

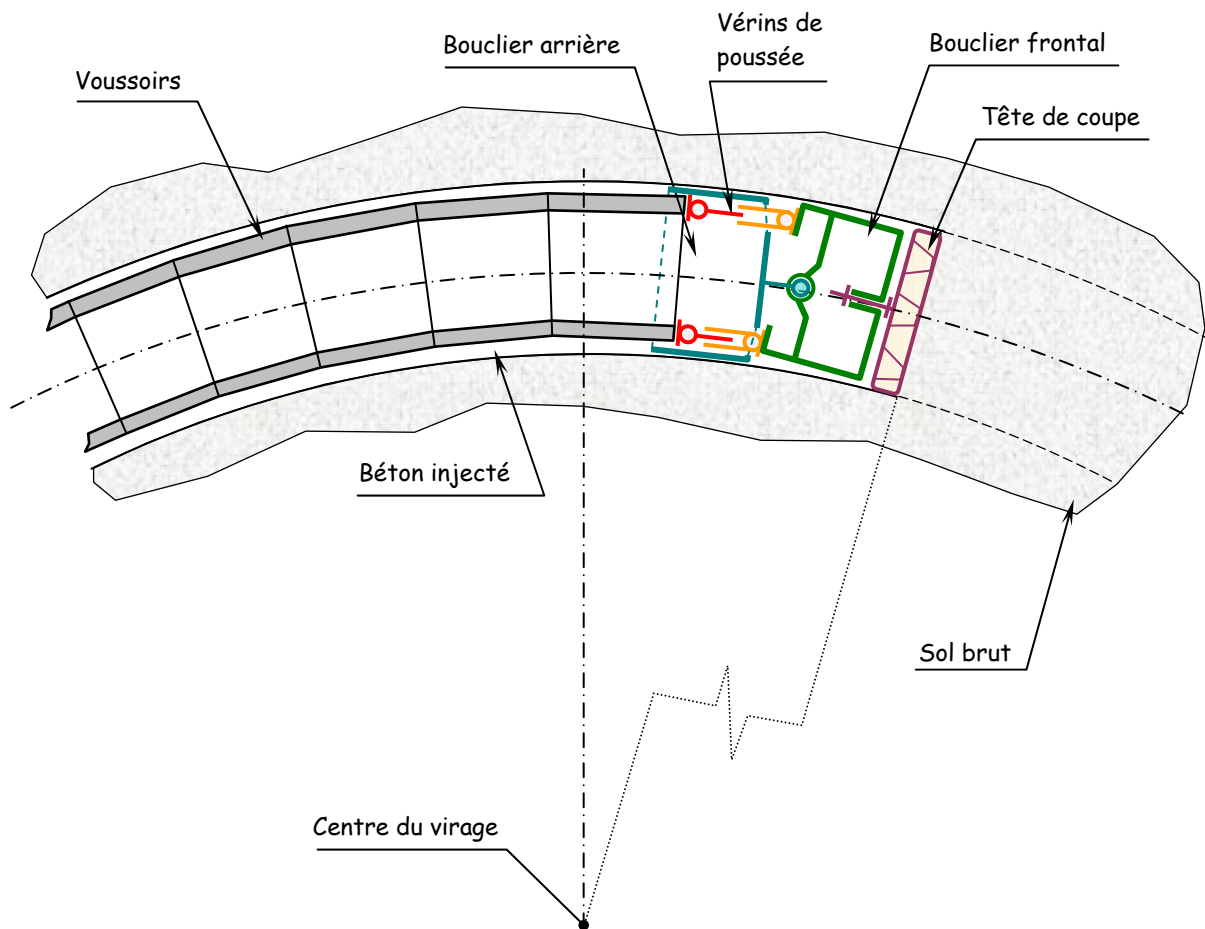
## LE PROJET "LIGNE 9" DU METRO DE BARCELONE

### DESCRIPTION DU FONCTIONNEMENT DU TUNNELIER

#### Question 1-1

Décrire le principe de creusement d'une galerie en virage dans un plan horizontal. Pour cela, représenter en vue de dessus, sous forme schématique :

- le bouclier, en distinguant la partie avant (tête de coupe et bouclier frontal) de la partie arrière (bouclier arrière). Le train suiveur ne sera pas représenté ;
- la paroi brute de la galerie et les derniers anneaux de voussoirs posés ;
- les vérins de poussée assurant l'effort de poussée sur la tête de coupe.



#### Remarques :

Certains paramètres - courbure moyenne du virage, épaisseur des voussoirs,... - sont exagérés sur le schéma de façon à mettre en évidence les propriétés géométriques.

Le tunnel doit être "élargi" en zone de virage pour permettre l'avancement du tunnelier. Pour cela, les outils situés à la périphérie de la tête de coupe sont réglables radialement. Le bouclier possède une mobilité en rotation entre ses parties avant et arrière de façon à suivre au mieux la courbe du virage

Les vérins de poussée qui assurent l'avancement du tunnelier en prenant appui sur les voussoirs déjà mis en place nécessitent des liaisons rotules au niveau de leurs deux extrémités pour s'adapter à l'orientation du bouclier frontal. C'est en jouant sur les déplacements de ces vérins que l'on modifie la trajectoire de la tête de coupe.

**Question 1-2**

Donner l'expression du rayon  $R_c$  du virage en fonction de  $\alpha$  et  $L$ .

**Application numérique** : calculer la valeur de  $R_c$ .

Expression du rayon  $R_c$  du virage en fonction de  $\alpha$  et  $L$ .

$$L = 2R_c \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ soit } R_c = \frac{L}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

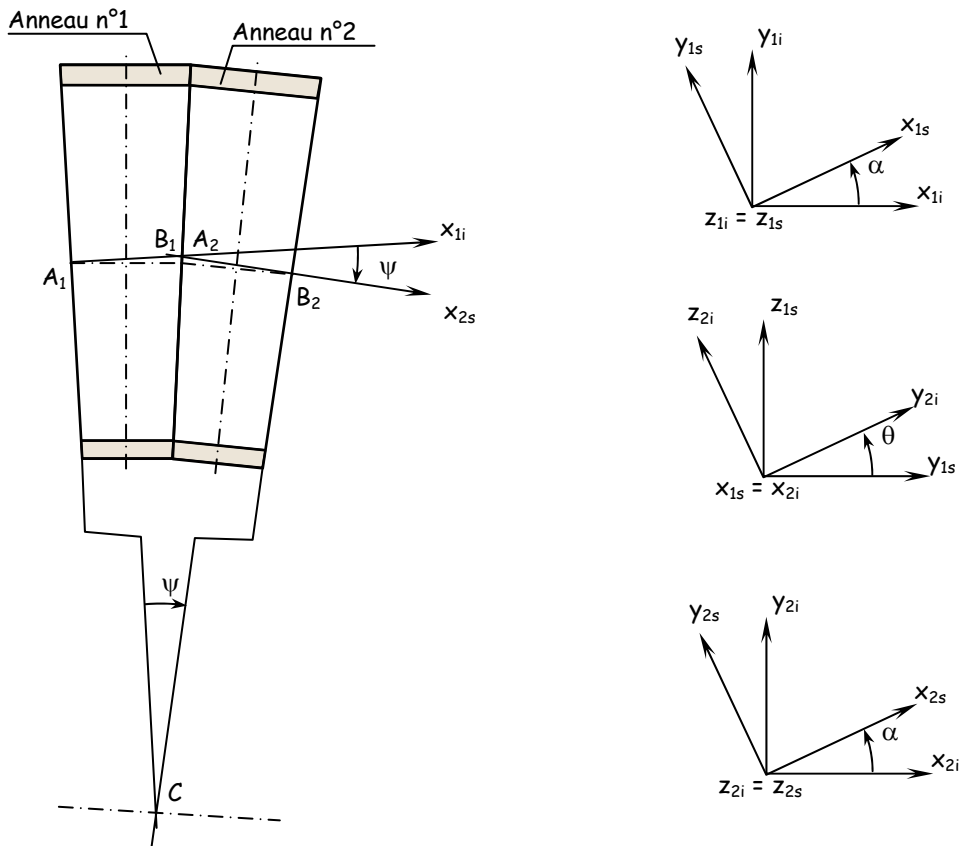
AN :  $\tan \frac{\alpha}{2} = (1848 - 1752) / (2 * 11600) \quad \alpha/2 \approx 0,24^\circ \quad R_c \approx 217,5 \text{ m}$

**Question 1-3**

Dans le cas de l'association de deux anneaux :

- établir les deux relations liant  $\psi$ ,  $R_c$ ,  $\alpha$ ,  $L$ , et  $\theta$ .
- **application numérique** : déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour le rayon  $R_c$  du virage en fonction de l'angle  $\theta$ .

Expliquer pourquoi le constructeur du tunnelier déconseille d'utiliser sur une grande distance les anneaux dans la configuration du rayon mini déterminé ci-dessus.



Soit  $(B_{1i}) = (\vec{x}_{1i}, \vec{y}_{1i}, \vec{z}_{1i})$  la base orthonormée liée à la face plane d'abscisse curviligne inférieure de l'anneau de voussoir n°1, de centre  $A_1$ , avec  $\vec{x}_{1i}$  la normale à cette face.

On note  $(B_{1s}) = (\vec{x}_{1s}, \vec{y}_{1s}, \vec{z}_{1s})$  la base orthonormée liée à la face plane d'abscisse curviligne supérieure de l'anneau de voussoir n°1, de centre  $B_1$ , avec  $\vec{x}_{1s}$  la normale à cette face.  $(B_{1s})$  se déduit de  $(B_{1i})$  par rotation d'angle  $\alpha$  autour de  $\vec{z}_{1i}$ .

On note de la même façon  $(B_{2i})$  et  $(B_{2s})$  les bases associées aux faces de l'anneau n°2.

L'angle  $\theta$  définit la rotation des bases  $(B_{1s})$  et  $(B_{2i})$  autour de leur normale commune  $\vec{x}_{1s} = \vec{x}_{2i}$ .

Les rotations successives entre bases sont définies par les schémas ci-dessus.

L'objectif consiste à déterminer l'angle  $\psi$  entre les faces extérieures de l'assemblage en fonction de  $\theta$ , soit l'angle entre  $\vec{x}_{1i}$  et  $\vec{x}_{2s}$ .

$$\vec{x}_{2s} = \cos \alpha \vec{x}_{2i} + \sin \alpha \vec{y}_{2i} \quad \text{soit} \quad \vec{x}_{2s} = \cos \alpha \vec{x}_{1s} + \sin \alpha (\cos \theta \vec{y}_{1s} + \sin \theta \vec{z}_{1s})$$

$$\vec{x}_{2s} = \cos \alpha (\cos \alpha \vec{x}_{1i} + \sin \alpha \vec{y}_{1i}) + \sin \alpha [\cos \theta (-\sin \alpha \vec{x}_{1i} + \cos \alpha \vec{y}_{1i}) + \sin \theta \vec{z}_{1i}]$$

D'où l'on tire :  $\vec{x}_{2s} \cdot \vec{x}_{1i} = \cos \psi = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos \theta$

Cas particuliers : si  $\alpha = 0$ , on obtient  $\cos \psi = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ , soit  $\psi = 2\alpha$

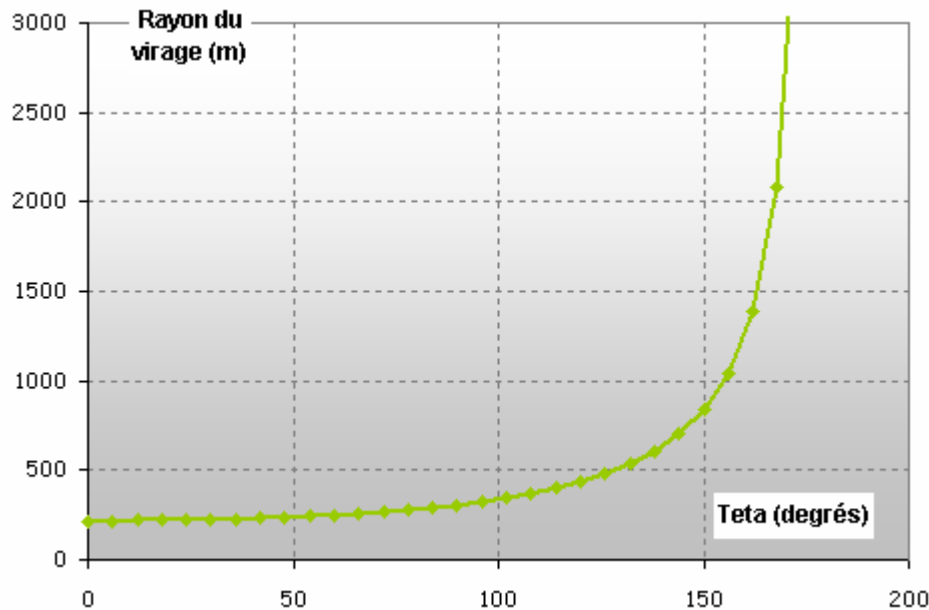
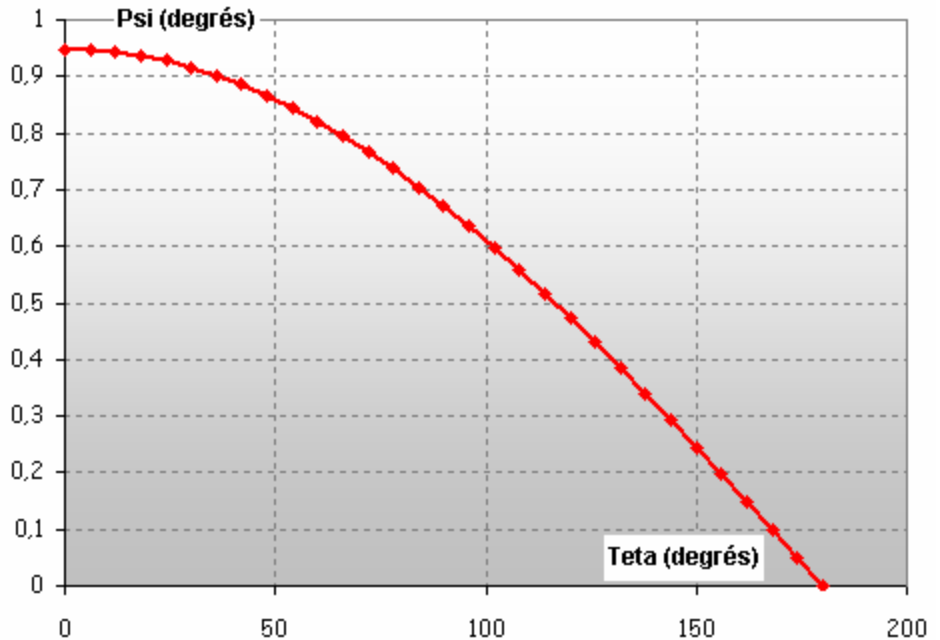
si  $\alpha = \pi$ , on obtient  $\cos \psi = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ , soit  $\psi = 0$

Une variation continue de  $\theta$  entre 0 et  $\pi$  permettrait d'obtenir pour  $\psi$  toutes les valeurs comprises 0 et  $2\alpha$ .

En réalité, les éléments de fixation des anneaux successifs ne permettent que des réglages par sauts de  $2\pi/15$  ( $24^\circ$ )...

$\theta$ (°)	0,0	24,0	48,0	72,0	96,0	120,0	144,0	168,0
$\psi$ (°)	0,948	0,928	0,866	0,767	0,635	0,474	0,293	0,099
$R_c$ (m)	217,5	222,4	238,1	268,8	325,1	435,0	703,9	2080,8

En réalisant des associations de 3, 4 anneaux ou plus, il est possible d'ajuster de façon très fine le rayon  $R_c$  du virage...

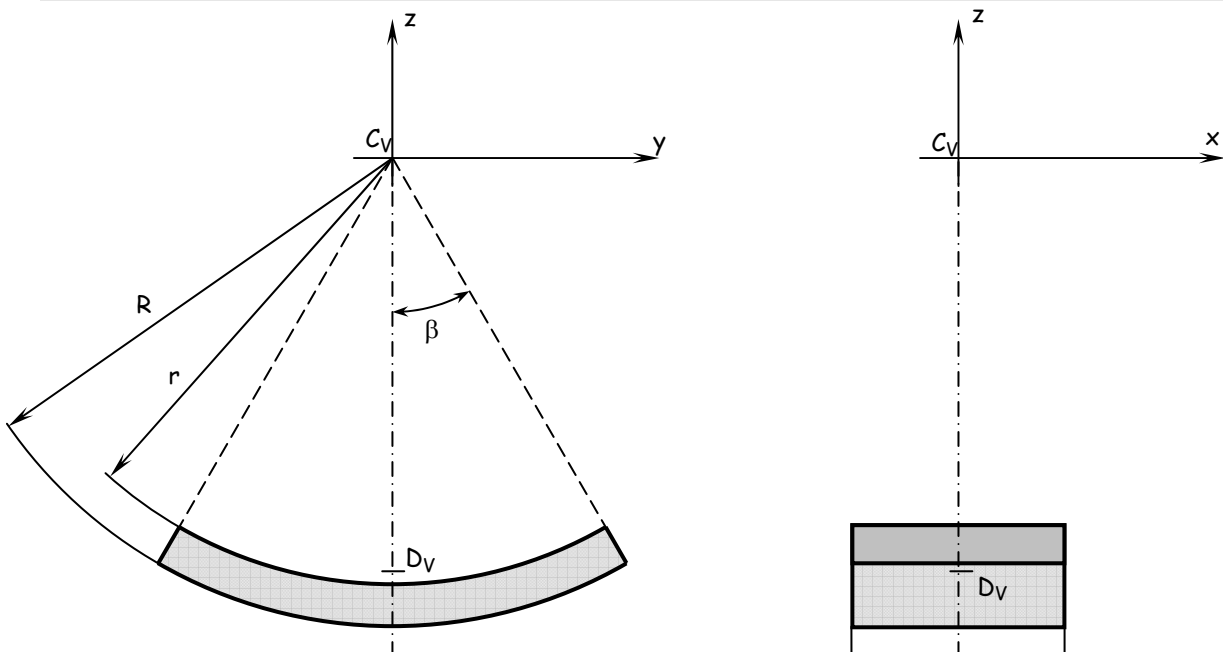


**DEUXIEME PARTIE : ETUDE DE L'ERECTEUR DE VOUSOIRS**

**Géométrie des masses du voussoir**

**Question 2-1**

Donner les expressions de la masse  $M_V$  et du poids  $\{P_V\}$  du voussoir (V) si  $\vec{z}$  est la verticale ascendante.  
 Déterminer la position de son centre de masse dans le repère  $(C_V; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .  
 Préciser les propriétés de sa matrice d'inertie (le calcul des termes de la matrice n'est pas demandé).  
 AN : déterminer les valeurs de la masse, du poids et la position du centre de masse du voussoir. On prendra  $\mu = 2,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  et  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Les valeurs des paramètres géométriques sont à relever sur le document 3.



**Figure 6 :** géométrie du voussoir

On notera dans la suite :  $R_m = \frac{R+r}{2}$  le rayon moyen du voussoir, et  $e = \frac{R-r}{2} \ll r < R$

**Masse :**  $M = \mu \beta (R^2 - r^2) L$

**Poids :**  $\{P\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \vec{O} \end{Bmatrix}$  avec  $\vec{P} = -\mu g \beta (R^2 - r^2) L \vec{z}$

**Position du centre de masse G :**

$x_G = y_G = 0$  par raison de symétrie

$z_G = \frac{1}{M} \int_{(V)} z \mu dV = \frac{\mu}{M} \int_r^R \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-L/2}^{L/2} \cos \theta dx d\theta dp = -\frac{2(R^3 - r^3) \sin \beta}{3(R^2 - r^2) \beta}$  Soit  $z_G = -\frac{2 \sin \beta}{3 \beta} \frac{(R^2 + r^2 + rR)}{(R+r)}$

En supposant e petit devant r et R, l'expression devient :

$z_G = -\frac{2 \sin \beta}{3 \beta} \frac{(R_m + e/2)^2 + (R_m - e/2)^2 + (R_m + e/2)(R_m - e/2)}{(R_m + e/2 + R_m - e/2)}$  et  $z_G \approx -R_m \frac{\sin \beta}{\beta} = -\frac{(R+r) \sin \beta}{2 \beta}$

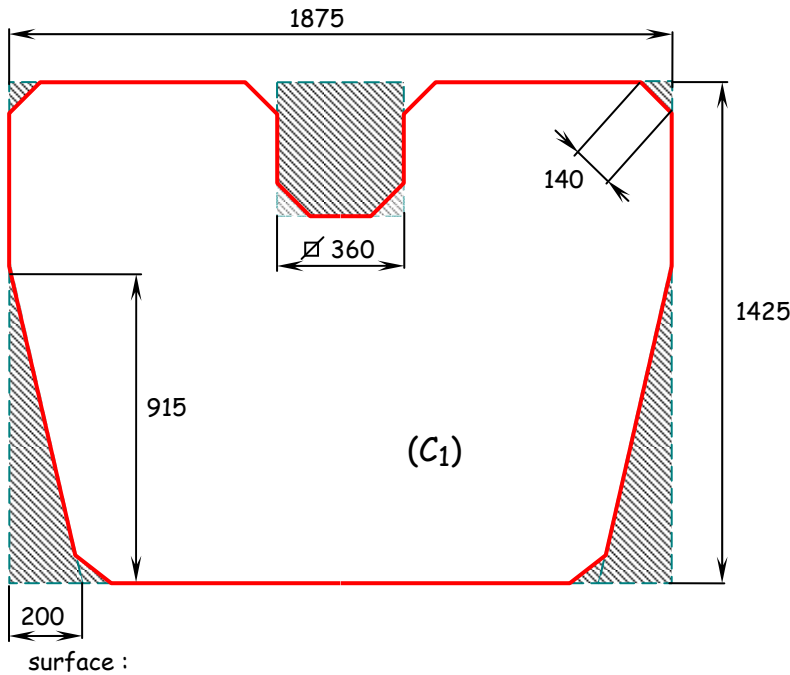
**Matrice d'inertie :** compte tenu des symétries par rapport aux plans  $(C_V, \vec{y}, \vec{z})$  et  $(C_V, \vec{x}, \vec{z})$ , il apparaît que la matrice d'inertie est diagonale :

$\vec{I}(C_V, (S)) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$

AN : Masse :  $M \approx 7720 \text{ kg}$   
 Poids :  $P = 75720 \text{ N}$   
 Centre de masse : si  $\beta = 24^\circ$  :  $z_G = -0,971 \cdot (5,800 + 5,450) / 2 \approx -5,46 \text{ m}$

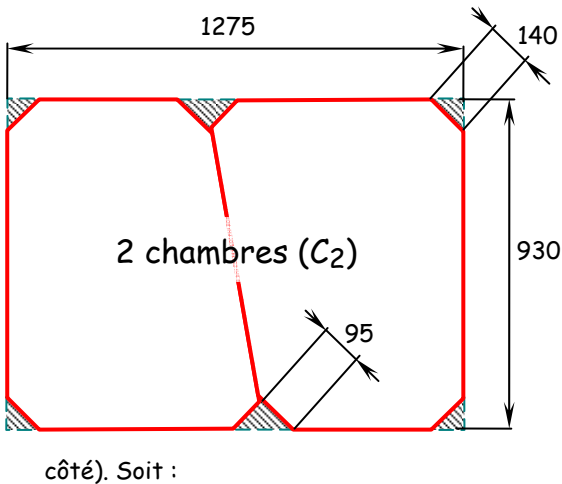
**Question 2-2 (document 6)**

En utilisant le document 6 à l'échelle 1/15, évaluer l'étendue de la surface d'action de chaque chambre, puis le torseur modélisant l'action exercée par l'air sur le voussoir, si la pression absolue vaut  $p = 15 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ .  
 On supposera la pression atmosphérique égale à  $p_0 = 100 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ .  
 Préciser les hypothèses et simplifications retenues pour réaliser cette étude.



La surface de la chambre centrale ( $C_1$ ) est assimilable à un rectangle ( $1875 \times 1425$ ) auquel sont retranchés les quatre chapeaux (carré de 140 de côté), les deux triangles latéraux (rectangle de  $200 \times 915$ ) et l'entaille supérieure (carré de 360 de côté). Soit une

$$S_1 = 1875 \times 1425 - (140^2 + 915 \times 200 + 360^2) = 2339675 \text{ mm}^2 \approx 2,34 \text{ m}^2$$



La surface des deux chambres latérales ( $C_2$ ) peut être représentée conformément à la figure ci-contre, après rotation de  $180^\circ$  de l'une d'entre elles et rapprochement jusqu'à coïncidence de l'arête oblique. La surface totale est assimilable à celle d'un rectangle ( $1275 \times 930$ ), auquel sont retranchés les quatre coins (carré de 140 de côté) et les deux entailles sur les grands cotés (approximativement : carré de 95 mm de

$$2S_2 = 1275 \times 930 - (140^2 + 95^2) = 1157125 \text{ mm}^2 \approx 1,16 \text{ m}^2$$

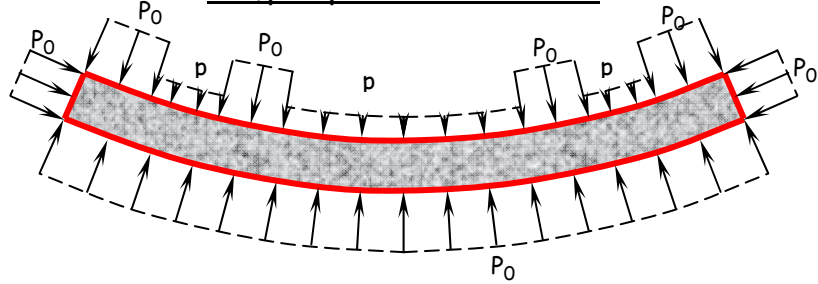
**Evaluation de l'effort d'aspiration :**

**Modèle du champ des pressions :**

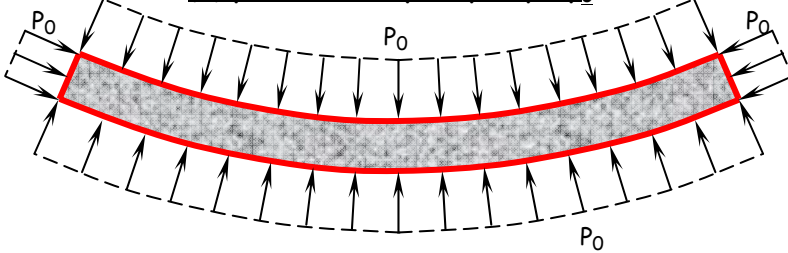
A l'intérieur des chambres ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ), la pression est supposée uniforme, égale à  $p = 0,15 \text{ bar}$ .  
 Hors de ces zones, la pression est la pression atmosphérique, uniforme, égale à  $p_0 = 1 \text{ bar}$ .

Le résultat en terme d'effort est équivalent à la superposition d'un état de pression uniforme  $p_0$  sur la totalité du voussoir (A), et d'un état de pression  $p-p_0$  agissant au niveau des chambres d'aspiration (B).

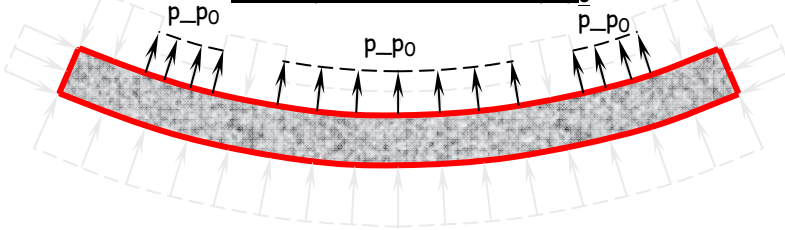
**Champ de pression air → voussoir**



**(A) pression atmosphérique  $p_0$**



**(B) "dépression" uniforme  $p-p_0$**



Le torseur associé à la pression atmosphérique  $p_0$  est nul (état A).

L'action de l'air sur le voussoir se réduit donc à l'action résultant de la "dépression" définie par l'état (B).

$$\{T_{air \rightarrow (V)}\}_{C_v} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_p = \int_{S_1 \cup S_2} -(p - p_0) \vec{n} dS \\ \vec{M}(C_v) = \int_{S_1 \cup S_2} -C_v \wedge M \wedge (p - p_0) \vec{n} dS \end{array} \right.$$

- l'action élémentaire sur le voussoir (V) a la forme suivante :

$$d\vec{F}_p = \int_{(S)} -(p - p_0) \vec{n} dS = \int_{(S)} -(p - p_0)(-\sin \theta \vec{y} + \cos \theta \vec{z}) dS = -(p - p_0) \vec{z} \int_{(S)} \cos \theta dS$$

Lors de l'intégration la projection sur  $\vec{y}$  s'annule, par raison de symétrie de la surface par rapport au plan  $(C_v, \vec{z}, \vec{x})$ . Seul subsiste le terme suivant  $\vec{z}$ , associé au produit  $dS \cos \theta$  qui représente la projection de l'élément de surface dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ . La résultante est donc colinéaire à  $\vec{z}$  et sa valeur algébrique sera égale au produit de la "dépression"  $(p-p_0)$  par la projection de la surface d'action dans un plan perpendiculaire à la direction de la résultante.

Il se trouve que les surfaces évaluées précédemment sont en fait les projections dans ce plan.

- Si on se place au centre de gravité  $G_s$  de la surface, le moment du torseur d'action de l'air sera nul, et

l'action sera modélisable par un glisseur colinéaire à  $\vec{z}$  :

$$\{T_{air \rightarrow (V)}\}_{G_s} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = (p_0 - p) S_{projetée} \vec{z} \\ \vec{M}(G_s) = \vec{0} \end{array} \right.$$

Situer de façon rigoureuse le point  $G_s$  sur le document 6 est une entreprise délicate. On peut observer que sa distance à l'axe  $(C_v, \vec{z})$  est petite, donc que le point  $C_v$  est sur la droite d'action du glisseur.

Et finalement :

$$\{T_{air \rightarrow (V)}\}_{C_v} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_p = (p_0 - p) S_{projetée} \vec{z} \\ \vec{M}(G_s) = \vec{0} \end{array} \right.$$

**Application numérique :**  $F_p = 297500 \text{ N}$

**Question 2-3 (document 7)**

En utilisant les schémas du document 7, définir les torseurs modélisant les actions de compression des joints lors de la mise en place du voussoir (V), contre le voussoir voisin (V') d'une part et contre l'anneau (A) d'autre part, en fonction de la charge linéique q et des paramètres géométriques.

**Application numérique** : évaluer les composantes des efforts ci-dessus si la charge linéique vaut q = 32 N/mm. On supposera que  $R_j \approx r$ , rayon intérieur du voussoir.

Les contact sont supposé linéique, sans frottement, avec une répartition de charge uniforme q (N/mm).

**Action sur le joint de la face "latérale" du voussoir (V) :**

L'action est modélisable par un glisseur de direction normale à la face latérale (frottement négligé), appliqué au point H, milieu de la longueur L du joint :

$$\{T_{\text{Latéral}} \rightarrow (V)\}_H = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_L = -qL \vec{n} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{l} -qL(\cos\beta \vec{y}_3 + \sin\beta \vec{z}_3) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_H$$

La position du point H est définie par :

$$\vec{C}_V H = R_j(\sin\beta \vec{y}_3 - \cos\beta \vec{z}_3)$$

**Action sur le joint de la face "frontale" du voussoir (V) :**

L'action est modélisable par un glisseur de direction normale à la face frontale (frottement négligé), appliqué au point K défini ci-dessous.

$$\{T_{\text{Frontal}} \rightarrow (V)\}_K = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_f = \int_{-\beta}^{\beta} q x_0 R_j d\theta \\ \vec{0} \end{array} \right\}_K = \left\{ \begin{array}{l} 2qR_j \beta \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_K$$

Du fait des propriétés de symétrie du voussoir, la position du point K est définie par  $\vec{C}_V K = -z_K \vec{z}_3$ . Pour préciser la position de K, il faut écrire l'expression du moment, qui doit être nul en K...

**Moment en  $C_V$  :**

$$\vec{M}(C_V) = \int_{-\beta}^{\beta} R_j d\theta (\sin\theta \vec{y}_3 - \cos\theta \vec{z}_3) \wedge qR_j \vec{x}_0 d\theta = -2qR_j^2 \sin\beta \vec{y}_3$$

$$\vec{M}(K) = \vec{M}(C_V) - 2qLR_j\beta \vec{x}_0 \wedge -d\vec{z}_3 = (2qR_j^2 \sin\beta - 2qLR_j\beta d) \vec{y}_3 = \vec{0}$$

Et finalement : 
$$\vec{C}_V K = -R_j \frac{\sin\beta}{\beta} \vec{z}_3$$

**AN :** Joint latéral : 
$$\{T_{\text{Latéral}} \rightarrow (V)\}_H = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_L = -57600 \vec{n} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \text{ (en N)}$$

Joint frontal : 
$$\{T_{\text{Frontal}} \rightarrow (V)\}_K = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_f = 146000 \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \text{ (en N)}$$
 Position de K : 
$$\vec{C}_V K = -5290 \vec{z}_3 \text{ (en mm)}$$

**Question 2-4**

Le document réponse 1 représente le voussoir dans une position angulaire quelconque, repérée par l'angle  $\theta$ .

Représenter graphiquement sur ce document :

- l'action de pesanteur sur le voussoir ;
- les actions des joints lors de la phase de compression ;
- l'action "d'aspiration" du préhenseur.

Cette représentation permet d'illustrer les efforts précédemment définis. Elle montre qu'il s'agit de 4 glisseurs.

- $F_p = 297500 \text{ N}$

- $F_L = 146000 \text{ N}$
- $F_f = 57600 \text{ N}$
- Pesanteur :  $P = 75720$

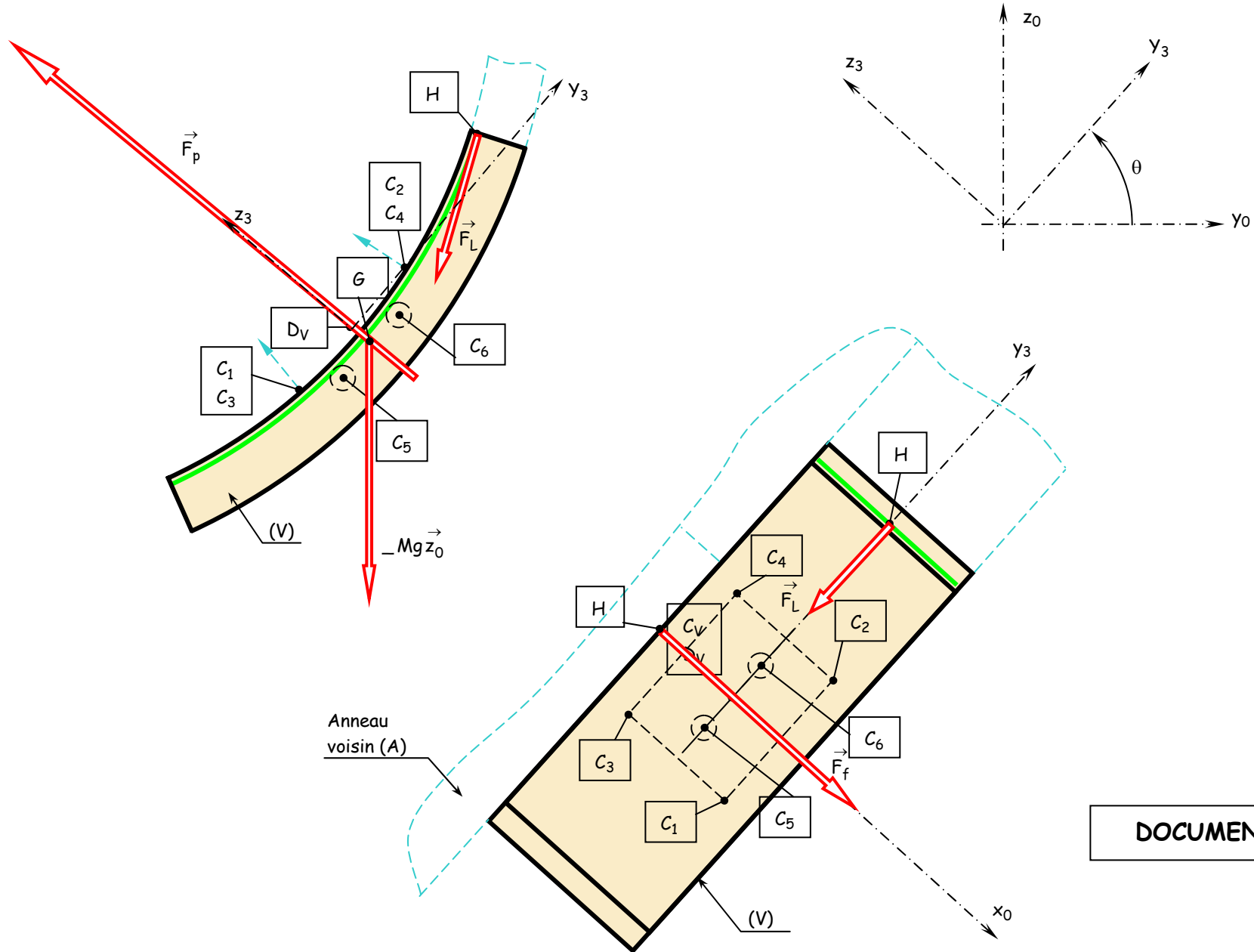
**Remarques :**

Trois des efforts (pesanteur, aspiration et joint frontal) ont des supports qui passent par, ou à proximité immédiate, du centre de gravité  $G_v$  du voussoir.

Les résultantes étant d'un ordre de grandeur similaire (de 1 à 5), leurs moments en  $G_v$  seront modestes comparés à celui de l'action du joint latéral...

Le "risque" de décollement statique est essentiellement le fait de la pesanteur lorsque le voussoir est en position basse ( $\theta = 0$ ) et de la mise en charge du joint latéral.



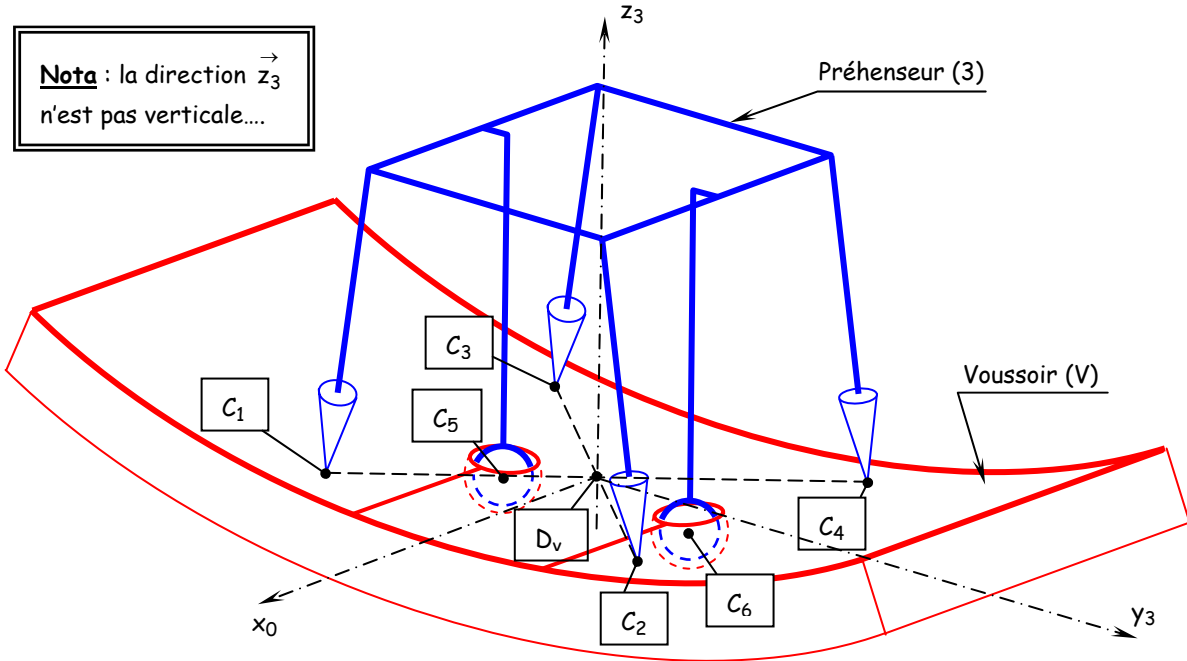


**DOCUMENT REPONSE 1**

**Question 2-5**

Commenter le modèle de liaison entre préhenseur et voussoir proposé par la figure 7 et préciser son caractère iso-hyperstatique.

On considère la position du voussoir définie par le document réponse 1. Procéder à l'étude statique du voussoir et écrire les équations correspondantes.



Modélisation de la liaison préhenseur - voussoir

La mise en parallèle des 6 liaisons (4 ponctuelles et deux rotules) entre le préhenseur et le voussoir est équivalente à un encastrement, modèle qui peut être retenu lors d'une étude statique ou dynamique, A noter que cette modélisation masque le caractère hyperstatique de degré 4 de la solution initiale. L'étude des conditions du maintien du contact implique de retenir le modèle à six liaisons, et de formuler des hypothèses pour lever l'indétermination.

**Analyse de l'iso-hyperstaticité**

Les quatre ponctuelles réparties sur une surface cylindrique peuvent être modélisées globalement par une liaison pivot glissant. Il subsiste alors deux degrés de liberté, une rotation et une translation, qu'une linéaire annulaire de directeur ( $\vec{z}_3$ ) suffirait à supprimer...

La présence de deux rotules traduit un degré d'hyperstaticité égal à 4.

**En statique :**

Le système étudié comporte deux pièces : le préhenseur (3) fixe, assimilé au bâti, et le voussoir.

Il y a donc une étude statique, soit  $N_e = 6$  équations.

Chaque liaison ponctuelle fait apparaître une inconnue statique, et chaque rotule trois inconnues statiques. Soit au total  $N_s = 10$  inconnues

$$m = N_e - R_s$$

Mobilité et hyperstaticité sont définies par :  $\frac{h = N_i - R_s}{h - m = N_i - N_e}$  où  $R_s$  est le rang du système linéaire d'équations.

Comme à l'évidence la mobilité vaut  $m = 0$ , on en déduit le rang  $R_s = 6$  et le degré d'hyperstaticité  $h = 4$ .

**En cinématique (ou géométrie) :**

Le graphe de structure fait apparaître 5 cycles :  $v = N_L - N_P + 1$  où  $N_L$  et  $N_P$  sont les nombres de liaisons et de pièces du système étudié.

Chaque fermeture cinématique de cycle donne 6 équations, soit un total de  $n_e = 30$  équations.

Chaque liaison ponctuelle fait apparaître 5 inconnues cinématiques, chaque rotule fait apparaître trois inconnues cinématiques, soit au total  $n_c = 26$  inconnues

Mobilité et hyperstaticité sont définies par :  $\frac{m = n_i - R_c}{h - m = n_e - n_i}$  où  $R_c$  est le rang du système linéaire d'équations.

Comme la mobilité vaut  $m = 0$ , on en déduit le rang  $R_c = 26$  et le degré d'hyperstaticité  $h = 4$ .

**Etude statique du voussoir :**

Hypothèses :

- les frottements sont négligés dans toutes les liaisons ;
- le caractère unilatéral des contacts ponctuels conduit à noter  $-N_i \vec{n}_i$  l'action dans ces liaisons, avec  $\vec{n}_i$  la normale extérieure au voussoir au point de contact.

• Notation :  $(\vec{z}_3, \vec{n}_1) = (\vec{z}_3, \vec{n}_3) = \varphi$      $(\vec{z}_3, \vec{n}_2) = (\vec{z}_3, \vec{n}_4) = -\varphi$     avec  $\sin \varphi = \frac{a}{R}$

Ponctuelle en  $C_1$  :  $\{T_{C_1}\}_{C_1} = \begin{Bmatrix} -N_1 \vec{n}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{C_1} = \begin{Bmatrix} -N_1(\sin \varphi \vec{y}_3 + \cos \varphi \vec{z}_3) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{C_1} =_{D_v} \begin{Bmatrix} -N_1(\sin \varphi \vec{y}_3 + \cos \varphi \vec{z}_3) \\ N_1[b \cos \varphi \vec{x}_0 + a(\cos \varphi \vec{y}_3 - \sin \varphi \vec{z}_3)] \end{Bmatrix}$

Ponctuelle en  $C_2$  :  $\{T_{C_2}\}_{C_2} = \begin{Bmatrix} -N_2 \vec{n}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{C_2} = \begin{Bmatrix} N_2(\sin \varphi \vec{y}_3 - \cos \varphi \vec{z}_3) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{C_2} =_{D_v} \begin{Bmatrix} N_2(\sin \varphi \vec{y}_3 - \cos \varphi \vec{z}_3) \\ N_2[-b \cos \varphi \vec{x}_0 + a(\cos \varphi \vec{y}_3 + \sin \varphi \vec{z}_3)] \end{Bmatrix}$

Ponctuelle en  $C_3$  :  $\{T_{C_3}\}_{C_3} = \begin{Bmatrix} -N_3 \vec{n}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{C_3} = \begin{Bmatrix} -N_3(\sin \varphi \vec{y}_3 + \cos \varphi \vec{z}_3) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{C_3} =_{D_v} \begin{Bmatrix} -N_3(\sin \varphi \vec{y}_3 + \cos \varphi \vec{z}_3) \\ N_3[b \cos \varphi \vec{x}_0 + a(-\cos \varphi \vec{y}_3 + \sin \varphi \vec{z}_3)] \end{Bmatrix}$

Ponctuelle en  $C_4$  :  $\{T_{C_4}\}_{C_4} = \begin{Bmatrix} -N_4 \vec{n}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{C_4} = \begin{Bmatrix} N_4(\sin \varphi \vec{y}_3 - \cos \varphi \vec{z}_3) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{C_4} =_{D_v} \begin{Bmatrix} N_4(\sin \varphi \vec{y}_3 - \cos \varphi \vec{z}_3) \\ N_4[-b \cos \varphi \vec{x}_0 + a(-\cos \varphi \vec{y}_3 - \sin \varphi \vec{z}_3)] \end{Bmatrix}$

Rotule en  $C_5$  :  $\{T_{C_5}\}_{C_5} = \begin{Bmatrix} X_5 \vec{x}_0 + Y_5 \vec{y}_3 + Z_5 \vec{z}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{C_5} =_{D_v} \begin{Bmatrix} X_5 \vec{x}_0 + Y_5 \vec{y}_3 + Z_5 \vec{z}_3 \\ (dY_5 - cZ_5) \vec{x}_0 - dX_5 \vec{y}_3 + cX_5 \vec{z}_3 \end{Bmatrix}$

Rotule en  $C_6$  :  $\{T_{C_6}\}_{C_6} = \begin{Bmatrix} X_6 \vec{x}_0 + Y_6 \vec{y}_3 + Z_6 \vec{z}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{C_6} =_{D_v} \begin{Bmatrix} X_6 \vec{x}_0 + Y_6 \vec{y}_3 + Z_6 \vec{z}_3 \\ (dY_6 + cZ_6) \vec{x}_0 - dX_6 \vec{y}_3 - cX_6 \vec{z}_3 \end{Bmatrix}$

Pesanteur :  $\{\text{Pesanteur}\}_G = \begin{Bmatrix} -mg \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G =_{D_v} \begin{Bmatrix} -mg \vec{z}_0 \\ -mg(z_G + h) \vec{x}_0 \end{Bmatrix}_{D_v} = \begin{Bmatrix} -mg(\sin \theta \vec{y}_3 + \cos \theta \vec{z}_3) \\ -mg \sin \theta (z_G + h) \vec{x}_0 \end{Bmatrix}$

Préhenseur :  $\{\text{Préhenseur}\}_{D_v} = \begin{Bmatrix} F_p \vec{z}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{D_v}$

Joint latéral :  $\{T_{\text{Latéral}}\}_H = \begin{Bmatrix} -qL(\cos \beta \vec{y}_3 + \sin \beta \vec{z}_3) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_H =_{D_v} \begin{Bmatrix} -qL(\cos \beta \vec{y}_3 + \sin \beta \vec{z}_3) \\ qL(h \cos \beta - r) \vec{x}_0 \end{Bmatrix}$

Joint frontal :  $\{T_{\text{Frontal}}\}_K = \begin{Bmatrix} 2qr\beta \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_K =_{D_v} \begin{Bmatrix} 2qr\beta \vec{x}_0 \\ 2qr(\beta h - r \sin \beta) \vec{y}_3 \end{Bmatrix}$

Système d'équations à l'équilibre :

$$\begin{cases} X_5 + X_6 + 2qr\beta = 0 \\ \sin \varphi(-N_1 + N_2 - N_3 + N_4) + Y_5 + Y_6 - mg \sin \theta - qL \cos \beta = 0 \\ -\cos \varphi(N_1 + N_2 + N_3 + N_4) + Z_5 + Z_6 - mg \cos \theta + F_p - qL \sin \beta = 0 \\ b \cos \varphi(N_1 - N_2 + N_3 - N_4) + (dY_5 - cZ_5) + (dY_6 + cZ_6) - mg \sin \theta(z_G + h) + qL(h \cos \beta - r) = 0 \\ a \cos \varphi(N_1 + N_2 - N_3 - N_4) - dX_5 - dX_6 + 2qr(\beta h - r \sin \beta) = 0 \\ a \sin \varphi(-N_1 + N_2 + N_3 - N_4) + cX_5 - cX_6 = 0 \end{cases}$$

Le caractère hyperstatique du modèle apparaît dans le système ci-dessus.

**Question 2-6**

Formuler des hypothèses sur les composantes des actions dans les liaisons (L<sub>1</sub>) à (L<sub>6</sub>), compatibles avec l'hypothèse de début de décollement dans la position du document réponse 1.

Analyser le système d'équations traduisant l'équilibre du voussoir. Discuter la possibilité de résoudre le système. La résolution n'est pas demandée.

Les deux liaisons rotules ont pour fonction de réaliser le positionnement du voussoir dans le plan (D<sub>v</sub>,  $\vec{x}_0, \vec{y}_3$ ).

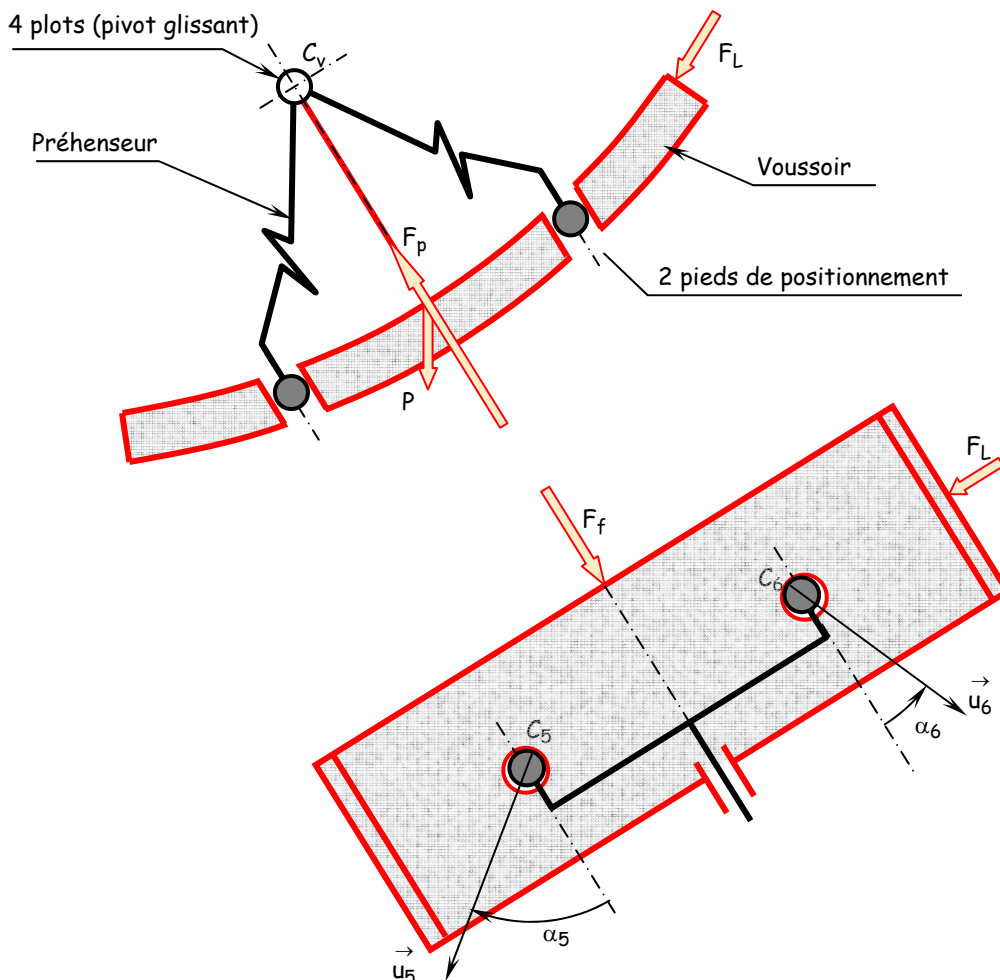
Elles ne sont pas destinées à exercer une action significative suivant  $\vec{z}_3$ , ce qui conduit à supposer  $Z_5 = Z_6 = 0$ .

Cette hypothèse conduit au même résultat que le remplacement des rotules par des linéaires annulaires.

Si on admet que ces liaisons présentent un jeu significatif, le contact s'établira sur les quatre ponctuelles (plots) au moment de la mise en dépression du préhenseur. Lors de la mise en charge des joints de voussoir, les pieds de positionnement viendront en contact en deux points avec leurs logements dans le voussoir. Ce qui équivaut à remplacer les rotules par de ponctuelles...

**Toute la difficulté tient à la définition points de contact et des directions des efforts dans les deux rotules : C<sub>5</sub>,  $\vec{u}_5$ , C<sub>6</sub> et  $\vec{u}_6$ ...**

Elles dépendent des caractéristiques géométriques du préhenseur et du voussoir, ainsi que des efforts extérieurs appliqués.



Hypothèses retenues :  $Z_5 = Z_6 = 0$      $\frac{Y_5}{X_5} = \tan \alpha_5$      $\frac{Y_6}{X_6} = \tan \alpha_6$

Compte tenu de ces hypothèses, la résolution est possible et permet de déterminer les six inconnues :  $(X_5 \text{ et } Y_5)$ ,  $(X_6 \text{ et } Y_6)$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  et  $N_4$ . **Le maintien du contact est assuré si les composantes normales dans les ponctuelles sont négatives...**

**Remarque :**

il existe d'autres façons de lever l'indétermination du problème statique. Dans tous les cas, elles reposent sur des hypothèses que l'on doit vérifier...

Par exemple, il est possible, en considérant la faible inclinaison des normales aux contacts en  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  d'assimiler cette liaison à un appui plan de normale  $\vec{z}_3$ . L'un des quatre efforts ( $\vec{F}_{C_1}$  ?) appartient alors au groupe "hyperstatique".

Les deux pieds de positionnement devront avoir un comportement de linéaire annulaire pour l'un ( $C_5$  ?), de ponctuelle pour l'autre ( $C_6$ , de normale  $\vec{u}_6$  ?). Les hypothèses seraient dans ce cas :

$N_1 = Z_5 = Z_6 = 0$  et  $\frac{Y_6}{X_6} = \tan \alpha_6$ .

Quelles que soient les hypothèses formulées, le maintien du contact existe tant que les composantes normales dans les ponctuelles ( $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  et  $N_4$ ) sont positives.

Dans une étude numérique, la démarche serait la suivante :

- construire le modèle isostatique prenant en compte les hypothèses précédentes ;
- mettre en place les efforts extérieurs connus : pesanteur, joint latéral, joint frontal, aspiration ;
- effectuer le calcul statique pour les positions successives du mécanisme ;
- vérifier que les composantes normales  $N_i$  des efforts dans les ponctuelles gardent toujours un signe positif.

**Question 2-7**

Proposer une définition du "coefficient de sécurité" du système de maintien de la liaison par aspiration.

Déterminer la valeur numérique mini de ce coefficient de sécurité.

Cette valeur vous paraît-elle compatible avec la présence de personnel à proximité de la zone d'évolution de l'érecteur ?

La figure 8 montre que l'effort d'aspiration strictement nécessaire au maintien du contact est maxi pour  $\theta = 0$ , avec pour valeur environ  $F_c = 155$  kN.

La valeur précédemment déterminée pour le préhenseur est égale à 297 kN.

En définissant le coefficient de sécurité  $s$  par :  $s = \frac{F_p}{F_c}$ , on trouve pour valeur numérique  $s = 1,9$ .

Cette valeur est insuffisante pour être compatible avec la présence de personnel à proximité de l'érecteur. On peut remarquer que pour  $\theta > 135^\circ$ , aucun effort d'aspiration n'est nécessaire pour maintenir le contact.

**Question 2-8**

Effectuer l'étude dynamique du voussoir dans l'hypothèse de trois mouvements simultanés,  $\lambda_{10}$ ,  $\theta_{21}$  et  $\mu_{32}$  supposés connus en fonction du temps.

En déduire l'expression globale du torseur des actions dans l'encastrement entre préhenseur et voussoir.

Définition du mouvement du voussoir :

$$\{V_{3/0}\}_C = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\theta}_{21} \vec{x}_0 \\ \vec{V}(C \in 3/0) = \lambda_{10} \vec{x}_0 + \mu_{32} \vec{z}_3 \end{array} \right\}$$

Accélération du centre de masse  $G$  dans  $(R_0)$  :

$$\vec{B}_0 \vec{G}_V = (\lambda_{10} + a) \vec{x}_0 + (\mu_{32} + b) \vec{z}_3$$

$$\vec{V}(G_V \in (V)/0) = \lambda_{10} \vec{x}_0 + \mu_{32} \vec{z}_3 + \dot{\theta}_{21} \vec{x}_0 \wedge (\mu_{32} + b) \vec{z}_3 = \lambda_{10} \vec{x}_0 + \mu_{32} \vec{z}_3 - \dot{\theta}_{21} (\mu_{32} + b) \vec{y}_3$$

$$\vec{\Gamma}(G_V \in (V)/0) = \ddot{\lambda}_{10} \vec{x}_0 + \ddot{\mu}_{32} \vec{z}_3 + \ddot{\theta}_{21} \vec{x}_0 \wedge (\mu_{32} + b) \vec{z}_3 - [\ddot{\theta}_{21} (\mu_{32} + b) + \dot{\theta}_{21} \mu_{32}] \vec{y}_3 - \dot{\theta}_{21} \dot{\theta}_{21} (\mu_{32} + b) \vec{y}_3$$

$$\vec{\Gamma}(G_V \in (V)/O) = \ddot{\lambda}_{10} \vec{x}_0 - [\ddot{\theta}_{21}(\mu_{32} + b) + 2\dot{\theta}_{21}\dot{\mu}_{32}] \vec{y}_3 + [\ddot{\mu}_{32} - \dot{\theta}_{21}^2(\mu_{32} + b)] \vec{z}_3$$

Moment cinétique en G du voussoir (V) dans son mouvement par rapport à (R<sub>0</sub>) :

$$\vec{\sigma}_{(G_V, (V)/O)} = \vec{I}_V \dot{\theta}_{21} \vec{x}_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \dot{\theta}_{21} \vec{x}_0$$

D'où le moment dynamique :

$$\vec{\delta}_{(G_V, (V)/O)} = \frac{d \vec{\sigma}_{(G_V, (V)/O)}}{dt / (R_0)} = A \ddot{\theta}_{21} \vec{x}_0$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au voussoir (V) s'exprime par :

$$\{D(V)/O\} = \{T_{\text{pesanteur}} \rightarrow (V)\} + \{T_{\text{aspiration}} \rightarrow (V)\} + \{T_3 \rightarrow (V)\}$$

$$\text{Où } \{T_3 \rightarrow (V)\} = \begin{Bmatrix} X \vec{x}_0 + Y \vec{y}_3 + Z \vec{z}_3 \\ L \vec{x}_0 + M \vec{y}_3 + N \vec{z}_3 \end{Bmatrix}_{G_V} \quad \{T_{\text{aspiration}} \rightarrow (V)\} = \begin{Bmatrix} F_p \vec{z}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_V} \quad \{T_{\text{pesanteur}} \rightarrow (V)\} = \begin{Bmatrix} -Mg \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_V}$$

**Théorème de la résultante dynamique :**

$$M \left[ \ddot{\lambda}_{10} \vec{x}_0 - [\ddot{\theta}_{21}(\mu_{32} + b) + 2\dot{\theta}_{21}\dot{\mu}_{32}] \vec{y}_3 + [\ddot{\mu}_{32} - \dot{\theta}_{21}^2(\mu_{32} + b)] \vec{z}_3 \right] = -Mg \vec{z}_0 + X \vec{x}_0 + Y \vec{y}_3 + (F_p + Z) \vec{z}_3$$

**Théorème du moment dynamique**

$$A \ddot{\theta}_{21} \vec{x}_0 = L \vec{x}_0 + M \vec{y}_3 + N \vec{z}_3$$

Si on suppose les trois mouvements d'entrée connus, on obtient un système linéaire de six équations et six inconnues, qui sont les composantes (X, Y, Z, L, M, N) du torseur d'encastrement du voussoir (V) sur le préhenseur (3), réduit en G<sub>v</sub>. Ce système admet une solution unique...

En réalité, cette liaison encastrement est constituée de quatre ponctuelles et deux rotules, avec un caractère hyperstatique...

### Question 2-9

Analyser et commenter ces courbes.

Quelle est la valeur mini du coefficient de sécurité du système de préhension dans la phase dynamique ?

L'effort d'aspiration nécessaire au maintien du contact montre une valeur nulle à partir d'une position angulaire proche de 90°, et sensiblement égale au poids du voussoir pour les faibles angles.

Ceci prouve que les effets dynamiques sont faibles et que l'effort dans l'encastrement est très voisin de celui obtenu en statique, sauf dans la période d'accélération angulaire du voussoir entre 2s et 3s, où la valeur de l'effort est accru d'environ 50 kN.

Au delà de 90°, l'effort d'aspiration nécessaire au maintien du contact devient nul, les actions de pesanteur agissant dans le sens de ce maintien. Les hypothèses formulées lors de l'étude statique s'appliquent de la même façon à l'étude dynamique.

La courbe d'aspiration assurant le maintien du contact présente une valeur maxi de F<sub>c</sub> = 85 kN dans la phase de démarrage de la rotation. Compte tenu de la valeur "réelle" de l'effort d'aspiration (F<sub>p</sub> = 297 kN), le coefficient de sécurité du préhenseur est alors de s = 3,5.

**TROISIEME PARTIE : ETUDE GEOMETRIQUE DE LA PARTIE TERMINALE DE L'ERECTEUR**

**Question 3-1**

Ecrire le torseur des petits déplacements de (1) par rapport à (0) à partir des notations proposées.  
 Etablir les relations liant les translations  $\Delta_i$  dans les vérins et les composantes de ce torseur.  
 Discuter le système mis en place.

Petits déplacements de (1) par rapport à (0) :

$$\{D_{1/0}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1/0} = \delta\alpha \vec{x}_0 + \delta\beta \vec{y}_0 + \delta\gamma \vec{z}_0 \\ \vec{d}(O \in 1/0) = \delta u \vec{x}_0 + \delta v \vec{y}_0 + \delta w \vec{z}_0 \end{array} \right\}$$

Expressions en  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$  :

$$\{D_{1/0}\}_{C_i} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1/0} = \delta\alpha \vec{x}_0 + \delta\beta \vec{y}_0 + \delta\gamma \vec{z}_0 \\ \vec{d}(C_i \in 1/0) = \delta u \vec{x}_0 + \delta v \vec{y}_0 + \delta w \vec{z}_0 + \vec{R}_{1/0} \wedge \vec{OC}_i \end{array} \right\}$$

$$\{D_{1/0}\}_{C_1} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1/0} = \delta\alpha \vec{x}_0 + \delta\beta \vec{y}_0 + \delta\gamma \vec{z}_0 \\ \vec{d}(C_1 \in 1/0) = \delta u \vec{x}_0 + \delta v \vec{y}_0 + \delta w \vec{z}_0 + L_1(-\delta\gamma \vec{y}_0 + \delta\beta \vec{z}_0) \end{array} \right\}$$

le corps de vérin étant lié au bâti, le déplacement de  $C_1$  est égal à  $\Delta_1$ .

$$\vec{d}(C_1 \in 1/0) = \delta u \vec{x}_0 + \delta v \vec{y}_0 + \delta w \vec{z}_0 + L_1(-\delta\gamma \vec{y}_0 + \delta\beta \vec{z}_0) = \Delta_1 \vec{z}_0, \quad \text{soit en projection :}$$

$\delta u = 0$	(1)
$\delta v - L_1 \delta\gamma = 0$	(2)
$\delta w + L_1 \delta\beta = \Delta_1$	(3)

Pour les trois autres vérins, l'hypothèse de petits déplacements revient à supposer que la projection du déplacement du point  $C_i$  sur la direction du vérin est égale à  $\Delta_i$ .

$$\{D_{1/0}\}_{C_2} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1/0} = \delta\alpha \vec{x}_0 + \delta\beta \vec{y}_0 + \delta\gamma \vec{z}_0 \\ \vec{d}(C_2 \in 1/0) = \delta u \vec{x}_0 + \delta v \vec{y}_0 + \delta w \vec{z}_0 + d_1(\delta\gamma \vec{x}_0 - \delta\alpha \vec{z}_0) \end{array} \right\}$$

La projection de  $\vec{d}(C_2 \in 1/0)$  sur  $\vec{z}_0$  est voisine de  $\Delta_2$  :

$\delta w - d_1 \delta\alpha \approx \Delta_2$	(4)
--	-----

$$\{D_{1/0}\}_{C_3} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1/0} = \delta\alpha \vec{x}_0 + \delta\beta \vec{y}_0 + \delta\gamma \vec{z}_0 \\ \vec{d}(C_3 \in 1/0) = \delta u \vec{x}_0 + \delta v \vec{y}_0 + \delta w \vec{z}_0 + d_1(-\delta\gamma \vec{x}_0 + \delta\alpha \vec{z}_0) \end{array} \right\}$$

La projection de  $\vec{d}(C_3 \in 1/0)$  sur  $\vec{z}_0$  est voisine de  $\Delta_3$  :

$\delta w + d_1 \delta\alpha \approx \Delta_3$	(5)
--	-----

$$\{D_{1/0}\}_{C_4} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1/0} = \delta\alpha \vec{x}_0 + \delta\beta \vec{y}_0 + \delta\gamma \vec{z}_0 \\ \vec{d}(C_4 \in 1/0) = (\delta u + c_1 \delta\beta - b_1 \delta\gamma) \vec{x}_0 + (\delta v - a_1 \delta\gamma - c_1 \delta\alpha) \vec{y}_0 + (\delta w + b_1 \delta\alpha + a_1 \delta\beta) \vec{z}_0 \end{array} \right\}$$

$$\vec{x}_4 = \cos \alpha_4 \vec{x}_0 + \sin \alpha_4 \vec{y}_0$$

$$\left[ (\delta u + c_1 \delta\beta - b_1 \delta\gamma) \vec{x}_0 + (\delta v - a_1 \delta\gamma - c_1 \delta\alpha) \vec{y}_0 + (\delta w + b_1 \delta\alpha + a_1 \delta\beta) \vec{z}_0 \right] \bullet \left[ \cos \alpha_4 \vec{x}_0 + \sin \alpha_4 \vec{y}_0 \right] \approx \Delta_4$$

Soit 
$$(\delta u + c_1 \delta\beta - b_1 \delta\gamma) \cos \alpha_4 + (\delta v - a_1 \delta\gamma - c_1 \delta\alpha) \sin \alpha_4 \approx \Delta_4 \quad (6)$$

On obtient un système linéaire de 6 équations à 6 inconnues, qui sont  $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma, \delta u, \delta v$  et  $\delta w$ .  
 Le système possède en général une solution unique pour un jeu de valeurs de  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  et  $\Delta_4$ .

$$\begin{cases} \delta u = 0 \\ \delta v - L_1 \delta \gamma = 0 \\ \delta w = \frac{\Delta_3 + \Delta_2}{2} \\ \delta \alpha = \frac{\Delta_3 - \Delta_2}{2d_1} \\ \delta \beta = \frac{2\Delta_1 - \Delta_3 - \Delta_2}{2L_1} \\ (c_1 \frac{2\Delta_1 - \Delta_3 - \Delta_2}{2L_1} - b_1 \delta \gamma) \cos \alpha_4 + (\delta v - a_1 \delta \gamma - c_1 \frac{\Delta_3 - \Delta_2}{2d_1}) \sin \alpha_4 = \Delta_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta \alpha = \frac{\Delta_3 - \Delta_2}{2d_1} \\ \delta \beta = \frac{2\Delta_1 - \Delta_3 - \Delta_2}{2L_1} \\ \delta \gamma = \frac{\Delta_4 - c_1 \left( \frac{2\Delta_1 - \Delta_3 - \Delta_2}{2L_1} \cos \alpha_4 - \frac{\Delta_3 - \Delta_2}{2d_1} \sin \alpha_4 \right)}{-b_1 \cos \alpha_4 + (L_1 - a_1) \sin \alpha_4} \\ \delta u = 0 \\ \delta v = -L_1 \frac{\Delta_4 - c_1 \left( \frac{2\Delta_1 - \Delta_3 - \Delta_2}{2L_1} \cos \alpha_4 - \frac{\Delta_3 - \Delta_2}{2d_1} \sin \alpha_4 \right)}{-b_1 \cos \alpha_4 + (L_1 - a_1) \sin \alpha_4} \\ \delta w = \frac{\Delta_3 + \Delta_2}{2} \end{cases}$$

### Question 3-2

Déduire des courbes issues des simulations les valeurs numériques des courses des vérins pour respecter ces contraintes.

Justifier la validité de l'hypothèse de l'étude en petits déplacements.

Les courbes de la simulation montrent le caractère quasi linéaire des relations géométriques : toutes les courbes représentatives des paramètres ont des allures proches de droites. Ce qui légitime l'hypothèse de petits déplacements.

Valeurs numériques :

**angle  $\delta\alpha$ :** un déplacement dans l'intervalle (- 50 mm, + 50 mm) du vérin ( $V_2$ ) provoque une rotation  $\delta\alpha$  dans l'intervalle  $(-1,5^\circ, +1,5^\circ)$

un déplacement dans l'intervalle (- 50 mm, + 50 mm) du vérin ( $V_3$ ) provoque une rotation  $\delta\alpha$  dans le même intervalle  $(-1,5^\circ, +1,5^\circ)$ .

Une course de 100 mm pour chacun de ces deux vérins suffit à obtenir la plage de  $6^\circ (\pm 3^\circ)$  pour l'angle  $\delta\alpha$ .

**angle  $\delta\beta$ :** un déplacement dans l'intervalle (- 42 mm, + 42 mm) du vérin ( $V_2$ ) provoque une rotation  $\delta\beta$  dans l'intervalle  $(-1,5^\circ, +1,5^\circ)$

un déplacement dans l'intervalle (- 42 mm, + 42 mm) du vérin ( $V_3$ ) provoque une rotation  $\delta\beta$  dans le même intervalle  $(-1,5^\circ, +1,5^\circ)$ .

Une course de 84 mm pour chacun de ces deux vérins suffit à obtenir la plage de  $6^\circ (\pm 3^\circ)$  pour l'angle  $\delta\beta$ .

**angle  $\delta\gamma$ :** un déplacement dans l'intervalle (- 50 mm, + 50 mm) du vérin ( $V_4$ ) provoque une rotation  $\delta\gamma$  dans l'intervalle  $(-3^\circ, +3^\circ)$ . Les angles  $\delta\alpha$  et  $\delta\beta$  restent sensiblement nuls au cours de ce mouvement.

**Remarque :** pour atteindre la valeur maxi ( $6^\circ$ ) de  $\delta\alpha$  par exemple, il est nécessaire de réaliser un déplacement de 50 mm du vérin ( $V_2$ ) et de -50 mm du vérin ( $V_3$ ), ce qui implique un angle  $\delta\beta$  nul.

Si on souhaite que les deux angles atteignent leurs valeurs extrêmes simultanément ( $-3^\circ$  ou  $+3^\circ$ ), il convient de doubler la course utile de chacun des vérins ( $V_1$ ) et ( $V_2$ ).



**Question 3-3**

Expliquer comment ces courbes de la simulation peuvent être exploitées pour concevoir le système de commande de déplacement fin du voussoir.

On pourra illustrer la démarche en s'appuyant sur la recherche de la seule rotation  $\delta\beta$  ( $\delta\alpha = 0$  et  $\delta\gamma = 0$ ). Les valeurs numériques utiles sont à relever sur les courbes.

Le principe d'une étude géométrique en petits déplacements consiste à linéariser les relations liant les paramètres géométriques au voisinage d'une position dite de référence.

L'étude précédente met en place un système de six équations dans lesquelles les inconnues sont les paramètres du déplacement  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ ,  $\delta\alpha$ ,  $\delta\beta$  et  $\delta\gamma$ . Elles sont exprimées en fonction des translations dans les vérins  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ , et  $\Delta_4$ .

Il n'est pas possible d'inverser le système pour mettre en inconnues  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ , et  $\Delta_4$ , et en paramètres connus  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ ,  $\delta\alpha$ ,  $\delta\beta$  et  $\delta\gamma$ .

La principale fonction de cette partie terminale consiste à assurer l'orientation angulaire du voussoir, donc à piloter les angles  $\delta\alpha$ ,  $\delta\beta$  et  $\delta\gamma$ . On peut également inclure l'un des paramètres de translation, probablement  $\delta w$  pour assurer un positionnement radial fin.

On peut alors inverser le système constitué des équations (1), (2), (3) et (6) et calculer les translations des vérins pour un jeu de valeurs donné de ces quatre déplacements du voussoir.

A noter que les déplacements  $\delta u$  et  $\delta v$  ne seront pas "pilotés".

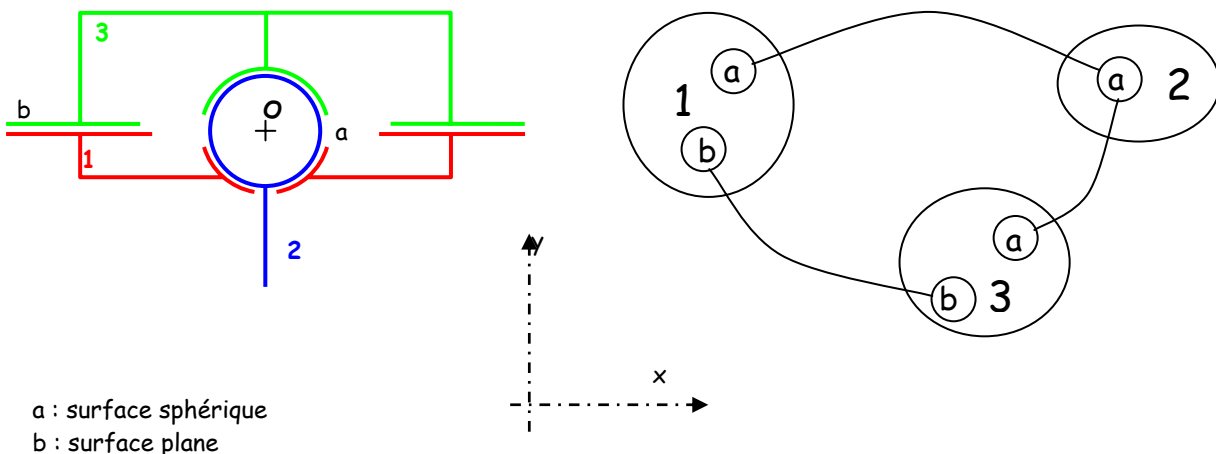
**Question 3-4**

Sur les différents dessins de définitions fournis sur le document réponse DR2, traduire qualitativement, et en respectant la norme ISO, les contraintes géométriques suivantes :

- permettre l'assemblage ;
- garantir le jeu de fonctionnement.

**Modèle 1 :**

A partir du plan d'ensemble et afin de garantir un bon positionnement pour la liaison rotule bilatérale, on suppose dans ce premier modèle que le centrage court entre 1 et 3 n'intervient pas dans l'assemblage de la liaison rotule. C'est-à-dire que le jeu est considéré comme important au niveau des surfaces cylindriques entre 1 et 3.



a : surface sphérique  
b : surface plane

Les conditions fonctionnelles à prendre en compte sont :

- la définition de la dimension de la sphère afin de garantir le critère de résistance, de surface de contact, ... caractéristique intrinsèque de la surface sphérique - spécification dimensionnelle ou spécification géométrique
- la limitation des défauts de forme (sphéricité) afin de garantir une surface de contact importante - spécification géométrique
- le positionnement de la surface sphérique a par rapport au plan b pour les pièces 1 et 3 - spécification géométrique : localisation de la surface a par rapport à la surface b

- le jeu de fonctionnement pour la liaison rotule bilatérale : choix des valeurs pour les zones de tolérance et les IT
- la position de différents perçages permettant le montage des vis pour assurer le maintien en position de l'ensemble - spécification géométrique : localisation des perçages par rapport aux surfaces b et a

**Remarque :**

Exemple de démarche analytique permettant de mettre en évidence certaines spécifications géométriques relatives aux conditions de montage :

*Torseurs équivalents faisant intervenir les ddl (majuscules) et les degrés de liaison (minuscules) pour chaque liaison élémentaire :*

$$\text{Liaison 1-2 (surface a) : } \left\{ d_{(1/2)a} \right\}_O = \begin{Bmatrix} A_{(1/2)a} & u_{(1/2)a} \\ B_{(1/2)a} & v_{(1/2)a} \\ \Gamma_{(1/2)a} & w_{(1/2)a} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

$$\text{Liaison 3-1 (surface b) : } \left\{ d_{(3/1)b} \right\}_O = \begin{Bmatrix} \alpha_{(3/1)b} & U_{(3/1)b} \\ B_{(3/1)b} & v_{(3/1)b} \\ \gamma_{(3/1)b} & W_{(3/1)b} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

$$\text{Liaison 2-3 (surface a) : } \left\{ d_{(2/3)a} \right\}_O = \begin{Bmatrix} A_{(2/3)a} & u_{(2/3)a} \\ B_{(2/3)a} & v_{(2/3)a} \\ \Gamma_{(2/3)a} & w_{(2/3)a} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

*Système d'équations scalaires issu de la loi de composition des petits déplacements pour le cycles du graphe des liaisons élémentaires correspondant au cycle de montage.*

$$\text{Cycle : } 1a, 2a, 3a-b, 1b \quad \left\{ d_{(1/2)a} \right\}_O + \left\{ d_{(2/3)a} \right\}_O + \left\{ d_{(3/1)b} \right\}_O = \{0\}$$

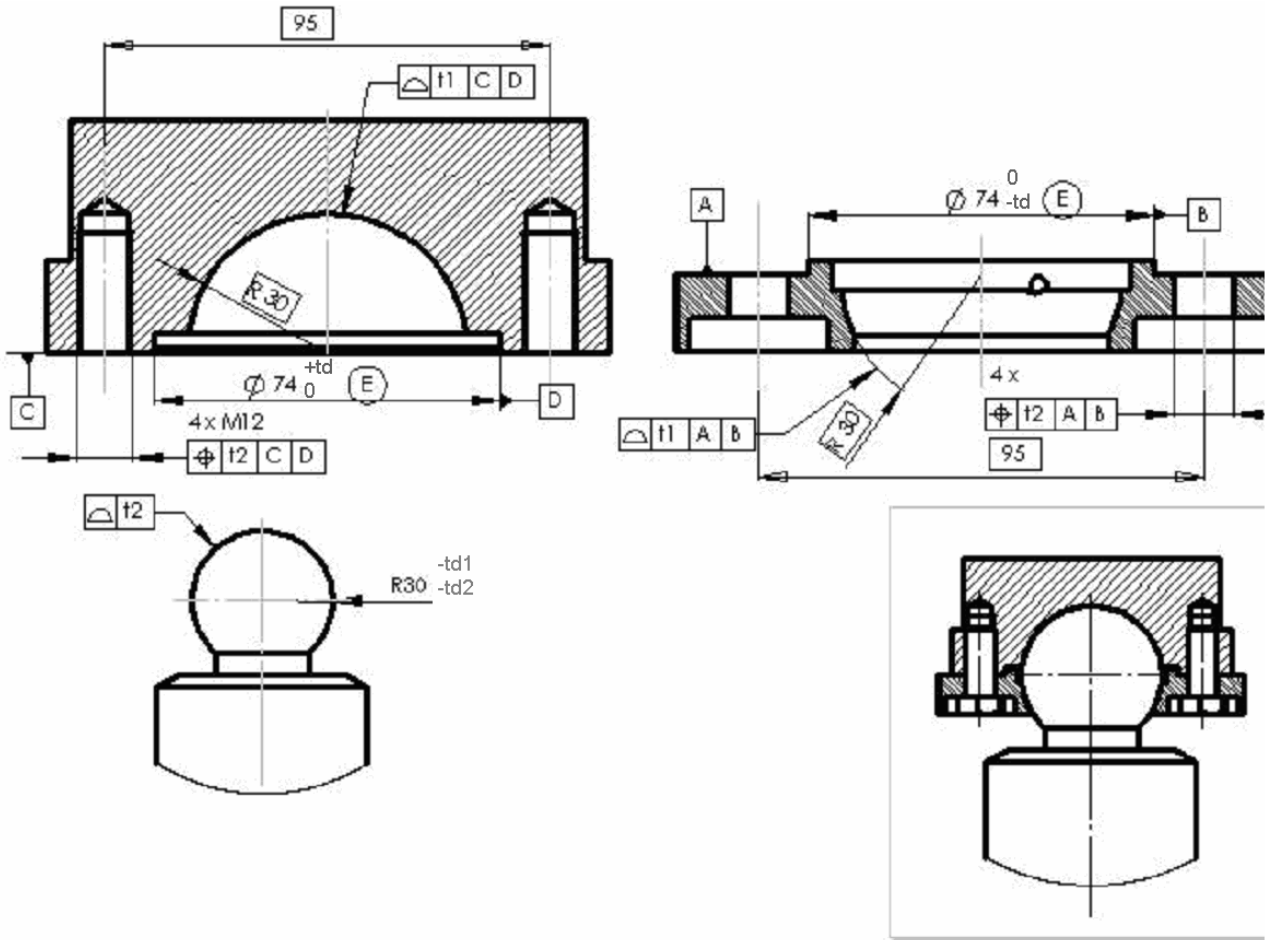
On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} A_{(1/2)a} + A_{(2/3)a} + \alpha_{(3/1)b} = 0 \\ B_{(1/2)a} + B_{(2/3)a} + B_{(3/1)b} = 0 \\ \Gamma_{(1/2)a} + \Gamma_{(2/3)a} + \gamma_{(3/1)b} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{(1/2)a} + u_{(2/3)a} + U_{(3/1)b} = 0 \\ v_{(1/2)a} + v_{(2/3)a} + v_{(3/1)b} = 0 \quad (1) \\ w_{(1/2)a} + w_{(2/3)a} + W_{(3/1)b} = 0 \end{cases}$$

L'équation (1) caractérise une condition de montage (un degré d'hyperstatisme) et elle correspond à positionner une sphère par rapport à un plan, cela correspond à la position d'un point (caractérisant la sphère) par rapport à un plan. La position d'un point par rapport à un plan nécessite un seul paramètre : une distance. A partir du plan d'ensemble on constate que cette distance est nulle.

Afin de respecter cette condition fonctionnelle, il faut utiliser une spécification de localisation de la surface plane b par rapport à la surface sphérique a pour les pièces 1 et 3.





## QUATRIEME PARTIE : REALISATION DU VERIN CENTRAL ET DE LA LIAISON TETE-ERECTEUR/TABLE

---

### Question 4-1

Après l'analyse des différentes contraintes associées, déterminer sous forme de graphes fonctionnels, schémas d'architecture et (ou) de schémas technologiques les différentes solutions que vous envisagez.

Rappel des données principales du cahier des charges relatif au fonctionnement de la tête de l'érecteur :

Permettre la rotation de +/- 3° de la table autour des deux points de balance.

- nécessité d'une liaison rotule centrale, de conception unitaire et devant reprendre l'ensemble des efforts

Permettre une translation de 100 mm de l'ensemble Table inférieure (partie2) par rapport à l'ensemble Table supérieure (partie1).

Pression d'alimentation des différents vérins de la tête de l'érecteur : 180 bar.

Assurer un effort maxi de 110 kN pour le déplacement de l'ensemble Table inférieure (partie2) + voussoir clé. Supporter les efforts statiques.

- nécessité de mise en place de vérin hydraulique, reprenant l'effort de 110kN et la masse de l'ensemble
- dimensionnement du vérin de mise en place de l'effort :  $\phi = 350$  mm
- dimensionnement du vérin de positionnement :  $\phi = 125$  mm

Etre d'une conception robuste.

- conception unitaire du système
- conception en mécano soudé
- surdimensionnement important
- positionner la rotule pour limiter les efforts dans les axes des vérins.

### Question 4-2

Sur le document DR3, établir le dessin d'ensemble à l'échelle 1:5 de la solution composée de deux vérins coaxiaux (figure 10) :

- le premier assure le déplacement de la table supérieure (partie 1) par rapport au châssis tête-érecteur. Sa course est d'environ 110 mm et il contribue au réglage fin de la position du voussoir. Il doit donc permettre les mouvements de rotation imposés par les vérins de balance ;
- le second permet de dégager la partie centrale du préhenseur lors de la manipulation du voussoir clé. Le déplacement de la table inférieure (partie 2) par rapport à la table supérieure (partie 1) est d'environ 100 mm. Le mouvement est une translation rectiligne, le guidage est assuré par les colonnes de fixation des pieds de positionnement. Des contacteurs détectent la taille du voussoir, ce qui a pour effet d'informer le système de commande de sa nature particulière, et de gérer le système en conséquence (en particulier, seule la chambre centrale est en dépression...).

La position géométrique des différents composants correspondra à la position pour laquelle la partie table-clé est translaturée (déplacement maxi) par rapport aux deux parties extérieures. Des vues ou coupes complémentaires, en plan ou perspective, doivent être utilisées si elles facilitent la compréhension.

# A-A

