

SESSION 2012

**AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE**

Section : **MÉCANIQUE**

**ÉPREUVE DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE
ET DES MILIEUX DÉFORMABLES**

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

MACHINE D'USINAGE GRANDE VITESSE « VERNE »

L'Usinage à Grande Vitesse, en exploitant le potentiel de nouvelles technologies, permet d'accroître la qualité des pièces produites, de réduire les délais et les coûts. Pour parvenir à ce résultat, les machines d'usinage à grande vitesse ont subi une profonde mutation. Du côté de la structure de la machine elle-même, le développement de l'Usinage à Grande Vitesse et l'usinage de pièces de formes complexes, auraient tendance à favoriser les machines à structure parallèle hybride plutôt que les machines à structure sérielle dites conventionnelles.

PRÉSENTATION DE LA MACHINE VERNE

La machine VERNE (voir figure 1) se compose en particulier :

- d'un module parallèle, appelé HERMES, qui supporte à son extrémité l'outil ;
- d'une table dite de « Tilting » à deux axes.

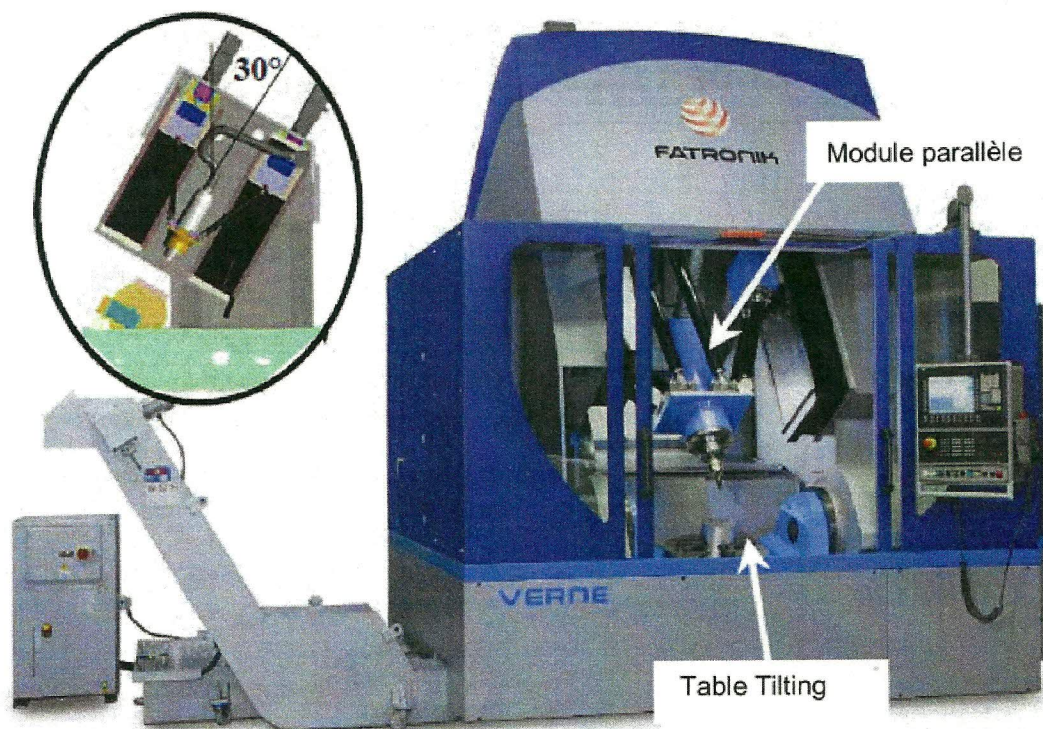


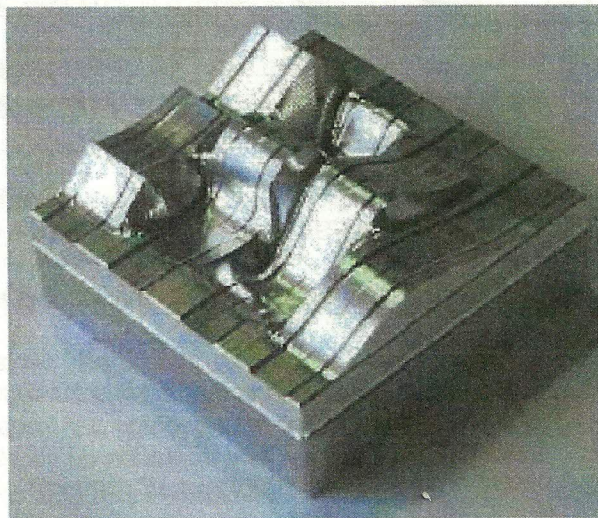
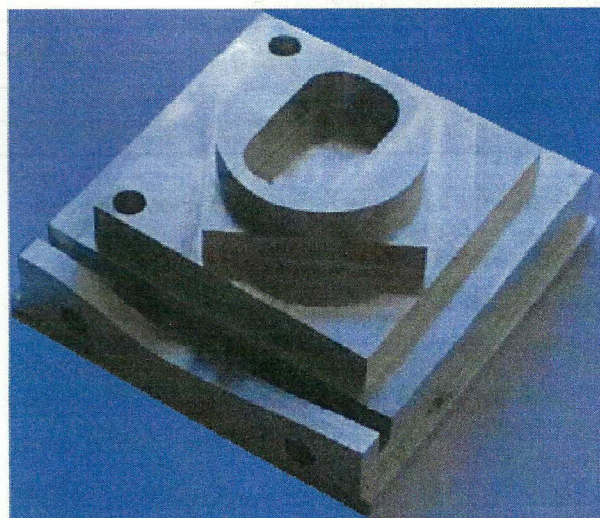
Figure 1 : la machine VERNE.

Le module parallèle HERMES (voir figure 2) est composé de six jambes de longueur fixe. Chaque paire de jambes relie la plate-forme mobile à un chariot qui coulisse selon la direction \vec{z} de la machine (incliné de 30° par rapport à la verticale). Ce module permet de piloter trois degrés de liberté qui sont les trois translations. La machine VERNE est donc une machine-outil hybride 5 axes dont l'espace de travail est exempt de singularités.

Développée pour un laboratoire de recherche, cette machine sert à la qualification d'un simulateur d'usinage qui permet d'optimiser le processus d'usinage à grande vitesse (voir figures 3 & 4). Son utilisation est également en cours d'étude pour la mise en œuvre du procédé de soudage par friction-malaxage.



Figure 2 : le module parallèle HERMES.



Figures 3 & 4 : exemples de pièces complexes usinées lors des campagnes de test.

Le diagramme partiel des inter-acteurs de la machine VERNE est présenté sur la figure 5.

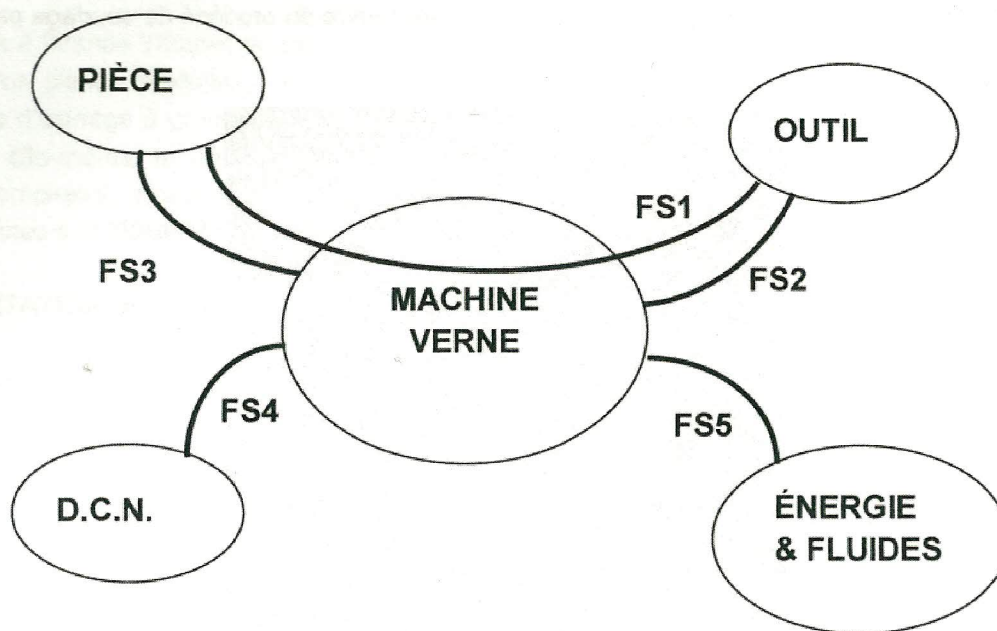


Figure 5 : diagramme partiel des inter-acteurs.

Phase normale d'utilisation :

FS1	Permettre l'usinage à grande vitesse d'une pièce conformément à un fichier C.A.O. de départ
FS2	Être relié à l'outil
FS3	Permettre la fixation de la pièce (des pièces)
FS4	Être pilotée par le Directeur de Commande Numérique (D.C.N.)
FS5	S'adapter aux énergie et fluides

Phase expérimentale :

FS1	Permettre la mise en œuvre du procédé de soudage par friction-malaxage
FS2	Être relié à l'outil
FS3	Permettre la fixation de la pièce (des pièces)
FS4	Être pilotée par le Directeur de Commande Numérique (D.C.N.)
FS5	S'adapter aux énergie et fluides

L'objet de l'étude proposée est de valider certaines solutions ou fonctions techniques associées aux fonctions de service FS1 des deux phases de vie énoncées et FS2.

Le sujet s'articule en trois parties indépendantes et une annexe :

- PARTIE 1 : vérifier les degrés de liberté pilotables du module HERMES et déterminer les lois de mouvement dans une configuration donnée ;
- PARTIE 2 : modéliser l'assemblage par frettage du couple « outil / porte-outil » ;
- PARTIE 3 : modéliser une opération de soudage par friction-malaxage ;
- ANNEXES : annexes des parties 1, 2 et 3.

PARTIE 1- VALIDER LE CHOIX DE LA STRUCTURE HERMES

Le mécanisme étudié, module parallèle HERMES, permet de positionner la plate-forme mobile supportant l'outil dans le repère machine. Il est composé de six jambes de longueur **fixe** qui sont disposées sous forme de deux parallélogrammes et d'un trapèze. Chaque paire de jambes relie la plate-forme mobile à un chariot animé d'un mouvement de translation par rapport au bâti selon la direction \bar{z} de la machine (direction \bar{z} inclinée de 30° par rapport à la verticale). La plate forme mobile peut être définie par les points B_1 à B_6 . Les deux jambes repérées $[A_1B_1]$ et $[A_4B_4]$ sur la figure 6, relie le chariot 1 à la plate-forme. Elles sont de longueurs plus petites que les quatre autres jambes et forment le trapèze. Les deux jambes repérées $[A_2B_2]$ et $[A_5B_5]$ relient le chariot 2 à la plate-forme et forment le premier parallélogramme. Les deux jambes repérées $[A_3B_3]$ et $[A_6B_6]$ relient le chariot 3 et forment le second parallélogramme.

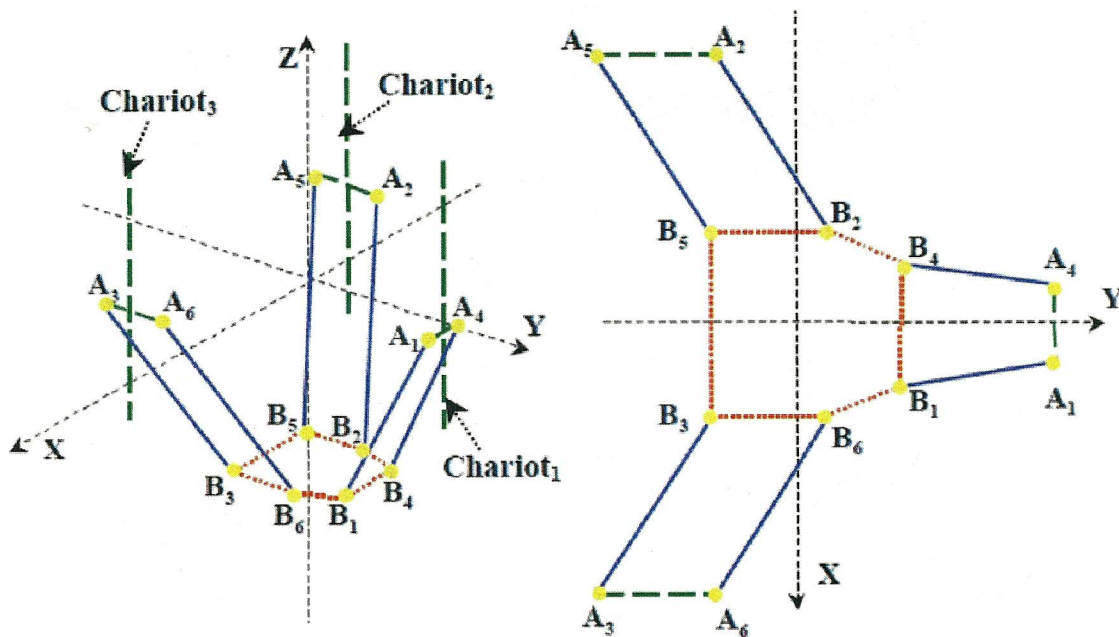


Figure 6 : schéma simplifié du module HERMES.

L'objectif de cette partie est de valider partiellement la fonction FS1, notamment en s'intéressant à la validation de certains critères de cette fonction, tels que le nombre d'axes pilotables et la précision de positionnement de l'outil. Pour ce la on propose :

- de vérifier les degrés de liberté pilotables du module HERMES en réalisant une étude cinématique partielle ;
- de déterminer les lois de mouvement dans une configuration donnée.

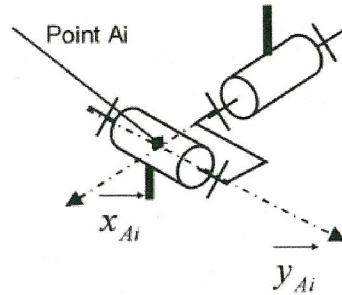
Paramétrage du système

Soient \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}_4 deux repères orthonormés directs liés respectivement au bâti de la machine et à la plate-forme mobile supportant l'outil (voir figure 9). On note : $\mathcal{R}_0 \equiv (C_1, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ et $\mathcal{R}_4 \equiv (G_4, \bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)$, avec C_1 centre de la table tilting et G_4 centre de gravité de la plate forme mobile S_4 .

Le mécanisme comporte 24 liaisons pivots montées par paire de telles sortes que l'on réalise 12 liaisons de type cardan et 3 liaisons glissières (voir figure 9 et 10 pour le modèle cinématique adopté pour l'étude).

Le bâti est noté S_0 , la plate-forme mobile est noté S_4 , les pièces du parallélogramme du chariot 2 sont notées S_2 et S_{2i} , celles du chariot 3 sont notées S_3 et S_{3i} et celles du trapèze lié au chariot 1 sont notées S_1 et S_{1i} ; $i \in [1,6]$. Une numérotation complète de l'ensemble ainsi que les schémas cinématiques partiels en configuration étendus sont donnés sur les figures 9 et 10 ainsi qu'en annexe. Le pilotage du module HERMES se fait par les 3 liaisons glissières des chariots 1, 2 et 3 avec le bâti. On note Z_1 (respectivement Z_2 et Z_3) les paramètres de déplacement des chariots 1 (respectivement 2 et 3).

À chaque liaison de type cardan associée au point A_i ou B_i on associe un repère comme indiqué sur la figure 8. Chaque point A_i ou B_i est considéré comme l'intersection des axes des 2 liaisons pivots formant une liaison type cardan.



Figures 7 et 8 : vue et schéma d'une liaison cardan.

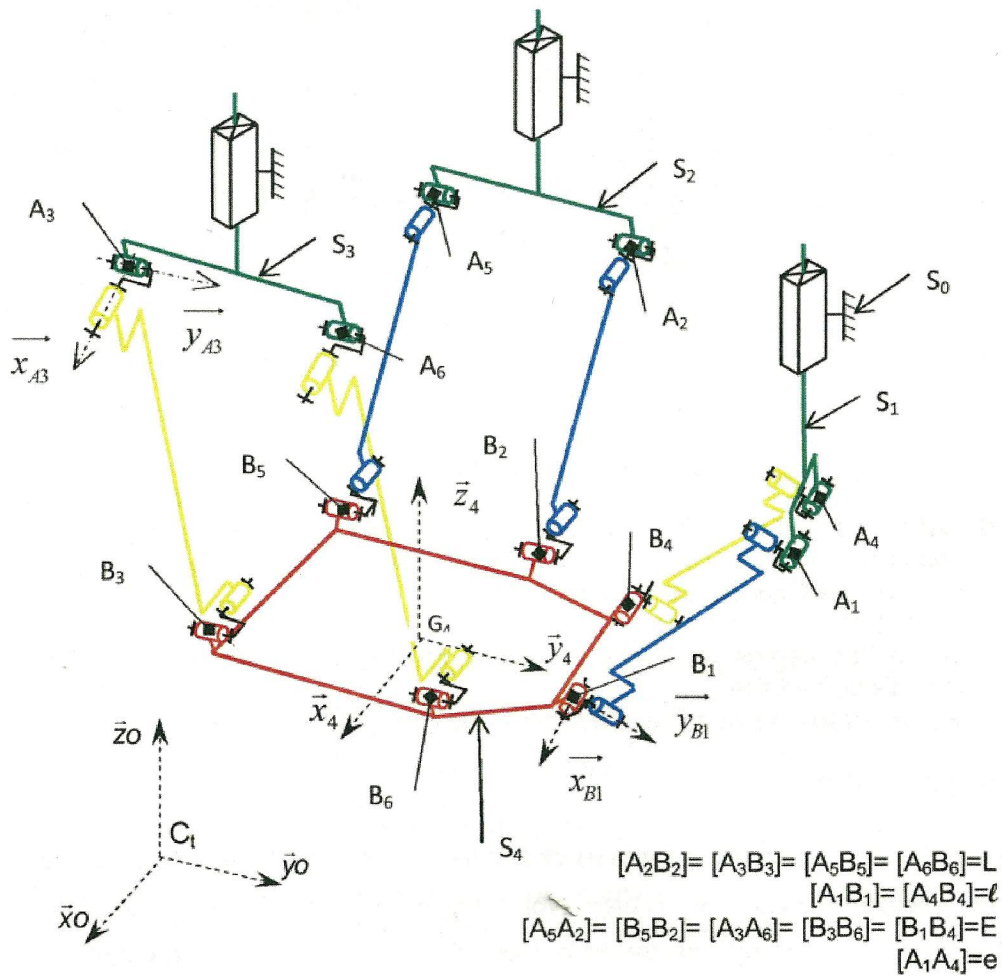


Figure 9 : schéma cinématique module HERMES.

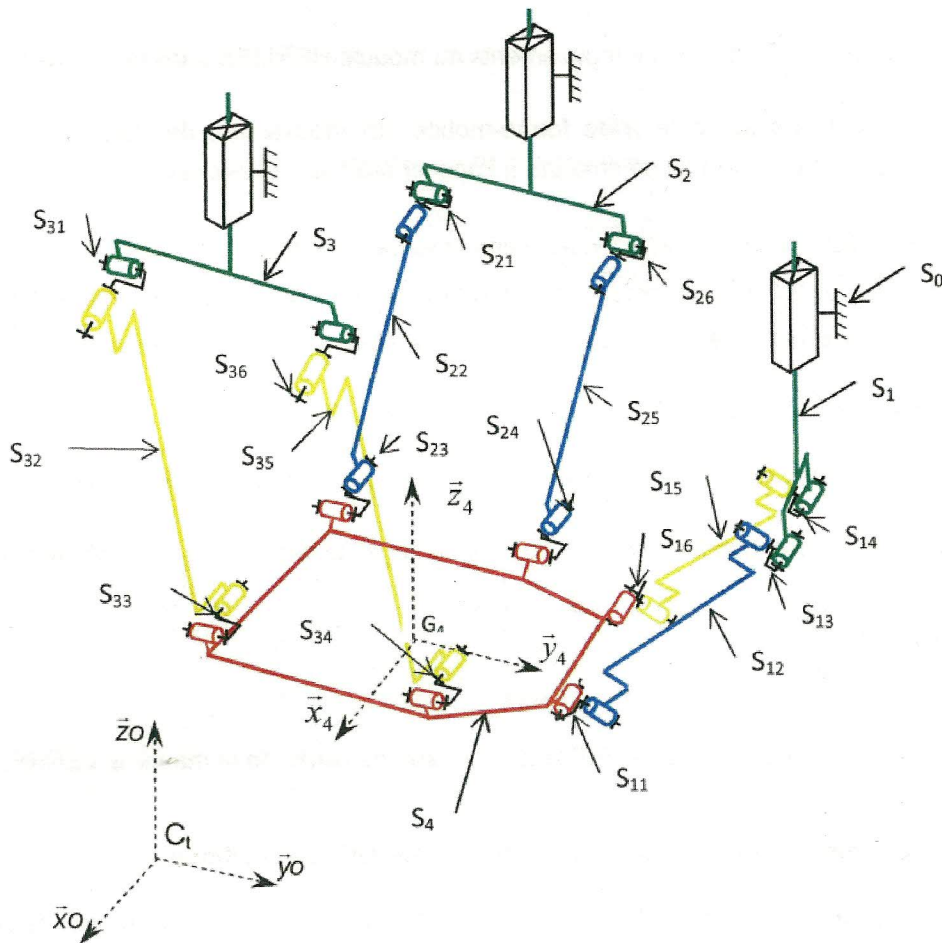


Figure 10 : schéma cinématique module HERMES avec numérotation des solides.

Étude cinématique et analyse de la structure parallèle

Par construction on impose :

$$\overline{y_{A3}} = \overline{y_{A6}} = \overline{y_{A1}} = \overline{y_{A2}} = \overline{y_0}$$

$$\overline{x_{A1}} = \overline{x_{A4}} = \overline{x_0}$$

Les glissières sont de direction \vec{z}_0 .

En position initiale les points A_3, A_6, B_5, B_3 sont coplanaires, de même pour les points A_2, A_6, B_2, B_6 .

Question 1 : Mettre en place le graphe des liaisons du modèle cinématique adopté pour le module HERMES.

Question 2 : On se propose dans cette question d'étudier les propriétés structurales du mécanisme par une approche globale (c'est-à-dire sans résolution des équations de fermeture).

Pour le modèle cinématique adopté, déterminer le degré d'hyperstaticité h du modèle cinématique, en indiquant précisément la démarche.

Question 3 : Justifier par une analyse technologique du mécanisme la valeur de ce degré d'hyperstaticité. On indiquera par exemple la(les) contrainte(s) géométrique(s) correspondante(s).

Question 4 : Proposer une modification des liaisons cardans afin de rendre ce système isostatique. Justifier pourquoi ce modèle n'a pas été retenu.

On se propose maintenant de définir les mouvements du module HERMES dans le repère \mathcal{R}_0 .

Question 5 : On veut imposer à la plate forme-mobile, un mouvement de translation suivant la direction \vec{z}_0 . Indiquer la(les) loi(s) de commande à imposer alors aux glissières.

Question 6 : En étudiant uniquement le sous-ensemble formé par les solides S_0, S_2, S_{2i} avec $i \in [1, 6]$, S_3, S_{3i} $i \in [1, 6]$ et S_4 , et à partir des propriétés géométriques imposées précédemment, montrer que $\vec{y}_4 = \vec{y}_0$. En déduire la forme caractéristique du torseur des vitesses de S_4 par rapport à S_0 .

Question 7 : Montrer ^{à quelles conditions} que les points A_2, A_6, B_2 et B_6 sont coplanaires.

Question 8 : En se plaçant dans le plan précédemment défini, déterminer l'angle $\theta = (\vec{x}_4, \vec{x}_0)$.

Question 9 : Sachant que le torseur cinématique de la table tilting par rapport à S_0 est de la forme :

$$\{V_{\text{table}/S_0}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ w_y \\ w_z \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_0, Ct}$$

Conclure quant aux mobilités du module HERMES, puis aux mobilités de la machine VERNE.

Détermination des lois de mouvements dans une configuration spécifique

On suppose que l'étude dynamique du système peut être découpée en une étude dans le plan $(Ct, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$ et une dans le plan $(Ct, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Nous nous intéressons ici à la première étude.

On veut prendre en compte l'influence de la déformation des jambes sur la position de l'outil dans le repère \mathcal{R}_0 . On restreint l'étude à une configuration où les déplacements se font uniquement dans le plan $(Ct, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ et où les chariots 1, 2 et 3 sont placés à la même altitude, à z constant (voir figure 11).

On remplace la structure complète reliant la plate forme mobile S_4 au bâti S_0 par 4 glisseurs d'action de type ressort-amortisseur de valeurs k_i et C_i tel qu'au repos on ait $[A'_2B'_2] = [A'_3B'_3] = L'$ et $[A'_1B'_1] = [A'_4B'_4] = \ell'$.

Le torseur d'efforts de la pièce usinée sur l'outil de diamètre d_0 fixé sur la plate forme mobile est de la forme :

$$\{T_{\text{pièce}/S_4}\} = \begin{Bmatrix} X_0 \\ 0 \\ Z_0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_0, O_c} \quad \text{avec} \quad \overline{G_4 O_c} = \begin{Bmatrix} -d_0/2 \\ 0 \\ -r \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_0}$$

Paramétrage de la configuration étudiée

Le centre d'inertie de la plate forme mobile S_4 noté G_4 est défini par $\overline{C_t G_4} = x\vec{x}_0 + z\vec{z}_0$

$$\begin{array}{llll} \overline{G_4 B'_2} = b\vec{x}_0 - n\vec{z}_0 & \overline{G_4 A'_2} = f\vec{x}_0 + (V-n)\vec{z}_0 & \overline{G_4 B'_1} = a\vec{x}_0 - n\vec{z}_0 & \overline{G_4 A'_1} = e\vec{x}_0 + (V-n)\vec{z}_0 \\ \overline{G_4 B'_3} = d\vec{x}_0 - n\vec{z}_0 & \overline{G_4 A'_3} = q\vec{x}_0 + (V-n)\vec{z}_0 & \overline{G_4 B'_4} = c\vec{x}_0 - n\vec{z}_0 & \overline{G_4 A'_4} = h\vec{x}_0 + (V-n)\vec{z}_0 \end{array}$$

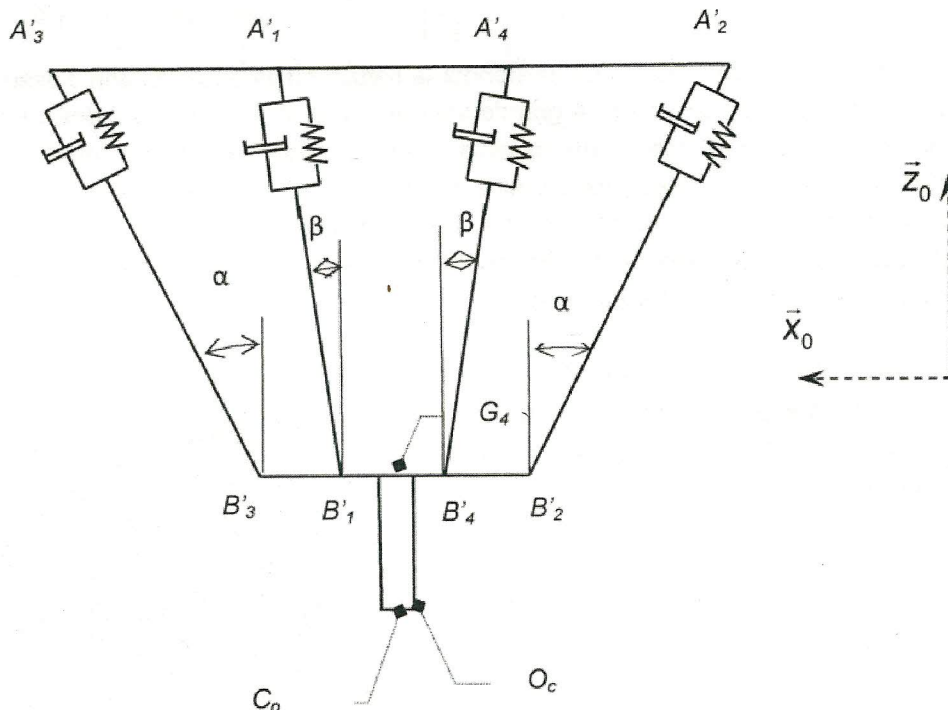


Figure 11 : modèle configuration spécifique.

On pose $(\bar{x}_4, \bar{x}_0) = \theta_0 + \theta$ avec $\theta_0 = 0$ dans la configuration étudiée, θ sera considéré comme infiniment petit.

Seule la masse, notée m_4 du solide S_4 sera pris en compte, les autres étant négligeables devant ce dernier. Le solide S_4 sera considéré comme rigide. L'inertie du solide S_4 au point G_4 autour de l'axe (G_4, \bar{y}_0) sera noté I_4 .

Question 10 : Proposer une démarche de résolution permettant de déterminer les lois de mouvements de la plate forme mobile S_4 dans le repère \mathcal{R}_0 .

Question 11 : Mettre en œuvre, sans simplification ni résolution, cette démarche de calcul.

Question 12 : Sans développer indiquer l'étape suivante permettant de valider le critère de précision associé à la fonction FS1.

Sans développer les calculs, proposer une suite à cette étude dynamique permettant de valider un critère associé à la fonction FS1.

PARTIE 2 - MODÉLISER L'ASSEMBLAGE PAR FRETAGE DU COUPLE « OUTIL / PORTE-OUTIL ».

L'objectif de cette partie est de dimensionner la liaison outil/porte-outil afin d'assurer la fonction FS2. Pour des applications d'usinage à grande vitesse les broches atteignent des vitesses de rotation de plusieurs dizaines de milliers de tours par minute. Pour limiter les vibrations engendrées des « balourds », les porte-outils peuvent être équilibrés et les outils frettés. Pour mettre en place l'outil dans le porte-outil on procède en trois étapes : (a) on chauffe le porte-outil afin de le dilater thermiquement, (b) on introduit le corps de l'outil dans le porte-outil et finalement (c), on laisse refroidir l'ensemble afin de réaliser l'assemblage.

La figure 12 présente une photo d'un porte-outil pour assemblage par frettage. Le corps de l'outil est creux afin de laisser passer le fluide de lubrification.

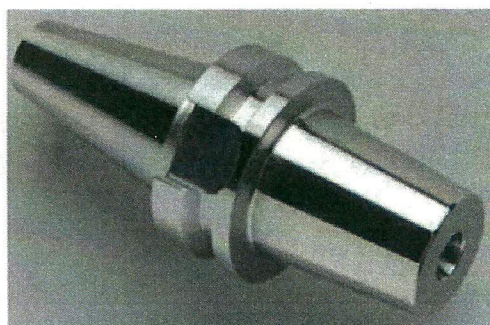


Figure 12 : porte-outil par frettage.

L'objectif de cette partie est de dimensionner le couple {outil / porte-outil} pour réaliser un assemblage par frettage qui permette de supporter les efforts d'usinage sans endommager le porte-outil et le corps de l'outil.

Étude préliminaire d'un tube sous pression

On considère un tube homogène de longueur L , de rayon interne R_i , de rayon externe R_e et d'épaisseur $e = R_e - R_i$. Ce tube est soumis à une pression interne p_i et à une pression externe p_e uniformes (voir figure 13). À son extrémité inférieure ($z=0$) le déplacement du tube suivant z est bloqué tandis qu'à son extrémité supérieure, le tube est libre d'effort.

Le tube est fabriqué dans un matériau dont le comportement est supposé élastique, linéaire et isotrope. On note λ et μ les coefficients de Lamé.

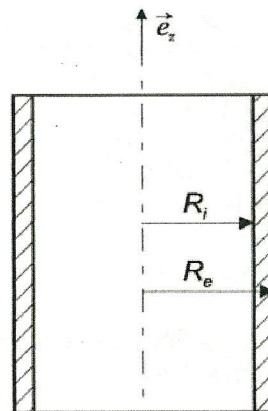


Figure 13 : tube sous pression.

On définit, dans le système de coordonnées cylindriques représenté par la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, le champ de déplacement d'un point matériel M de ce tube par :

$$\vec{U} = u\vec{e}_r + v\vec{e}_\theta + w\vec{e}_z$$

On note (r, θ, z) les coordonnées du point M dans ce système. Les matrices représentatives des tenseurs des contraintes et des déformations sont notées :

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_{\theta z} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_{(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)}$$

Question 13 : Établir la formulation du problème (équations, conditions aux limites, hypothèses) qui permet de calculer les champs de déplacement et de contrainte à l'intérieur du tube.

Question 14 : Proposer, en la justifiant, la forme du champ de déplacement. En déduire l'expression de la matrice des déformations.

Question 15 : Déduire de la loi de comportement du matériau l'expression de la matrice des contraintes.

Question 16 : En appliquant l'équation de conservation de la quantité de mouvement, établir le système différentiel qui régit l'évolution des composantes du champ de déplacement.

Question 17 : Montrer que l'expression des composantes u et w du déplacement d'un point M situé à une distance r de l'axe de révolution porté par (O, \bar{e}_z) et à une distance z de la base ($z = 0$ sur la base), est de la forme :

$$u = Ar + \frac{B}{r} \quad \text{et} \quad w = Cz + D$$

Question 18 : Établir l'expression des matrices des déformations et des contraintes en fonction des constantes A, B, C et D .

Question 19 : En utilisant les conditions aux limites sur les surfaces intérieure et extérieure du tube, établir l'expression de la composante radiale u du déplacement en fonction de la constante C .

Question 20 : Déduire des conditions aux limites aux extrémités du tube l'expression des constantes D et C et finalement l'expression de la composante axiale w du déplacement.

Question 21 : Établir l'expression des contraintes $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} .

Application à un assemblage fretté

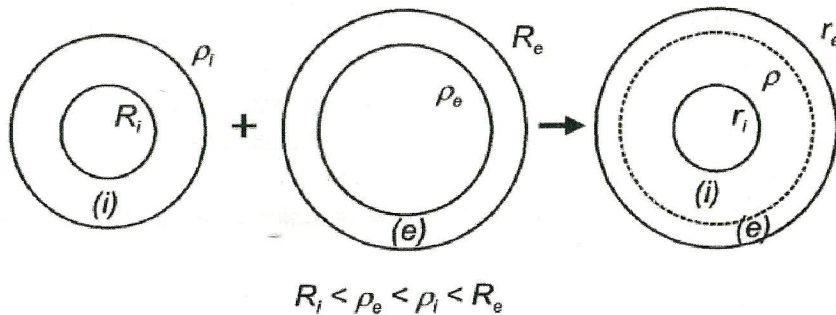


Figure 14 : assemblage fretté.

Le corps de l'outil et le porte-outil (voir figure 14) sont modélisés par deux tubes, notés (i) et (e), de rayons intérieur et extérieur initiaux R_i, ρ_i et ρ_e, R_e respectivement, tels que $R_i < \rho_e < \rho_i < R_e$. À l'issue de l'opération de frettage, le tube intérieur (le corps de l'outil) a pour rayon intérieur r_i et pour rayon extérieur ρ , tandis que le tube extérieur (le porte-outil) a pour dimensions finales ρ et r_e . On note L la longueur d'emmanchement des deux tubes. Ils sont constitués du même matériau.

Le contact entre l'outil et le porte-outil est supposé parfait et collant (sans glissement). On note p_{int} la pression exercée par le porte-outil sur le corps de l'outil (et vice-versa). En $r = r_i$ et $r = r_e$ le corps de l'outil et le porte-outil sont libres d'effort.

Question 22 : Écrire l'expression des constantes (A, B) de la partie préliminaire pour chacun des tubes. On note $(A^{(i)}, B^{(i)})$ et $(A^{(e)}, B^{(e)})$ les constantes associées respectivement au tube intérieur et au tube extérieur.

Question 23 : En déduire l'expression de p_{int} en fonction des paramètres géométriques initiaux $(R_i, \rho_i, \rho_e, R_e)$ et du comportement du matériau (λ, μ) .

Question 24 : Les dimensions du porte-outil étant fixées, on souhaite dimensionner le corps de l'outil afin qu'il résiste à la pression de frettage. Pour cela on utilise le critère de Tresca. On note σ_e la limite d'élasticité en traction du matériau. Énoncer le critère de Tresca. L'appliquer au corps de l'outil et en déduire le rayon intérieur minimal de l'outil.

Question 25 : On note C_{max} le couple maximal qui doit être transmis à l'outil. Le contact entre les deux tubes est modélisé par une loi de Coulomb de coefficient de frottement f . En déduire l'expression de la pression de frettage minimale qui permet d'assurer la transmission du couple.

Question 26 : Commenter, pour satisfaire la fonction FS2, ce résultat au regard des tolérances dimensionnelles du porte-outil et de l'outil.

PARTIE 3 - MODÉLISER UNE OPÉRATION DE SOUDAGE PAR FRICTION MALAXAGE

La machine VERNE est en cours d'adaptation pour qualifier sa cinématique afin de l'utiliser pour la mise en œuvre de procédé de soudage par friction-malaxage.

Le procédé de soudage par friction-malaxage (Friction Stir Welding ou FSW en anglais) est illustré sur la figure 15. Pour souder bord à bord deux tôles, on utilise un outil cylindrique qui comprend un épaulement et un pion qui peut être fileté. Lors de l'opération de soudage l'outil est positionné de telle manière que son épaulement frotte à la surface des plaques. Le frottement et la déformation plastique provoqués par le mouvement de rotation de l'outil génèrent une quantité de chaleur suffisante pour chauffer le matériau à une température de l'ordre de 0,75 fois la température de fusion exprimée en Kelvin. Ensuite, un mouvement de translation longitudinale est appliqué à l'outil. La matière sous l'épaulement est alors sujette à une extrusion/forgeage induite par les mouvements d'avance et de rotation de l'outil créant ainsi la liaison par diffusion à l'interface des deux tôles à souder.

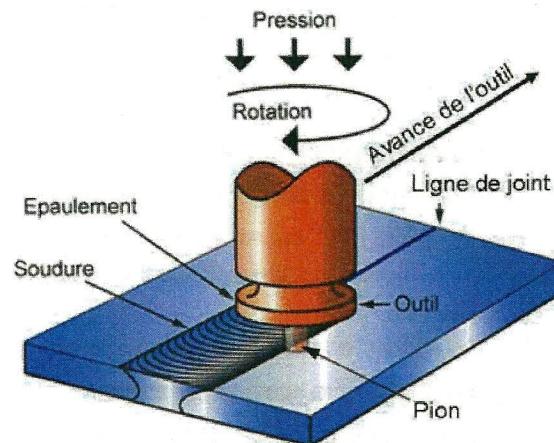


Figure 15 : schéma du procédé de soudage par friction malaxage (extrait de CES EduPack).

L'objectif de cette partie est de développer une modélisation thermique simplifiée du procédé de soudage par friction malaxage qui permette de répondre à la fonction FS4. Ce modèle doit permettre d'effectuer un contrôle, en temps réel, des paramètres de soudage (vitesse d'avance V_f et vitesse de rotation N) qui seront intégrés dans un simulateur afin de vérifier la compatibilité du processus avec la structure matérielle et de commande de la machine VERNE.

Une opération de soudage par FSW s'effectue en 4 phases (voir figure 16). (a) La première phase consiste à descendre l'outil entraîné en rotation N dans la matière. Durant la seconde phase (b), l'outil, toujours en rotation, est maintenu sur place afin de préchauffer la matière. Puis vient la phase de soudage (c) proprement dite pendant laquelle on impose un mouvement longitudinal à l'outil de vitesse V_f , appelée vitesse d'avance, afin de créer la liaison suivant toute la ligne de joint des deux tôles. La dernière phase, la phase de retrait (d), consiste à retirer l'outil suivant un mouvement perpendiculaire aux tôles. Cette dernière opération laisse derrière elle l'empreinte de l'outil appelée « trou de sortie ».

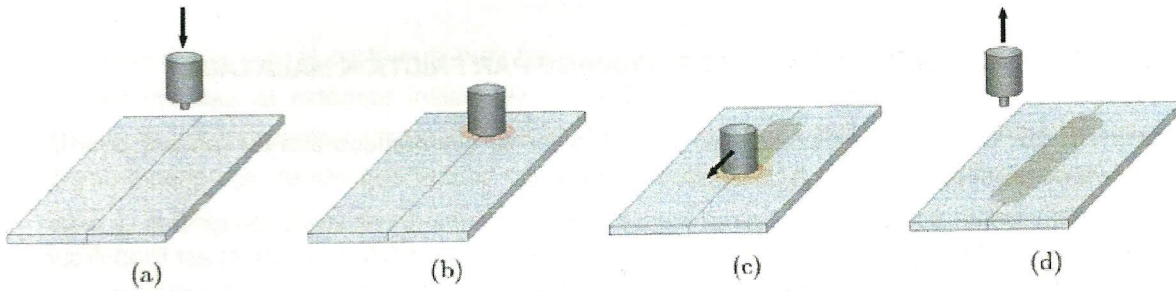


Figure 16 : chronologie d'une opération de soudage par friction malaxage - (a) phase de plongée, (b) phase de préchauffage, (c) phase de soudage et (d) phase de retrait.

Étude préliminaire : modèle thermique de source de chaleur ponctuelle et instantanée

On considère un milieu infini tridimensionnel dont la température initiale est uniforme, égale à T_0 . Une source ponctuelle localisée en (ξ_1, ξ_2, ξ_3) libère instantanément à l'instant initial ($t = 0$) une quantité de chaleur $Q = Q\delta(t)$ (joules). L'évolution de la température T au cours du temps en un point M de coordonnées (x_1, x_2, x_3) est régie par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \rho c \frac{dT}{dt} = -\text{div}(\vec{q}) + Q\delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2)\delta(x_3 - \xi_3)\delta(t), & -\infty < x_i < +\infty \\ \vec{q} = -k\text{grad}(T) \\ \lim_{x_i \rightarrow \pm\infty} (T) = T_0 \quad i=1,2,3 \\ T = T_0 \text{ à } t = 0 \text{ en } (x_1, x_2, x_3) \neq (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{cases}$$

où ρ désigne la masse volumique du matériau, c sa capacité thermique massique, \vec{q} le vecteur flux de chaleur et k la conductivité thermique du milieu qui est supposée constante et uniforme.

Question 27 : Montrer que le système précédent est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \Delta \theta + \frac{1}{\rho c} Q \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) \delta(x_3 - \xi_3) \delta(t) \\ \lim_{x_i \rightarrow \pm\infty} (\theta) = 0 \quad i=1,2,3 \\ \theta = 0 \text{ à } t = 0 \text{ en } (x_1, x_2, x_3) \neq (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{cases}$$

Quelles sont les expressions de θ et de α ?

Question 28 : On admet que si $\theta_i(x_i), i \in \{1,2,3\}$ est solution des problèmes associés :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \alpha \Delta \theta_i + \delta(x_i - \xi_i) \delta(t) \\ \lim_{x_j \rightarrow \pm\infty} (\theta_j) = 0 \quad j=1,2,3 \\ \theta_i = 0 \text{ à } t = 0 \text{ en } (x_1, x_2, x_3) \neq (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{cases}, \quad i \in \{1,2,3\}$$

alors $\theta(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{Q}{\rho c} \theta_1(x_1, t) \theta_2(x_2, t) \theta_3(x_3, t)$ est solution du problème 3D.

En utilisant la transformée de Laplace sur t (voir annexe), déterminer la solution du problème associé à la variable i :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \alpha \Delta \theta_i + \delta(x_i - \xi_i) \delta(t) \\ \lim_{x_j \rightarrow \pm\infty} (\theta_i) = 0 \quad j=1,2,3 \\ \theta_i = 0 \text{ à } t=0 \text{ en } (x_1, x_2, x_3) \neq (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{cases}$$

Question 29 : En déduire que la réponse impulsionnelle du problème 3D s'écrit :

$$T(x_1, x_2, x_3, t) - T_0 = \frac{Q}{8\rho c (\pi\alpha t)^{3/2}} e^{-\left[\frac{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}{4\alpha t} \right]}$$

Modèle thermique de source de chaleur ponctuelle, continue et mobile

On considère maintenant que la source de chaleur ponctuelle est mobile à la vitesse u dans la direction x_1 . Cette source évacue de façon continue au cours du temps un flux de chaleur \dot{Q} (en W). La solution de ce problème peut être obtenue en intégrant au cours du temps la solution correspondant à une source ponctuelle instantanée mobile.

Question 30 : On se place dans le repère de la source mobile (voir figure 17). On note (X_1, x_2, x_3) la position d'un point M dans ce repère. La source dont la position est repérée par $(\xi_1(t), 0, 0)$ émet de la chaleur à partir de l'instant initial $t=0$. Montrer que la surchauffe en un point M situé en (X_1, x_2, x_3) à l'instant t induite par la quantité de chaleur $\dot{Q}dt_i$ émise par une source ponctuelle instantanée à un instant t_i , tel que $t_i > t$ s'écrit :

$$T(X_1, x_2, x_3, t) - T_0 = \frac{\dot{Q}dt_i}{8\rho c (\pi\alpha)^{3/2}} \frac{1}{(t-t_i)^{3/2}} e^{-\left[\frac{(X_1 + u(t-t_i))^2 + x_2^2 + x_3^2}{4\alpha(t-t_i)} \right]}$$

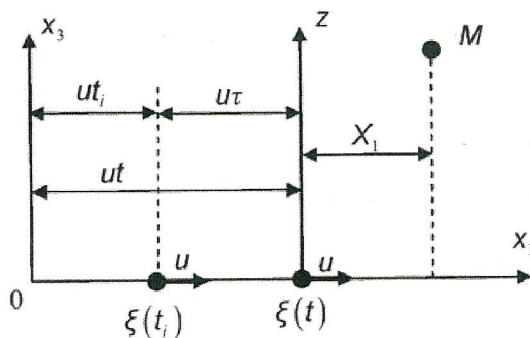


Figure 17 : passage du repère fixe au repère mobile attaché à la source de chaleur à l'instant.

Question 31 : En déduire que la surchauffe en un point M situé en (X_1, x_2, x_3) à l'instant t , induite par la quantité de chaleur émise par la source mobile, entre l'instant initial et un instant t quelconque s'écrit :

$$T(X_1, x_2, x_3, t) - T_0 = \frac{\dot{Q}}{2Rk(\pi)^{3/2}} e^{-\frac{uX_1}{2\alpha}} \int_{R/2\sqrt{\alpha t}}^{\infty} e^{\left(-\xi^2 + \frac{u^2 R^2}{16\alpha^2 \xi^2}\right)} d\xi$$

avec $R^2 = X_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Question 32 : Montrer qu'en régime stationnaire la surchauffe en un point M repéré par (X_1, x_2, x_3) se stabilise à :

$$T(X_1, x_2, x_3) - T_0 = \frac{\dot{Q}}{4\pi k R} e^{\left(-\frac{u(R-X_1)}{2\alpha}\right)}$$

Remarque : on pourra utiliser le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}$$

Question 33 : Il est raisonnable de considérer en première approximation, que lors du procédé de soudage, le plan supérieur ($x_3 = 0$) est thermiquement isolé (voir figure 18). Si l'on note \dot{Q}_t le flux de chaleur dissipé par les frottements entre l'outil et la matière, déduire de la question précédente la surchauffe en un point M de coordonnées (X_1, x_2, x_3) .

Application au cas du soudage par friction malaxage

Question 34 : Le frottement entre l'outil et la matière est modélisé par une loi de Tresca : $\sigma_t = \bar{m} \tau_e$ où σ_t , \bar{m} et τ_e désignent respectivement la contrainte tangentielle, le coefficient de frottement de Tresca ($0 < \bar{m} \leq 1$) et la limite d'élasticité en cisaillement du matériau.

On note $\dot{Q} = \int_S \sigma_t v ds$ le flux de chaleur moyen généré par le frottement de la matière sur la surface S de l'outil. En déduire l'expression des flux de chaleur \dot{Q}_1 , \dot{Q}_2 et \dot{Q}_3 (voir figure 18). en fonction de D_p , D_e , h , N , \bar{m} .

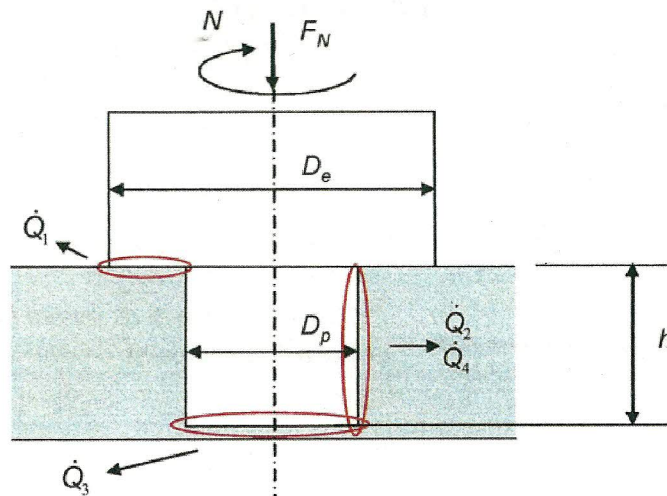


Figure 18 : flux de chaleur induits par la rotation de l'outil.

Question 35 : La présence du filet sur la surface du pion induit un mouvement de bas en haut de la matière. On note p le pas du filet. Calculer le flux de chaleur \dot{Q}_4 généré par la présence du filet en fonction de D_p , h , \bar{m} , τ_e , p et N .

Question 36 : On note \dot{Q}_t le flux de chaleur globalement générée par l'outil. Exprimer en pourcentage les rapports \dot{Q}_1 / \dot{Q}_t , \dot{Q}_2 / \dot{Q}_t , \dot{Q}_3 / \dot{Q}_t et \dot{Q}_4 / \dot{Q}_t . En déduire, en faisant les simplifications nécessaires, l'expression de \dot{Q}_t en fonction de \bar{m} , τ_e , N .

A.N. : $D_e=18$ mm, $D_p=6$ mm, $h=4$ mm et $p=1$ mm.

Question 37 : On choisit de modéliser l'outil de FSW par un point source \dot{Q}_t mobile, avançant à la vitesse u dans la direction x_1 (voir figure 19). On suppose que l'expression de la température obtenue dans la partie préliminaire est raisonnable pour modéliser l'opération de soudage par FSW si on calcule la température à une distance au moins supérieure au diamètre de l'épaulement. Pour que le soudage puisse avoir lieu il faut que la température de la matière à la périphérie de l'épaulement soit aux environs de 0,75 fois la température de fusion (T_f) du matériau à souder exprimée en Kelvin.

Proposer une façon d'adapter les paramètres de soudage afin de maintenir la température à $0,75.T_f$. Préciser en quoi cette modélisation permet de répondre aux exigences de la fonction FS4.

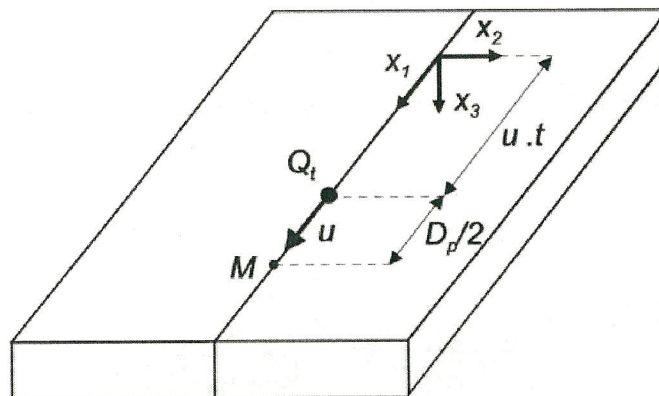


Figure 19 : modélisation thermique du procédé de FSW.

ANNEXES

A1. Annexe de la partie 1

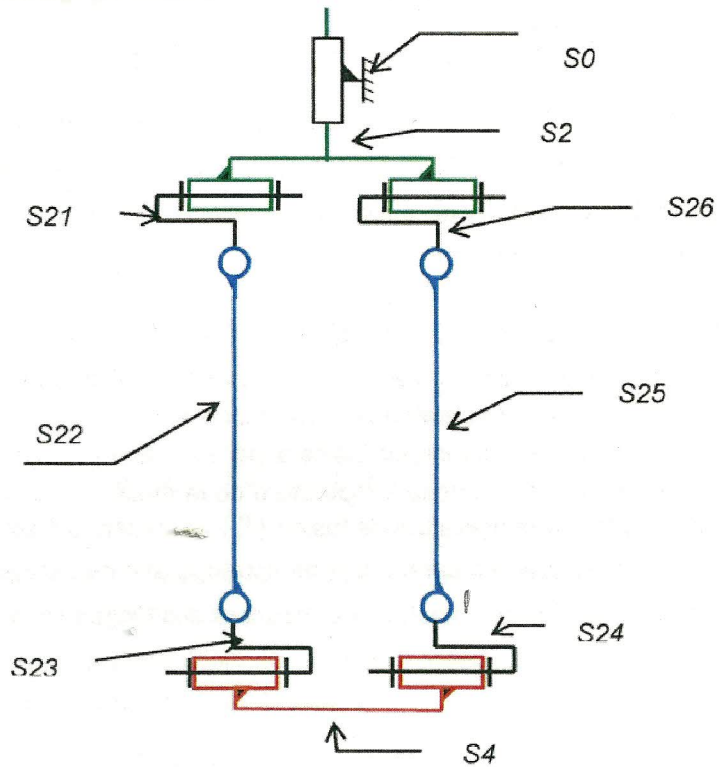


Figure 20 : schéma cinématique de la structure parallélogramme du chariot 2.

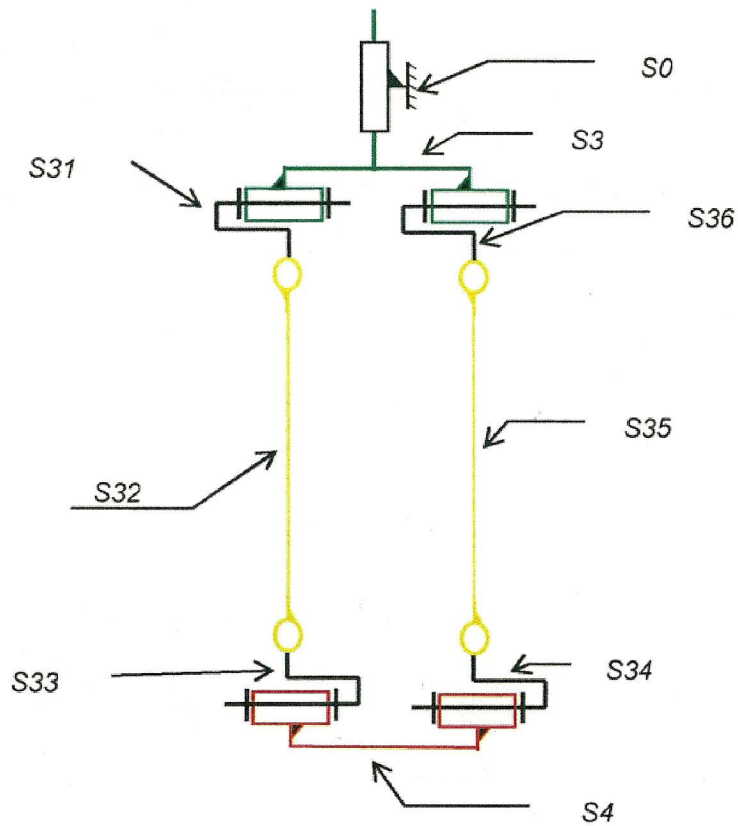


Figure 21 : schéma cinématique de la structure parallélogramme du chariot 3.

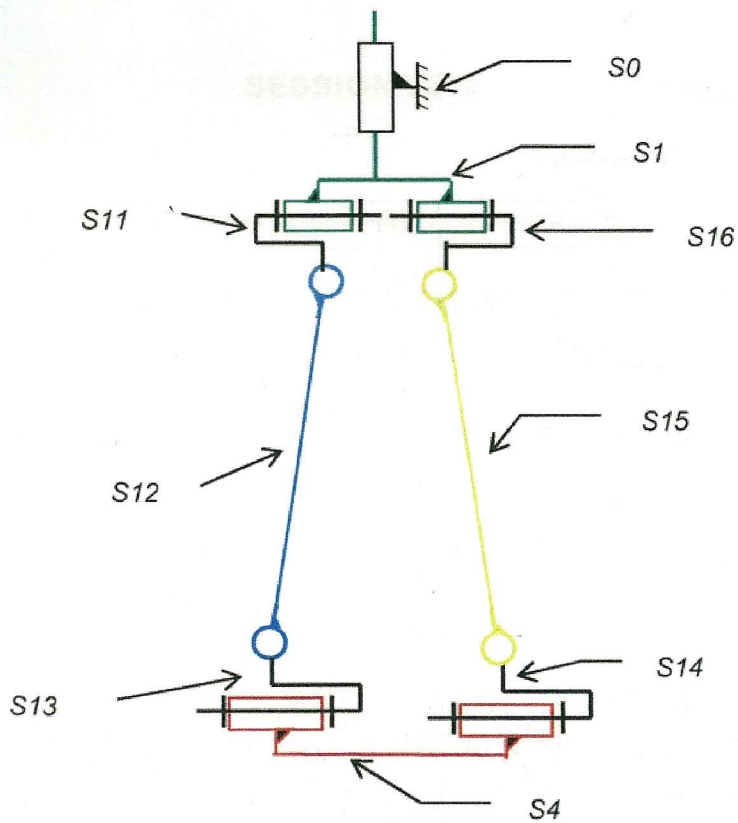


Figure 22 : schéma cinématique de la structure trapèze du chariot 1.

A2. Annexe de la partie 2

- Gradient d'une fonction scalaire : $f(r, \theta, z)$

$$\overline{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \bar{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{e}_z$$

- Divergence d'un tenseur : $\bar{\sigma}(r, \theta, z)$

$$\begin{aligned} \overline{\text{div}}(\bar{\sigma}) = & \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \bar{e}_r \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{\theta r}}{r} \right) \bar{e}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} \right) \bar{e}_z \end{aligned}$$

- Gradient d'un vecteur : $\bar{U}(r, \theta, z) = U_r \bar{e}_r + U_\theta \bar{e}_\theta + U_z \bar{e}_z$

$$\overline{\text{grad}}(\bar{U}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} & \frac{\partial U_r}{\partial z} \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} & \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial U_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

A3. Annexe de la partie 3

Quelques transformées de Laplace :

$F(p)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{p}$	$H(t)$
$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{p^{3/2}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
$\frac{1}{p^n} (n > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1}$
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - ae^{-a^2 \operatorname{erfc}(a\sqrt{t})}$
$e^{-a\sqrt{p}} (a > 0)$	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$
$\frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}} (a \geq 0)$	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}} (a \geq 0)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$