

# Éléments de correction de l'épreuve d'admissibilité de mécanique générale et des milieux déformables

**Question 1 :** Montrer que la puissance électrique volumique, dissipée par effet Joule, générée dans le fil de contact s'écrit

$q_p = \frac{U^2}{\rho_e l^2}$  où  $U$  représente la tension transportée dans le fil,  $\rho_e$  la résistivité électrique et  $l$  la longueur d'un tronçon de fil. Pour cela on supposera que le flux de courant est homogène.

$$P = UI \quad (1) \quad P = RI^2 = \rho_e \frac{l}{S_{section}} I^2 \quad (2)$$

$$q_p = \rho_e j^2 \quad (3) \quad I = j \cdot S_{section} \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow j = \frac{I}{S_{section}}$$

$$(3) \Rightarrow q_p = \rho_e \frac{I^2}{S_{section}^2}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow U \cdot I = \rho_e \frac{l}{S_{section}} I^2 \quad \rightarrow \quad I = \frac{S_{section}^2 U^2}{\rho_e l} \quad (3) \Rightarrow q_p = \frac{U^2}{\rho_e l^2}$$

**Question 2 :** Sachant que la résistivité électrique du fil de contact est  $\rho_e = 17.10^{-8} \Omega.m$ , calculer la puissance volumique  $q_p$  pour une longueur de canton  $l = 1 \text{ 200 m}$ .

$$q_p = \frac{(1,5.10^3)^2}{17.10^8 \cdot 1200}$$

**Question 3 :** En considérant un volume de contrôle homogène  $V$  à l'intérieur du fil, écrire la conservation de l'énergie pendant un temps  $dt$ . En appliquant la loi de Fourier ( $\vec{q} = -k \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T$ ), montrer que l'équation de conduction s'écrit :

$k \cdot \Delta T + q_p \cdot = \rho \cdot C \cdot \frac{dT}{dt}$  (E) en supposant que l'énergie reçue dans le fil de contact ne l'est que par conduction.

où  $k = 382 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  : conductivité thermique du fil de contact

$\Delta T$  : Laplacien de la température

$\rho = 8940 \text{ kg.m}^{-3}$  : masse volumique du fil

$C = 0,38 \text{ kJ.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  : capacité calorifique du fil

$T(r)$  : température du fil variant selon le rayon  $r$

$\frac{dT}{dt}$  : taux de température dans le fil en fonction du temps.

Conservation de l'énergie

Énergie reçue par conduction dans le volume $V$ pendant $dt$ (1)	+ Énergie produite dans $V$ pendant $dt$ (2)	+ Énergie reçue de l'extérieur autrement que par conduction dans $V$ pendant $dt$ (3)	= Élévation de l'énergie interne de $V$ pendant $dt$ (4)
---	---	--	---

(1) = Énergie reçue par conduction =  $\int_{S_i} \vec{q} \cdot \vec{n}_i dS - \int_{S_e} \vec{q} \cdot \vec{n}_e dS$  avec  $S_i$  : parties de la surface  $S$  (du volume  $V$ ) où la normale est dirigée vers l'intérieur et  $S_e$  : parties de la surface  $S$  (du volume  $V$ ) où la normale est dirigée vers l'extérieur.

Soit  $q_p$  le débit de chaleur produit dans le volume  $V$  :

$$(2) = \text{Énergie produite} = \int_V q_p dV$$

(3) = Pas de terme (3) si l'on ne considère que les échanges par conduction sinon (3) = Énergie reçue par convection =  $h \cdot S(T - T_\infty)$

Soit  $E_0$  l'énergie interne du volume  $V$  :

$$(4) = \frac{dE_0}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \int_V \rho e_0 dV \right\} \text{ avec } \rho \text{ la masse volumique et } e_0 \text{ l'énergie interne de l'unité de masse}$$

$$\frac{dE_0}{dt} = \int_V \frac{d}{dt} (\rho e_0 dV) \text{ car le milieu est au repos}$$

$$\frac{dE_0}{dt} = \int_V \rho \frac{de_0}{dt} dV \text{ car } \rho = \text{cste}$$

D'après la première formule de Clapeyron  $de_0 = C_v dT + (1 - p)dV$  (ici  $dV = 0$ )

$$\frac{dE_0}{dt} = \int_V \rho C_v \frac{dT}{dt} dV = \rho C_v \int_V \frac{dT}{dt} dV$$

L'équation bilan s'écrit donc (si l'on ne considère que le cas où la normale est sortante)

$$- \int_{S_e} \vec{q} \cdot \vec{n}_e dS + \int_V q_p dV = \rho C_v \int_V \frac{dT}{dt} dV$$

D'après le théorème d'Ostrogradsky :  $\int_{S_e} \vec{q} \cdot \vec{n}_e dS = \int_V \text{div} \vec{q} dV$

$$- \int_V \text{div} \vec{q} dV + \int_V q_p dV = \rho C_v \int_V \frac{dT}{dt} dV$$

d'où l'équation ponctuelle de la conduction :  $(-\text{div} \vec{q} + q_p - \rho C \frac{dT}{dt}) = 0$  et compte tenu de la loi de Fourier :

$$\text{div}(k \cdot \vec{\nabla} T) + q_p - \rho C_v \frac{dT}{dt} = 0 \text{ puisque } k \text{ n'est pas fonction de } T, \text{ alors l'équation bilan de la conservation de}$$

$$\text{l'énergie est : } k \cdot \Delta T + q_p - \rho C \frac{dT}{dt} = 0$$

**Question 4 :** Si l'on suppose que le régime permanent est atteint, simplifier l'équation (E) en considérant le problème comme monodimensionnel. Intégrer cette équation, écrire les conditions aux limites et montrer que le profil de température dans le fil s'écrit :

$$T(r) - T_s = \frac{q_p}{4k} (r_s^2 - r^2) \text{ avec } T_s \text{ température de surface du fil de contact et } r_s \text{ rayon externe du fil de contact.}$$

On suppose que l'énergie reçue ne l'est que par conduction. Cela implique que le milieu est au repos et que le corps n'est pas déformable. Dans ce cas, le terme (3) est nul.

En régime permanent : (E)  $\rightarrow k \cdot \Delta T + q_p = 0$

$$\text{En coordonnées cylindriques monodimensionnel : } \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = - \frac{q_p}{k}$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = - \frac{q_p}{k} r \text{ soit } r \frac{dT}{dr} = - \frac{q_p}{k} \frac{r^2}{2} + A$$

$$\text{en } r = 0 ; T \text{ finie } \Rightarrow \frac{dT}{dr} = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{q_p r}{k} \text{ soit } T = -\frac{q_p r^2}{2k} + B$$

$$\text{en } r = r_s \quad T = T_s \quad \Rightarrow \quad T_s = -q_p \frac{r_s^2}{4} + B \Rightarrow \quad B = T_s + \frac{q_p r_s^2}{4}$$

$$\text{Donc } T(r) = \frac{q_p}{4k} (r_s^2 - r^2) + T_s$$

**Question 5 :** Calculer la différence de température entre le centre et la périphérie du fil de contact ( $T(r=0) - T_s$ ). Conclure.

$$T(r) - T_s = \frac{q_p}{4k} (r_s^2 - r^2) \text{ d'où } T(r=0) - T_s = \frac{q_p}{4k} r_s^2$$

A.N. :  $T(r=0) - T_s = 0,866 \text{ K}$  [Négligeable donc  $T(r=0) = T_s$ ].

**Question 6 :** Si l'on suppose que :

- la surface externe du fil de contact est diffuse ;
- le soleil est assimilé à un corps noir à  $T_{sol} = 5800 \text{ K}$  et que l'environnement est très grand par rapport au fil, l'éclairement du soleil est  $E_{sol} = 800 \text{ W.m}^{-2}$  ;
- l'absorptivité totale de la surface vis-à-vis du rayonnement solaire est égale à  $\alpha_{sol} = 0,297$  ;
- l'absorptivité totale de la surface vis-à-vis du rayonnement provenant de l'environnement est égale à  $\alpha_{env} = 0,210$  ;
- l'émissivité totale hémisphérique de la surface du fil est constante et égale à  $\varepsilon_s = 0,270$ .

Montrer que le flux de rayonnement s'écrit :  $Q_{ray} = S(\varepsilon_s \sigma T_s^4 - \alpha_{sol} E_{sol} - \alpha_{env} \sigma T_{env}^4)$ .

Le flux de rayonnement (flux net) = Flux émis - Flux absorbé

Avec flux absorbé = Flux émis par le soleil et atteignant le fil + Flux émis par l'environnement et atteignant le fil

$$\text{Donc : Flux de rayonnement} = S(\varepsilon_s M_s^0 - \alpha_{sol} E_{sol} - \alpha_{env} E_{env})$$

Par définition,  $M_s^0 = \sigma T_s^4$  et puisque l'environnement est très grand par rapport au fil, on dit qu'il règne un rayonnement de corps noir et donc  $E_{env} = \sigma T_{env}^4$

$$\text{D'où : } Q_{ray} = S(\varepsilon_s \sigma T_s^4 - \alpha_{sol} E_{sol} - \alpha_{env} \sigma T_{env}^4)$$

**Question 7 :** Écrire le flux de chaleur par convection.

$$Q_{conv} = hS(T_s - T_\infty)$$

**Question 8 :** Écrire l'équation de bilan thermique sur le fil de contact.

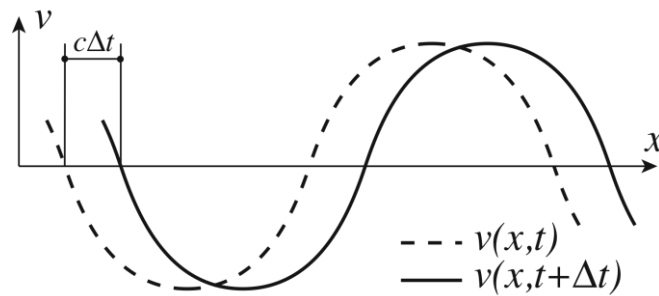
$$\text{Bilan thermique : } Q = S\varepsilon_s \sigma T_s^4 - S\alpha_{sol} E_{sol} - S\alpha_{env} \sigma T_{env}^4 + hS(T_s - T_\infty) - q_p \cdot V$$

**Question 9 :** Trouver la température d'équilibre de la surface externe du fil de contact  $T_s$ .

A l'équilibre  $Q = 0$ , d'où  $T_s^4 \cdot 1,5309 \cdot 10^{-8} + 10T_s - 3204,35 = 0$  soit  $T_s = 307 \text{ K} = 33^\circ\text{C}$ .

**Question 10 :** Montrer par un schéma que  $c$  représente une vitesse de propagation et qu'il s'agit bien d'une onde progressive (se déplaçant dans le sens des  $x$  croissants).

La figure ci-dessous trace l'évolution de  $v(x,t)$  à deux instants consécutifs proches ( $t$  et  $t + \Delta t$ ) ce qui permet d'observer un décalage de  $c\Delta t$  de l'onde dans le sens des  $x$  croissants.



**Question 11 : Expliquer l'absence de moment fléchissant.**

La corde ne possède pas de raideur en flexion, le tronçon  $x^+$  ne peut donc transmettre de moment fléchissant autour de  $\bar{z}$ .

**Question 12 : Ecrire l'équilibre dynamique du tronçon de fil  $dx$  en résultante selon  $\bar{y}$  et en moment autour de  $\bar{z}$ . En retenant  $\theta$  petit, montrer que cela permet de déduire l'équation de mouvement (S est la section du fil) :**

$$F \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{Équation 2}$$

Sachant que  $\theta \ll 1$ , on se limite aux termes du premier ordre soit :

$$\text{Résultante // } \bar{y} : F(\theta + d\theta) - F\theta + T(x + dx) - T(x) = \rho S dx \frac{d^2 v}{dt^2} \Rightarrow F \frac{d\theta}{dx} + \frac{dT}{dx} = \rho S \frac{d^2 v}{dt^2}$$

Moment en  $G$  //  $\bar{z}$  :  $T(x + dx).dx = 0$  et donc  $T(x + dx) = T(x) = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = 0$  ce qui, avec  $\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$ , permet d'aboutir à l'équation 2.

**Question 13 : En déduire la vitesse critique  $V_C^{\text{Corde}}$  due à la propagation des ondes pour le mouvement harmonique décrit par l'Equation 1.**

Pour obtenir  $V_C^{\text{Corde}}$  il suffit de reporter la forme de l'onde (équation 1) dans l'équation 2 pour avoir :

$$v_M F \left( \frac{\omega}{V_C^{\text{Corde}}} \right)^2 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{V_C^{\text{Corde}}} x\right) = v_M \rho S \omega^2 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{V_C^{\text{Corde}}} x\right) \text{ soit } V_C^{\text{Corde}} = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}$$

**Question 14 : Que garantit en termes de déformation la relation  $\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$  ?**

Une déformation de cisaillement transverse nul :  $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} - \theta = 0$

**Question 15 : Donner la loi de comportement reliant le moment fléchissant  $M$  à la dérivée seconde de la flèche  $v$ . Le moment d'inertie de la section du fil de contact autour de l'axe  $(G, \bar{z})$  est noté  $I$ .**

$$M = EI \frac{d^2 v}{dx^2}$$

**Question 16 : Si on néglige l'inertie en rotation des sections droites, écrire l'équilibre dynamique du tronçon de poutre  $dx$  en résultante selon  $\bar{y}$  et en moment autour de  $\bar{z}$ . Montrer que la prise en compte de la réponse à la question précédente conduit à :**

$$F \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{Équation 3}$$

L'écriture de l'équilibre du tronçon de poutre de la figure 6 donne :

$$\text{Résultante // } \vec{y} : F \frac{d\theta}{dx} + \frac{dT}{dx} = \rho S \frac{d^2 v}{dt^2}$$

$$\text{Moment en } G \text{ // } \vec{z} : \frac{dM}{dx} + T = 0$$

Ainsi en remplaçant  $T$  par  $-\frac{dM}{dx}$  dans l'équation en résultante et en tenant compte de la relation de comportement on aboutit, avec  $\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$ , à l'équation 3.

**Question 17 : En déduire  $V_c^{EB}$  la vitesse critique due à la propagation des ondes pour le mouvement harmonique décrit par Equation 1.**

Pour obtenir  $V_c^{EB}$  il suffit, comme précédemment, de reporter la forme de l'onde (équation 1) dans l'équation 3 pour avoir :

$$F(V_c^{EB})^2 + EI\omega^2 = \rho S(V_c^{EB})^4 \text{ soit } V_c^{EB} = \sqrt{\frac{F}{2\rho S}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{4EI\rho S\omega^2}{F^2}}}$$

**Question 18 : Comparer les 3 modèles. Proposer une démarche du choix de la tension  $F$  pour une vitesse de croisière de 270 km/h.**

Les trois modèles donnent des vitesses de propagation similaires pour  $f < 33\text{Hz}$ . Au delà, on observe une augmentation de la vitesse de propagation pour les deux modèles poutre. Le modèle de corde n'est donc plus valable pour  $f \gg 33\text{Hz}$ .

Une fréquence naturelle d'excitation sera donnée par la distance entre pendules. La fréquence de 33Hz sera atteinte pour une vitesse du TGV de  $L^p.f_c = 74\text{ms}^{-1}$  soit  $267\text{km/h}$ . Pour une fréquence de  $f < 100\text{Hz}$ , la différence entre les modèles reste réduite et la vitesse correspondante du TGV devrait être de  $800\text{km/h}$ . On peut donc dire que pour la gamme de fréquence liée au passage du TGV sous les pendules le modèle de corde est suffisant pour estimer la vitesse de propagation des ondes dans le fil de contact. Ce modèle peut donc être utilisé pour déterminer  $F$ . Si on souhaite garder une marge de 50 km/h sur la vitesse cible de 270 km/h il faudra ainsi appliquer une tension de 1080 daN.

Par ailleurs, pour le modèle de poutre mince la vitesse de propagation tend vers l'infini lorsque la fréquence croit. Ceci n'est pas physique. Le modèle de poutre épaisse n'a pas ce défaut et devra donc être utilisé pour les hautes fréquences (fréquences supérieures à  $10^4\text{Hz}$ ).

**Question 19 : Lors du dernier record de vitesse le TGV a atteint 574,8 km/h. Pour établir ce record la tension du fil de contact a été portée à 4000 daN. Commenter ce choix.**

On reste sur le modèle de corde qui donne comme vitesse de propagation  $173\text{ms}^{-1}$  soit  $623\text{km/h}$ . Il ya donc une marge de  $49\text{km/h}$  qui est très proche de la valeur proposée.

**Question 20 : Écrire la contribution  $E_c^e$  de l'élément  $e$  à l'énergie cinétique galiléenne totale du modèle. L'inertie en rotation des sections sera négligée.**

L'énergie cinétique pour une poutre mince de longueur  $L_e$  est donnée par :

$$E_c^e = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho S \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + I_x \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right)^2 + I_y \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial t} \right)^2 + I_z \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial t} \right)^2 dx$$

On néglige les effets dynamiques longitudinaux et l'inertie en rotation des sections d'où finalement :

$$E_c^e = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho S \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx$$

**Question 21 : Justifier cette expression.**

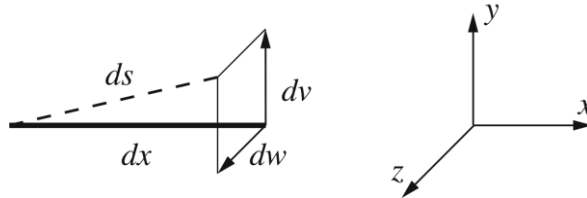
L'énergie de déformation pour une poutre mince est donnée par :

$$E_D^e = \frac{1}{2} \int_{e^e} ES \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + EI_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + EI_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + GJ \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx + E_D^e(F)$$

où  $E_D^e(F)$  est la partie de l'énergie de déformation provenant de la tension  $F$ .

$E_D^e(F)$  peut se déterminer à partir du travail de  $F$  :  $E_D^e(F) = \int_{e^e} dW$  où  $dW = F(ds - dx)$

avec  $ds$  l'élément de longueur résultant de la déformation d'un l'élément de longueur  $dx$  suite à un déplacement transverse  $dv$  selon  $\bar{y}$  et  $dw$  selon  $\bar{z}$  (voir schéma ci-dessous).



Comme  $ds^2 = dx^2 + dv^2 + dw^2$ , il vient  $ds = dx \sqrt{1 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2} \approx dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right]$

on en déduit :  $E_D^e(F) = \int_{e^e} F \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx$ .

En négligeant la partie en flexion autour de  $\bar{y}$  ( $EI_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 = 0$ ) car on a un modèle de corde dans le plan  $(\bar{x}, \bar{z})$

et en négligeant la torsion du fil ( $GJ \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 = 0$ ) on aboutit à l'expression attendue pour  $E_D^e$ .

**Question 22 : Exprimer le travail développé par la pesanteur sur l'élément  $e$ .**

On a simplement :  $W_{Pes} = \int_{e^e} (-\rho S g \bar{y}) \cdot \bar{U} dx = -\rho S g \int_{e^e} v dx$ .

$\bar{U}$  est le déplacement du point courant de la ligne de référence ( $\bar{U} = u\bar{x} + v\bar{y} + w\bar{z}$ ).

**Question 23 : Montrer que l'interpolation choisie permet bien d'avoir continuité de la pente le long du fil de contact.**

Soient deux éléments consécutifs  $e^a$  et  $e^b$ .  $e^a$  est connecté aux 2 nœuds  $n_1$  et  $n_2$ , et  $e^b$  est connecté aux nœuds  $n_2$  et  $n_3$ . La pente sur  $e^a$  en  $n_2$  vaut :

$$\left( \frac{\partial v^a}{\partial x} \right)_{(x^a=L_a)} = \frac{1}{L_a} \left( \frac{\partial v^a}{\partial \bar{r}} \right)_{(\bar{r}=1)} = \left[ \frac{1}{L_a} \left( \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{r}} \right) v_1 + \left( \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{r}} \right) \theta_1 + \frac{1}{L_a} \left( \frac{\partial \psi_5}{\partial \bar{r}} \right) v_2 + \left( \frac{\partial \psi_6}{\partial \bar{r}} \right) \theta_2 \right]_{(\bar{r}=1)} = \theta_2$$

et la pente sur  $e^b$  en  $n_2$  vaut :

$$\left( \frac{\partial v^b}{\partial x} \right)_{(x^b=0)} = \frac{1}{L_b} \left( \frac{\partial v^b}{\partial \bar{r}} \right)_{(\bar{r}=0)} = \left[ \frac{1}{L_b} \left( \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{r}} \right) v_2 + \left( \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{r}} \right) \theta_2 + \frac{1}{L_b} \left( \frac{\partial \psi_5}{\partial \bar{r}} \right) v_3 + \left( \frac{\partial \psi_6}{\partial \bar{r}} \right) \theta_2 \right]_{(\bar{r}=0)} = \theta_2$$

Ces deux pentes sont identiques, il y a donc continuité de la pente au passage des éléments. Par ailleurs sur chaque élément  $v$  a une forme polynomiale, il en va donc de même pour sa dérivée et la pente est donc également continue sur l'élément, elle est donc continue tout le long du fil de contact.

**Question 24 : Préciser le contenu des matrices  $\underline{\underline{N}}_e$  et  $\underline{\underline{B}}_e$ .**

$$\text{On a } \underline{U}_e = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_3 & 0 & \psi_4 & 0 & \psi_5 & 0 & \psi_6 \\ 0 & 0 & \psi_1 & 0 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 \end{bmatrix} \underline{q}_e = \underline{N}_e \underline{q}_e$$

Par ailleurs sachant que  $r = \frac{x}{L_e}$  il vient  $\frac{\partial \cdot}{\partial x} = \frac{1}{L_e} \frac{\partial \cdot}{\partial r}$ , on a ainsi :

$$\underline{\varepsilon}_e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_e} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \psi_2}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \psi_4}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \psi_5}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \psi_6}{\partial r} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_1}{\partial r} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \psi_2}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_e} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial r^2} & 0 & \frac{1}{L_e} \frac{\partial^2 \psi_4}{\partial r^2} & 0 & \frac{1}{L_e} \frac{\partial^2 \psi_5}{\partial r^2} & 0 & \frac{1}{L_e} \frac{\partial^2 \psi_6}{\partial r^2} \end{bmatrix} \underline{q}_e = \underline{B}_e \underline{q}_e$$

Après calcul  $\underline{B}_e$  vaut :

$$\underline{B}_e = \frac{1}{L_e} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6r + 6r^2 & 0 & L_e(1 - 4r + 3r^2) & 0 & 6r - 6r^2 & 0 & L_e(-2r + 3r^2) \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{6}{L_e}(-1 + 2r) & 0 & -4 + 6r & 0 & \frac{6}{L_e}(1 - 2r) & 0 & -2 + 6r \end{bmatrix}$$

**Question 25 :** Calculer la colonne élémentaire des efforts généralisés dus à l'action de la pesanteur.

$$\text{On a } W_{\text{pes}} = -\rho S g \int_0^{L_e} v dx = -\rho S g \int_0^1 v L_e dr$$

En introduisant l'interpolation de  $v$  il vient :

$$W_{\text{pes}} = -\rho S g L_e \int_0^1 \underline{q}_e^T \begin{Bmatrix} 0 \\ \psi_3 \\ 0 \\ \psi_4 \\ 0 \\ \psi_5 \\ 0 \\ \psi_6 \end{Bmatrix} dr = \underline{q}_e^T (-\rho S g L_e) \int_0^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ \psi_3 \\ 0 \\ \psi_4 \\ 0 \\ \psi_5 \\ 0 \\ \psi_6 \end{Bmatrix} dr = \underline{q}_e^T \underline{Q}_e^{\text{pes}} \quad \text{soit } \underline{Q}_e^{\text{pes}} = -\rho S g L_e \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

**Question 26 :** Montrer que la matrice de raideur élémentaire est décomposable en une somme de 3 matrices :

- $\underline{K}_e^L$  provenant des déformations longitudinales ;
- $\underline{K}_e^F$  provenant de l'effort de tension  $F$  ;
- $\underline{K}_e^M$  provenant de la flexion.

Exprimer, *sans effectuer les calculs*, ces matrices élémentaires en fonction de  $E, S, F, I, L_e$  et des termes de  $\underline{B}_e$  (ne pas développer les produits des lignes de  $\underline{B}_e$  entre elles).

En introduisant l'interpolation dans l'expression de l'énergie de déformation cette dernière peut se mettre sous la forme :  $E_D = \frac{1}{2} \underline{q}_e^T \cdot \left[ \underline{K}_e^L + \underline{K}_e^F + \underline{K}_e^M \right] \underline{q}_e$  avec :

$$\underline{K}_e^L = ES \int \underline{B}_{e,1} \underline{B}_{e,1}^T L_e dr, \quad \underline{K}_e^F = F \int (\underline{B}_{e,2} \underline{B}_{e,2}^T + \underline{B}_{e,3} \underline{B}_{e,3}^T) L_e dr \quad \text{et} \quad \underline{K}_e^M = EI \int \underline{B}_{e,4} \underline{B}_{e,4}^T L_e dr$$

où les termes  $\underline{B}_{e,i}^T$  sont les  $i^{\text{èmes}}$  lignes de la matrice  $\underline{B}_e$  :

$$\underline{B}_{e,1}^T = 1/L_e \langle -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \rangle$$

$$\underline{B}_{e,2}^T = 1/L_e \langle 0 \ -6r+6r^2 \ 0 \ L_e(1-4r+3r^2) \ 0 \ 6r-6r^2 \ 0 \ L_e(-2r+3r^2) \rangle$$

$$\underline{B}_{e,3}^T = 1/L_e \langle 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \rangle$$

$$\underline{B}_{e,4}^T = 1/L_e \left\langle 0 \ \frac{6}{L_e}(-1+2r) \ 0 \ -4r+6r \ 0 \ \frac{6}{L_e}(1-2r) \ 0 \ -2+6r \right\rangle$$

**Question 27 : D'où provient généralement le phénomène de battement ? Peut-on donner une piste d'explication à la présence du battement visible sur la figure 10.**

Les phénomènes de battement s'observent lorsque qu'un système possède des fréquences propres voisines ce qui est visiblement le cas ici à la vue des valeurs des fréquences présentes sur la figure 10.

Il est possible de compléter cette réponse en utilisant d'avantage la figure 10 en notant que la superposition de deux signaux périodiques d'amplitude 1 et de pulsations respectives  $\omega_1$  et  $\omega_2$  a pour amplitude  $A(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) = 2 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$ .

En notant  $\Omega_1 = 2\pi F_1 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$  et  $\Omega_2 = 2\pi F_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  il vient :  $A(t) = 2 \cos(\Omega_2 t) \cos(\Omega_1 t)$

où  $\Omega_1$  est la pulsation de battement.

Pour le signal représenté figure 10,  $F_1 \approx 0,16\text{Hz}$  et  $F_2 \approx 2\text{Hz}$  ce qui donne :  $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \approx 1,08$  et  $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} \approx 0,92$  qui sont fréquences proches similaires aux fréquences propres des deux modes lignes 2 et 3, colonne de gauche de la figure 10.

**Question 28 : Montrer que l'utilisation de la base modale contenue dans  $\underline{X}$  permet de passer de l'équation 5 à l'équation 6 où  $\xi_i$  désigne le taux d'amortissement modal pour le mode  $i$ . Que représentent les  $\omega_i$  ? Relier les valeurs  $\xi_i$  à  $\beta$  et commenter la dépendance à  $\omega_i$ .**

Il est possible de calculer de façon approchée  $\underline{q}$  en le projetant dans la base modale  $\underline{X}$ . On a alors :

$$\underline{q}(t) \approx \underline{\tilde{q}}(t) = \underline{X} \cdot \underline{x}(t) \quad \text{avec} \quad \underline{x}^T(t) = \langle x_1(t) x_2(t) \dots x_n(t) \rangle.$$

En remplaçant  $\underline{q}$  par  $\underline{\tilde{q}}$  dans l'équation 5 et en multipliant à gauche par  $\underline{X}^T$  il vient :

$$\underline{X}^T \underline{M} \underline{X} \ddot{\underline{x}} + \underline{X}^T \underline{C} \underline{X} \dot{\underline{x}} + \underline{X}^T \underline{K} \underline{X} \underline{x} = \underline{X}^T \underline{F} \quad \text{Équation 6b}$$

Sachant que les modes propres sont orthogonaux vis à vis de la matrice de masse et de rigidité, et sachant que la matrice d'amortissement est proportionnelle à la matrice de raideur, les matrices  $\underline{X}^T \underline{M} \underline{X}$ ,  $\underline{X}^T \underline{C} \underline{X}$  et  $\underline{X}^T \underline{K} \underline{X}$  sont toutes les trois diagonales, la première étant égale à la matrice identité d'ordre  $n$  (modes normés vis à vis de la matrice de masse).

L'équation 6 correspond ainsi à la ligne  $i$  de l'équation 6b.

On en déduit en particulier que  $\omega_i^2 = \underline{X}_i^T \underline{K} \underline{X}_i$  où  $\omega_i$  est la pulsation propre associée au mode  $\underline{X}_i$ .

Enfin on en déduit également  $2\xi_i \omega_i = \underline{X}_i^T \underline{C} \underline{X}_i = \beta \underline{X}_i^T \underline{K} \underline{X}_i = \beta \omega_i^2$  soit  $\beta = \frac{2\xi_i}{\omega_i}$ .

Pour la forme d'amortissement choisie, le taux d'amortissement  $\xi_i$  est proportionnel à  $\omega_i$  : plus la pulsation croit, plus l'amortissement est important. Ainsi, avec ce modèle, plus les fréquences seront élevées, plus elles seront amorties.

**Question 29 : Déterminer la valeur de  $\xi_0$  à partir des données  $A(t_1)$ ,  $A(t_2)$ ,  $t_1$  et  $t_2$  présentes sur la figure 10. En déduire une valeur pour  $\beta$ .**



$$AN : A(t_1) = 0,0375 \text{ m}$$

$$A(t_2) = 0,0275 \text{ m}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 10 \text{ s}$$

En utilisant la forme donnée pour le signal mono-fréquentiel il vient :  $\frac{A(t_2)}{A(t_1)} = \frac{e^{-\xi_0 \omega t_2} \cos(\omega_0 t_2 + \varphi)}{e^{-\xi_0 \omega t_1} \cos(\omega_0 t_1 + \varphi)}$

Les mesures de  $A(t_1)$  et  $A(t_2)$  sont faites pour des amplitudes maximales du signal, on en déduit :  $\cos(\omega_0 t_2 + \varphi) = \cos(\omega_0 t_1 + \varphi) = 1$ .

$$\text{Il vient alors : } \frac{A(t_2)}{A(t_1)} = \frac{e^{-\xi_0 \omega t_2}}{e^{-\xi_0 \omega t_1}} = e^{-\xi_0 \omega (t_2 - t_1)}$$

$$\text{Ce qui permet de déduire finalement : } \xi_0 = \frac{\ln(A(t_2)/A(t_1))}{-2\pi f_0 \Delta t} \quad AN : \xi_0 = 0,0049 ; \quad \beta = 0,016$$

**Question 30 : Exprimer  $T(E/R_g)$  énergie cinétique galiléenne du système matériel E en utilisant comme paramètres cinématiques uniquement les variables  $\theta_{2R}$  et  $\theta_1$  et leurs dérivées temporelles.**

$$T(E/R_g) = T(1/R_g) + T(2/R_g)$$

$$\text{avec } T(1/R_g) = \frac{1}{2} m_1 V^2(G_1/R_g) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \text{ et } T(2/R_g) = \frac{1}{2} m_2 V^2(G_2/R_g) + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_{2R}^2$$

$$\vec{V}(G_1/R_g) = \left[ \frac{d\vec{AG}_1}{dt} \right]_{R0} = -L_{G1} \left[ \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R0} = -L_{G1} \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 \quad \vec{V}(G_2/R_g) = \left[ \frac{d\vec{AG}_2}{dt} \right]_{R0} = -L_1 \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 - L_{G2} \dot{\theta}_{2R} \vec{y}_2$$

$$\text{soit } T(E/R_g) = \frac{1}{2} (m_1 L_{G1}^2 + m_2 L_1^2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 L_{G2}^2) \dot{\theta}_{2R}^2 - m_2 L_1 L_{G2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{2R} \cos(\theta_1 - \theta_{2R})$$

**Question 31 : Déterminer le travail extérieur galiléen agissant sur E**

$$W_{EXT}(E/R_g) = \int M d\theta + \int F dy + g (m_1 L_{G1} + m_2 L_1) (\sin \theta_1 - \sin \theta_{10}) - m_2 g L_{G2} (\sin \theta_{2R} - \sin \theta_{2R0})$$

$$W_{EXT}(E/R_g) = \int_{\theta_{1i}}^{\theta_1} M d\theta + \int_{\theta_{2Ri}}^{\theta_{2R}} FL_1 \cos \theta_1 d\theta_1 - \int_{\theta_{2Ri}}^{\theta_{2R}} FL_2 \cos \theta_{2R} d\theta_{2R} + g (m_1 L_{G1} + m_2 L_1) (\sin \theta_1 - \sin \theta_{1i}) - m_2 g L_{G2} (\sin \theta_{2R} - \sin \theta_{2Ri})$$

$$W_{EXT}(E/R_g) = M(\theta_1 - \theta_{1i}) + FL_1 (\sin \theta_1 - \sin \theta_{1i}) - FL_2 (\sin \theta_{2R} - \sin \theta_{2Ri}) + g (m_1 L_{G1} + m_2 L_1) (\sin \theta_1 - \sin \theta_{1i}) - m_2 g L_{G2} (\sin \theta_{2R} - \sin \theta_{2Ri})$$

**Question 32 : Déterminer la puissance de dissipation visqueuse.**

$$P_D = \frac{1}{2} C_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} C_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{2R})^2$$

**Question 33 : A l'aide d'une fermeture géométrique, exprimer  $\theta_{2R}$  en fonction de  $\theta_1$  et des paramètres géométriques utiles sous la forme  $A(\theta_1) \cos(\theta_{2R} + \alpha_2) + B(\theta_1) \sin(\theta_{2R} + \alpha_2) = C(\theta_1)$ . Identifier  $A(\theta_1)$ ,  $B(\theta_1)$  et  $C(\theta_1)$ .**

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CE} + \vec{EA} = \vec{0} \text{ soit } -L_1 \vec{x}_1 - L'_2 \vec{u} + L_3 \vec{x}_3 + a \vec{x} + c \vec{z} = \vec{0}$$

$$-L_1 \cos \theta_1 - L'_2 \cos(\theta_{2R} + \alpha_2) + L_3 \cos \theta_3 + a = 0 \quad L_1 \sin \theta_1 + L'_2 \sin(\theta_{2R} + \alpha_2) - L_3 \sin \theta_3 + c = 0$$

$$L_1 \cos \theta_1 + L'_2 \cos(\theta_{2R} + \alpha_2) = a \quad L_1 \sin \theta_1 + L'_2 \sin(\theta_{2R} + \alpha_2) = c = L_3$$

$$2L'_2 \left[ L_1 \cos \theta_1 - a \cos(\theta_{2R} + \alpha_2) \right] + 2L'_2 \left[ L_1 \sin \theta_1 + c \sin(\theta_{2R} + \alpha_2) \right] = L_3^2 - L_1^2 - a^2 - c^2 - L_2^2 + 2L_1 a \cos \theta_1 - 2L_1 c \sin \theta_1$$

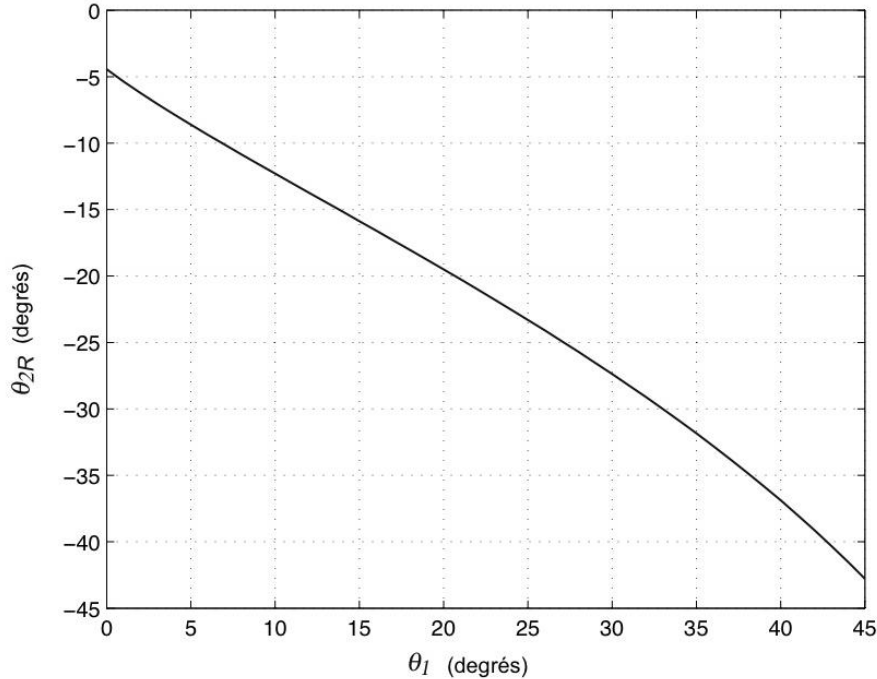
$$A(\theta_1) \cos(\theta_{2R} + \alpha_2) + B(\theta_1) \sin(\theta_{2R} + \alpha_2) = C(\theta_1)$$

On pose  $\cos \Phi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$   $\sin \Phi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$   $\cos \Psi = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$$\theta_{2R} = \text{Arc cos} \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \pm \text{Arc cos} \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \alpha_2$$

**Question 34 : Déterminer graphiquement les coefficients a et b pour  $0 < \theta_1 < 35^\circ$ .**

On obtient :



Le développement vertical du pantographe est donné par :  $z = l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin \theta_{2R}$  avec  $\theta_{2R} = a + b\theta_1$ , avec  $a = -0,0903 \text{ rad}$   $b = -0,724$ .

**Question 35 : Par la méthode de Lagrange, déterminer l'équation de mouvement du pantographe  $L\theta_1$ , notée (2). La prise en compte de la relation géométrique (1) se fera grâce à un multiplicateur de Lagrange noté  $\lambda$ .**

$$L_{\theta_1} : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = - \left( \frac{\partial P_D}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \text{ avec } L = T + W_{\text{ext}} - W_{\text{int}} + \lambda(\theta_{2R} - a - b\theta_1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left( m_1 L_{G_1}^2 + m_2 L_1^2 \right) \ddot{\theta}_1 - m_2 L_{G_2} L_1 \cos(\theta_1 - \theta_{2R}) \ddot{\theta}_{2R} + m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_{2R} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{2R}) \sin(\theta_1 - \theta_{2R})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_{\text{ext}}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = 0 \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_{\text{int}}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = 0 \text{ soit}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left( m_1 L_{G_1}^2 + m_2 L_1^2 \right) \ddot{\theta}_1 - m_2 L_{G_2} L_1 \cos(\theta_1 - \theta_{2R}) \ddot{\theta}_{2R} + m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_{2R} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{2R}) \sin(\theta_1 - \theta_{2R})$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \theta_1} \right) = m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{2R} \sin(\theta_1 - \theta_{2R})$$

$$\left( \frac{\partial W_{\text{ext}}}{\partial \theta_1} \right) = M + F l_1 \cos \theta_1 + m_1 g L_{G_1} \cos \theta_1 + m_2 g L_1 \cos \theta_1 = M + F L_1 \cos \theta_1 + g \cos \theta_1 \left( m_1 L_{G_1} + m_2 L_1 \right)$$

$$\left( \frac{\partial W_{\text{int}}}{\partial \theta_1} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left( \theta_{2R} - a - b\theta_1 \right) = -b\lambda$$

Et donc 
$$\left( \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{2R} \sin(\theta_1 - \theta_{2R}) + M + FL_1 \cos \theta_1 + g \cos \theta_1 (m_1 L_{G_1} + m_2 L_1) b\lambda$$

Puis 
$$\left( \frac{\partial P_D}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} \left( \frac{1}{2} C_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} C_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{2R})^2 \right) = C_1 \dot{\theta}_1 + C_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{2R})$$

Soit finalement L1 :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = - \left( \frac{\partial P_D}{\partial \dot{\theta}_1} \right)$$

$$\left( m_1 L_{G_1}^2 + m_2 L_1^2 \right) \ddot{\theta}_1 - m_2 L_{G_2} L_1 \cos(\theta_1 - \theta_{2R}) \ddot{\theta}_{2R} + m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_{2R} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{2R}) \sin(\theta_1 - \theta_{2R}) - m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{2R} \sin(\theta_1 - \theta_{2R}) - M - FL_1 \cos \theta_1 - g \cos \theta_1 (m_1 L_{G_1} + m_2 L_1) b\lambda = -C_1 \dot{\theta}_1 - C_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{2R})$$

$$\left( m_1 L_{G_1}^2 + m_2 L_1^2 \right) \ddot{\theta}_1 - m_2 L_1 L_{G_2} \cos(\theta_1 - \theta_{2R}) \ddot{\theta}_{2R} - m_2 L_1 L_{G_2} \sin(\theta_1 - \theta_{2R}) \dot{\theta}_{2R}^2 - g \cos \theta_1 (m_1 L_{G_1} + m_2 L_1) b\lambda + C_1 \dot{\theta}_1 - C_2 \dot{\theta}_{2R} + b\lambda = M + FL_1 \cos \theta_1$$

$$L_{\theta_{2R}} : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2R}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_{2R}} \right) = - \left( \frac{\partial P_D}{\partial \dot{\theta}_{2R}} \right) \text{ avec } L = T + W_{\text{ext}} - W_{\text{int}} + \lambda(\theta_{2R} - a - b\theta_1)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_{2R}} \right) = \left( m_2 L_{G_2}^2 + I_2 \right) \dot{\theta}_{2R} - m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_{2R}) \quad \left( \frac{\partial W_{\text{ext}}}{\partial \theta_{2R}} \right) = 0 \quad \left( \frac{\partial W_{\text{int}}}{\partial \theta_{2R}} \right) = 0$$

Et donc 
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2R}} \right) = \left( m_2 L_{G_2}^2 + I_2 \right) \ddot{\theta}_{2R} - m_2 L_{G_2} L_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_{2R}) - m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{2R}) \sin(\theta_1 - \theta_{2R})$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \theta_{2R}} \right) = -m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{2R} \sin(\theta_1 - \theta_{2R}) \quad \left( \frac{\partial W_{\text{ext}}}{\partial \theta_{2R}} \right) = -FL_2 \cos \theta_{2R} - m_2 g L_{G_2} \cos \theta_{2R} \quad \left( \frac{\partial W_{\text{int}}}{\partial \theta_{2R}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \lambda(\theta_{2R} - a - b\theta_1)}{\partial \theta_{2R}} = \lambda$$

Et donc 
$$\left( \frac{\partial L}{\partial \theta_{2R}} \right) = -m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{2R} \sin(\theta_1 - \theta_{2R}) - FL_2 \cos \theta_{2R} - m_2 g L_{G_2} \cos \theta_{2R} + \lambda$$

$$\left( \frac{\partial P_D}{\partial \dot{\theta}_{2R}} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_{2R}} \left( \frac{1}{2} C_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} C_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{2R})^2 \right) = -C_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{2R})$$

$$-m_2 L_1 L_{G_2} \cos(\theta_1 - \theta_{2R}) \ddot{\theta}_1 + \left( m_2 L_{G_2}^2 + I_2 \right) \ddot{\theta}_{2R} + m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{2R}) \sin(\theta_1 - \theta_{2R}) + m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{2R} \sin(\theta_1 - \theta_{2R}) + FL_2 \cos \theta_{2R} + m_2 g L_{G_2} \cos \theta_{2R} - \lambda = C_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{2R})$$

finalement

$$-m_2 L_1 L_{G_2} \cos(\theta_1 - \theta_{2R}) \ddot{\theta}_1 + \left( m_2 L_{G_2}^2 + I_2 \right) \ddot{\theta}_{2R} + m_2 L_1 L_{G_2} \sin(\theta_1 - \theta_{2R}) \dot{\theta}_1^2 + m_2 g L_{G_2} \cos \theta_{2R} - C_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{2R}) - \lambda = -FL_2 \cos \theta_{2R}$$

**Question 36 :** Mettre le système d'équations (E1) sous la forme  $\underline{M} \underline{\ddot{x}} + \underline{F} \underline{\dot{x}} + \underline{K} \underline{x} = \underline{F}$  avec  $\underline{x} = \langle \theta_1, \theta_{2R}, \lambda \rangle$ . Identifier les matrices  $\underline{M}$ ,  $\underline{F}$ ,  $\underline{K}$  et la colonne  $\underline{F}$ .

$$\begin{cases} (m_1 L_{G_1}^2 + m_2 L_1^2) \ddot{\theta}_1 - m_2 L_1 L_{G_2} \cos(\theta_{10} - \theta_{2R0}) \ddot{\theta}_{2R} + C_1 + C_2 \dot{\theta}_1 - C_2 \dot{\theta}_{2R} + (m_1 g L_{G_1} + m_2 g L_1 + F_0 L_1) \sin \theta_{10} \dot{\theta}_1 \\ = M + FL_1 \cos \theta_{10} - b \lambda \\ - m_2 L_1 L_{G_2} \cos(\theta_{10} - \theta_{2R0}) \ddot{\theta}_1 + (m_2 L_{G_2}^2) \ddot{\theta}_{2R} - C_2 \dot{\theta}_1 + C_2 \dot{\theta}_{2R} - (m_2 g L_{G_2} + F_0 L_2) \sin \theta_{2R0} \dot{\theta}_{2R} = -FL_2 \cos \theta_{2R0} + \lambda \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 + m_1 L_{G_1}^2 + m_2 L_1^2 & -m_2 L_1 L_{G_2} \cos(\theta_{10} - \theta_{2R0}) & 0 \\ -m_2 L_1 L_{G_2} \cos(\theta_{10} - \theta_{2R0}) & I_2 + m_2 L_{G_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_{2R} \\ \ddot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_{2R} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 L_1 + m_1 g L_{G_1} + m_2 g L_1) \sin \theta_{10} & 0 & b \\ 0 & -(m_2 L_2 + m_2 g L_{G_2}) \sin \theta_{2R0} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_{2R} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M + FL_1 \cos \theta_{10} \\ -FL_2 \cos \theta_{2R0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_{2R} \\ \ddot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_{2R} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & b \\ k_{21} & k_{22} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_{2R} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M + FL_1 \cos \theta_{10} \\ FL_2 \cos \theta_{2R0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

## INDEX

**Question 37 :** Exprimer  $\theta_1(p)$  et  $\theta_{2R}(p)$  en fonction de  $F(p)$  et des paramètres utiles. En déduire l'expression du déploiement vertical  $Y(p)$ .

$$\begin{cases} (m_{11} p^2 + c_{11} p + k_{11}) \theta_1(p) + (m_{12} p^2 + c_{12} p) \theta_{2R}(p) = FL_1 \cos \theta_{10} \\ (m_{21} p^2 + c_{21} p) \theta_1(p) + (m_{22} p^2 + c_{22} p + k_{22}) \theta_{2R}(p) = FL_2 \cos \theta_{2R0} \end{cases}$$

$$\theta_1(p) = \frac{L_1 \cos \theta_{10} (m_{22} p^2 + c_{22} p + k_{22}) - (m_{12} p^2 + c_{12} p) L_2 \cos \theta_{2R0}}{(m_{11} p^2 + c_{11} p + k_{11}) (m_{22} p^2 + c_{22} p + k_{22}) - (m_{12} p^2 + c_{12} p) (m_{21} p^2 + c_{21} p)} F(p)$$

$$\theta_{2R}(p) = \frac{(m_{11} p^2 + c_{11} p + k_{11}) L_2 \cos \theta_{2R0} - (m_{21} p^2 + c_{21} p) L_1 \cos \theta_{10}}{(m_{11} p^2 + c_{11} p + k_{11}) (m_{22} p^2 + c_{22} p + k_{22}) - (m_{12} p^2 + c_{12} p) (m_{21} p^2 + c_{21} p)} F(p)$$

Le développement vertical du pantographe est donné par :  $z = l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin \theta_{2R}$  avec  $\theta_{2R} = a + b \theta_1$  avec  $a = -0,0903 \text{ rad}$   $b = -0,724$ .

**Question 38 :** Le système proposé présente-t-il une ou plusieurs pulsations propres réelles ? Comment peut-on expliquer la forme de la fonction de transfert donnée figure 14 ?

Le système à deux degrés de liberté obtenu possède deux fréquences propres réelles. La plus basse (inférieure à 1 Hz) est très amortie, le seconde plus élevée est très dépendante de la valeur de  $K_2$  et correspond au pic à 9 Hz observé sur la figure 15.

**Question 39 :** Conclure quant à la corrélation entre les essais réalisés et le modèle rigide du grand cadre.

Le modèle rigide ne permet de déceler ni la résonance ni l'antirésonance (système à un seul degré de liberté). Afin de corriger cela l'observation du comportement dynamique du pantographe suggère d'introduire une flexibilité entre les deux bras 1 et 2. Il est ainsi proposé de différencier la rotation  $\theta_2$  réelle du bras 2 de la rotation  $\theta_{2R}$  induite par une liaison cinématique stricte. Une raideur  $K_2$  (N.m.rad<sup>-1</sup>) va servir de "variable d'ajustement" pour limiter l'écart entre  $\theta_2$  et  $\theta_{2R}$ .

**Question 40 : Par la méthode de Lagrange compléter l'équation (2) et déterminer l'équation de mouvement du pantographe  $L\theta_1$  notée (4).**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = - \left( \frac{\partial P_D}{\partial \theta_1} \right) \text{ avec } L = T + W_{\text{ext}} - W_{\text{int}}$$

$$T(E/R_g) = \frac{1}{2} (m_1 L_{G_1}^2 + m_2 L_1^2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 L_{G_2}^2) \dot{\theta}_{2R}^2 - m_2 L_1 L_{G_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{2R} \cos(\theta_1 - \theta_{2R})$$

$$W_{\text{ext}}(E/R_g) = M(\theta_1 - \theta_{1i}) + FL_1 [\sin\theta_1 - \sin\theta_{1i}] - FL_2 [\sin\theta_{2R} - \sin\theta_{2Ri}] + g(m_1 L_{G_1} + m_2 L_1) [\sin\theta_1 - \sin\theta_{1i}] - m_2 g L_{G_2} [\sin\theta_{2R} - \sin\theta_{2Ri}]$$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} K_2 (\theta_2 - a - b\theta_1)^2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (m_1 L_{G_1}^2 + m_2 L_1^2) \ddot{\theta}_1 - m_2 L_{G_2} L_1 \cos(\theta_1 - \theta_{2R}) \ddot{\theta}_{2R} + m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_{2R} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{2R}) \sin(\theta_1 - \theta_{2R})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_{\text{ext}}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = 0 \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_{\text{int}}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = 0$$

$$\text{Donc } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (m_1 L_{G_1}^2 + m_2 L_1^2) \ddot{\theta}_1 - m_2 L_{G_2} L_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \theta_1} \right) = m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{2R} \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\left( \frac{\partial W_{\text{ext}}}{\partial \theta_1} \right) = M + FL_1 \cos\theta_1 + m_1 g L_{G_1} \cos\theta_1 + m_2 g L_1 \cos\theta_1 = M + FL_1 \cos\theta_1 + g \cos\theta_1 (m_1 L_{G_1} + m_2 L_1)$$

$$\left( \frac{\partial W_{\text{int}}}{\partial \theta_1} \right) = -K_2 b (\theta_2 - a - b\theta_1)$$

$$\text{Et donc } \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + M + FL_1 \cos\theta_1 + g \cos\theta_1 (m_1 L_{G_1} + m_2 L_1) - K_2 b (\theta_2 - a - b\theta_1)$$

$$\left( \frac{\partial P_D}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} \left( \frac{1}{2} C_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} C_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2 \right) = C_1 \dot{\theta}_1 + C_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

Soit finalement  $L_{\theta_1}$  :

$$(m_1 L_{G_1}^2 + m_2 L_1^2) \ddot{\theta}_1 - m_2 L_1 L_{G_2} \cos(\theta_1 - \theta_{2R}) \ddot{\theta}_{2R} - m_2 L_1 L_{G_2} \sin(\theta_1 - \theta_{2R}) \dot{\theta}_{2R}^2 - g \cos\theta_1 (m_1 L_{G_1} + m_2 L_1) + C_1 + C_2 \dot{\theta}_1 - C_2 \dot{\theta}_{2R} + b\lambda = M + FL_1 \cos\theta_1$$

$$(m_1 L_{G_1}^2 + m_2 L_1^2) \ddot{\theta}_1 - m_2 L_1 L_{G_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 L_1 L_{G_2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 - M - FL_1 \cos\theta_1 - g \cos\theta_1 (m_1 L_{G_1} + m_2 L_1) - K_2 b (\theta_2 - a - b\theta_1) = -C_1 \dot{\theta}_1 - C_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$(m_1 L_{G_1}^2 + m_2 L_1^2) \ddot{\theta}_1 - m_2 L_1 L_{G_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 L_1 L_{G_2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 - g \cos\theta_1 (m_1 L_{G_1} + m_2 L_1) + C_1 + C_2 \dot{\theta}_1 - C_2 \dot{\theta}_2 + K_2 b^2 \theta_1 - K_2 b \theta_2 = M + FL_1 \cos\theta_1 - K_2 ab$$

**Question 41 : Par la méthode de Lagrange compléter l'équation (3) et déterminer l'équation de mouvement du pantographe  $L\theta_2$  notée (5).**

$$L_{\theta_2} : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) = - \left( \frac{\partial P_D}{\partial \theta_2} \right)$$

$$\text{avec } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = (m_2 L_{G_2}^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 L_{G_2} L_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \theta_2} \right) = -m_2 L_1 L_{G_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\left( \frac{\partial W_{ext}}{\partial \theta_2} \right) = -FL_2 \cos \theta_2 - m_2 g L_{G_2} \cos \theta_2$$

$$\left( \frac{\partial W_{int}}{\partial \theta_2} \right) = K_2 (\theta_2 - a - b\theta_1)$$

$$\text{Et donc } \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) = -m_2 L_1 L_{G_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - FL_2 \cos \theta_2 - m_2 g L_{G_2} \cos \theta_2 - K_2 (\theta_2 - a - b\theta_1)$$

$$\left( \frac{\partial P_D}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2} \left( \frac{1}{2} C_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} C_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2 \right) = -C_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

Soit finalement  $L_{\theta_2}$  :

$$(m_2 L_{G_2}^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 L_{G_2} L_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - m_2 L_{G_2} L_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 L_1 L_{G_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + FL_2 \cos \theta_2 + m_2 g L_{G_2} \cos \theta_2 + K_2 (\theta_2 - a - b\theta_1) = C_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$-m_2 L_{G_2} L_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + (m_2 L_{G_2}^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 L_{G_2} L_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + m_2 g L_{G_2} \cos \theta_2 - C_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - K_2 b\theta_1 + K_2 \theta_2 = -FL_2 \cos \theta_2 + K_2 a$$

Question 42 : Exprimer le système d'équations (4) (5) sous la forme (E2) suivante :

$$(E2) \quad \begin{bmatrix} M \\ P \\ K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} \quad \text{où } \begin{Bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \langle \theta_1, \theta_2 \rangle$$

$$\begin{bmatrix} I_1 + m_1 L_{G_1}^2 + m_2 L_1^2 & -m_2 L_1 L_{G_2} \cos(\theta_{10} - \theta_{20}) \\ -m_2 L_1 L_{G_2} \cos(\theta_{10} - \theta_{20}) & I_2 + m_2 L_{G_2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} (m_1 L_{G_1} + m_2 L_1) F_0 L_1 \sin \theta_{10} + K_2 b^2 & -K_2 b \\ -K_2 b & (L_2 + m_2 L_{G_2} g) \sin \theta_{20} + K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M + FL_1 \cos \theta_{10} - K_2 ab \\ -FL_2 \cos \theta_{20} + K_2 a \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} M \\ P \\ K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix}}$$

Question 43 : Déterminer la relation liant  $K_2$  à la seconde fréquence propre. Choisir une valeur de  $K_2$  en vous aidant de la figure 17.

On trouve  $f = 0,64K_2 + 4,2$  avec  $f$  en Hz.

Question 44 : Conclure quant à la corrélation entre les essais et le modèle souple du grand cadre (pantographe sans archet).

Le modèle évolué permet de trouver la résonance et une anti résonance proche de 6,7 Hz.

Les valeurs de fréquences propres correspondent aux valeurs observées.

**Question 45 : Conclure quant à la validité du modèle « grand cadre souple avec archet ».**

Le modèle « grand cadre souple avec archet » correspond assez bien aux observations expérimentales qui donnent les valeurs des fréquences de résonance et d'antirésonance. Toutefois, certains décalages d'amplitude et de fréquence persistent encore.

**Question 46 : Exprimer l'équation de mouvement de ce système sous la forme suivante :**

$$M \ddot{\mathbf{x}} + C \dot{\mathbf{x}} + K \mathbf{x} = \mathbf{F} \text{ avec } \mathbf{x}^T = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$$

Théorème de la résultante dynamique appliqué à la masse  $M_1$

$$\begin{aligned} -M_1 g - k_1(l_{1e} - l_{10}) - k_2(l_{2e} - l_{20}) &= 0 \\ -M_1 g - k_1(l_1 - l_{10}) - k_2(l_2 - l_{20}) - C_1 \dot{l}_1 - C_2 \dot{l}_2 &= M_1 \ddot{x}_{G1} \\ \text{Soit } -k_1(l_1 - l_{1e}) - k_2(l_2 - l_{2e}) - C_1 \dot{l}_1 - C_2 \dot{l}_2 &= M_1 \ddot{x}_{G1} \\ \text{En remarquant que } x_1 = l_1 - l_{1e} \text{ et } x_1 - x_2 = l_2 - l_{2e} \end{aligned}$$

$$\text{on obtient : } M_1 \ddot{x}_1 + C_1 \dot{x}_1 + C_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0$$

Théorème de la résultante dynamique appliqué à la masse  $M_2$

$$\begin{aligned} -M_2 g - k_2(l_{2e} - l_{20}) - k_3(l_{3e} - l_{30}) &= 0 \\ -M_2 g - k_2(l_2 - l_{20}) - k_3(l_3 - l_{30}) - C_2 \dot{l}_2 - C_3 \dot{l}_3 &= -M_2 \ddot{x}_{G2} \\ \text{Soit } -k_2(l_2 - l_{2e}) - k_3(l_3 - l_{3e}) - C_2 \dot{l}_2 - C_3 \dot{l}_3 &= -M_2 \ddot{x}_{G2} \end{aligned}$$

En posant  $x_1 - x_2 = l_2 - l_{2e}$  et  $x_3 - x_2 = l_3 - l_{3e}$

$$\text{on obtient } -k_2 (x_1 - x_2) - k_3 (x_3 - x_2) - C_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - C_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) = -M_2 \ddot{x}_2$$

$$M_2 \ddot{x}_2 - C_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - C_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) + k_3 (x_3 - x_2) = 0$$

Théorème de la résultante dynamique appliqué à la masse  $M_3$

$$\begin{aligned} -M_3 g - k_3(l_{3e} - l_{30}) &= 0 \\ -M_3 g - k_3(l_3 - l_{30}) - C_3 \dot{l}_3 + F &= M_3 \ddot{x}_{G3} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } -k_3(l_3 - l_{3e}) - C_3 \dot{l}_3 + F = M_3 \ddot{x}_{G3}$$

En remarquant que  $x_3 - x_2 = l_3 - l_{3e}$

$$\text{on obtient : } M_3 \ddot{x}_3 + k_3 (x_3 - x_2) - C_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) = F$$

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{x}_1 + C_1 \dot{x}_1 + C_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) &= 0 \\ \text{Finalement } M_2 \ddot{x}_2 - C_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - C_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) + k_3 (x_3 - x_2) &= 0 \\ M_3 \ddot{x}_3 + k_3 (x_3 - x_2) - C_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) &= F \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & C_2 + C_3 & -C_3 \\ 0 & -C_3 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix}$$

**Question 47 : Conclure quant à la validité du modèle « 3 masses ».**

La modélisation du pantographe en multi-corps flexible représente la description la plus fine du pantographe. Elle permettra notamment d'étudier la flexion des barres composant le cadre du pantographe et sera, à terme, utilisée pour développer un pantographe asservi.

**Question 48 : L'ordre de montée du pantographe est donné. Expliquer le fonctionnement du système.**

L'ordre de montée du pantographe commande le basculement de l'électrovalve 2 qui devient passante.

L'air filtré par l'élément 1 passe au travers du régulateur de débit 3 qui contrôle la vitesse de montée du pantographe.

Le régulateur de pression 4 assure une pression constante dans le coussin du pantographe.

Le régulateur de débit 5 contrôle la vitesse de descente du pantographe en cas de désexcitation de l'électrovalve 2.

Lorsque le pantographe fonctionne, le régulateur de pression doit garantir une pression précise et constante dans le coussin, quel que soient les variations de volume de celui-ci. Ces variations sont engendrées par le pantographe qui oscille en suivant les variations de hauteur de la caténaire.

La pression de consigne du régulateur est ajustée à la valeur correspondant à l'effort statique du pantographe.

**Question 49 : Expliquer le fonctionnement en cas de panne du module de pilotage.**

En cas de panne du module de pilotage ou de la carte électronique, la commande de pilotage se désactive et l'électrovalve 6 se met à la purge. Le pantographe fonctionne alors en mode dégradé avec la seule pression de consigne donnée par le ressort et correspondant à l'effort statique.

Ce dispositif de secours permet également de disposer d'une référence de pression correspondant à l'effort statique de chaque pantographe. Lors d'une procédure d'auto tarage cette valeur est prise en compte automatiquement, dans la carte électronique, comme référence pour le calcul de la pression de pilotage.