'un point dans l'élément et  $[p]$  la valeur de la répartition d'effort en ce point de l'élément.

D domaine d'intégration des efforts agissant sur l'élément (volumique, surfacique, linéique.)

- Rappels

$[u^*] = [N][U^*]$  dim de  $[U^*] = \text{nbre de degrés de liberté de l'élément}$ , dim de  $[u^*] = \text{dim de } [U^*] / \text{nbre de nœuds}$

## **ANNEXE II : POINTS D'INTEGRATION**

- Gauss - Legendre

$$\int_{-1}^1 f(\xi).d\xi = \sum_{j=1}^m \varpi_j . f(\xi_j) : \text{intégration exacte des polynômes de degré } \leq \text{à } (2.m-1)$$

m	$\xi_j$	$\varpi_j$
1	0.0	2.0
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1.0
3	0.0 $\pm \sqrt{3/5}$	8.0/9.0 5.0/9.0
4	$\pm 0.33998\ 10435\ 84856$ $\pm 0.86113\ 63115\ 94053$	0.65214 51548 62546 0.34785 48451 37454
5	0.0 $\pm 0.53846\ 93101\ 05683$ $\pm 0.90617\ 98459\ 38664$	128.0/225.0 0.47862 86704 99366 0.23692 68850 56189

## **ANNEXE III : CRITERE DE DANG VAN**

Ce critère est défini à partir d'un indicateur d'endommagement  $E_{DV}$  tel que :

$$E_{DV} = \max_h (\max_t E_h(t)) \text{ avec } E_h(t) = \frac{\|\overline{\tau_{ha}(t)}\| + a_f \sigma_H(t)}{b_f}$$

Où  $E_h(t)$  représente la dangerosité du chargement sur une facette de normale  $\vec{h}$ .

$a_f$  et  $b_f$  sont caractéristiques du matériau. On donne :  $a_f = 3 \left( \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{2} \right)$  et  $b_f = \tau_{-1}$ .

$\tau_{-1}$  est la limite de fatigue en torsion alternée

$\sigma_{-1}$  est la limite de fatigue en flexion alternée

$\|\overline{\tau_{ha}(t)}\|$  est la norme de la contrainte tangentielle alternée sur la facette de normale  $\vec{h}$ .

$\sigma_H(t)$  est la pression hydrostatique de l'état de contrainte. (Contrainte moyenne)

Pour une bonne tenue en fatigue  $E_{DV}$  doit être inférieur à 1.

# Feuille réponse

