

PARTIE 1

Question 1.1

$\text{rot}(\vec{U}) = 0 \Rightarrow$ il existe une fonction scalaire ϕ telle que $\vec{U} = \text{grad}(\phi)$.

$\text{div}(\vec{U}) = 0$ (fluide incompressible, $\rho = \text{constante}$) est alors équivalent à $\Delta\phi = 0$

Question 1.2

A partir de la définition de la fonction de courant appelée en annexe, on a :

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ u_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases}$$

Le long d'une ligne équipotentielle, on a $\phi = \text{constante}$ et $d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy = 0$. Cette relation s'écrit encore $u_x dx + u_y dy = 0$, soit $\vec{U} \cdot d\vec{\ell} = 0$. Une ligne équipotentielle est une ligne perpendiculaire en tout point au vecteur vitesse local.

Le long d'une ligne de courant : $\psi = \text{constante}$ et $d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = 0$. Cette relation s'écrit encore $-u_y dx + u_x dy = 0$, soit $\vec{U} \wedge d\vec{\ell} = 0$. Une ligne de courant est une ligne tangente en tout point au vecteur vitesse local.

Question 1.3

Principe de superposition : le potentiel complexe de l'écoulement est la somme des potentiels complexes des trois écoulements élémentaires rappelés en annexe. Le tourbillon présentant une symétrie de révolution autour de l'axe (Oz), seuls l'écoulement uniforme et le doublet sont affectés par l'existence d'un angle d'incidence non nul entre l'écoulement et l'axe (Ox).

D'où la relation $f(z) = U_0 z e^{-i\alpha} + \frac{M}{2\pi z e^{-i\alpha}} - i \frac{\Gamma}{2\pi} \text{Ln}(z)$

On remplace la variable complexe $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z e^{-i\alpha} = r[\cos(\theta - \alpha) + i\sin(\theta - \alpha)]$ dans la relation précédente puis on identifie les parties réelle et imaginaire en utilisant la définition du potentiel complexe $f(z)$ donnée en annexe $f(z) = \phi + i\psi$:

$$\begin{cases} \phi(r, \theta) = U_0 r \cos(\theta - \alpha) + \frac{M}{2\pi r} \cos(\theta - \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi(r, \theta) = U_0 r \sin(\theta - \alpha) - \frac{M}{2\pi r} \sin(\theta - \alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi} \text{Ln}(r) \end{cases}$$

Question 1.4

Écoulement potentiel \Rightarrow fluide parfait. La vitesse normale est nulle à la paroi (imperméabilité de l'aile) mais la vitesse tangentielle n'est pas nulle (contrairement au cas d'un fluide visqueux pour lequel il y a adhérence à la paroi).

$$\begin{cases} u_r(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U_0 \cos(\theta - \alpha) - \frac{M}{2\pi r^2} \cos(\theta - \alpha) \\ u_\theta(r, \theta) = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U_0 \sin(\theta - \alpha) - \frac{M}{2\pi r^2} \sin(\theta - \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$

$$u_r(R, \theta) = 0 \Rightarrow M = 2\pi U_0 R^2$$

et $\psi(R, \theta) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \text{Ln}(R) = \text{cste}$. La paroi du cylindre est par conséquent confondue avec une fonction de courant.

Question 1.5

La vitesse complexe est calculée selon la relation rappelée en annexe :

$$w(z) = \frac{df}{dz} = U_0 e^{-i\alpha} - \frac{U_0 R^2}{z^2 e^{-i\alpha}} - i \frac{\Gamma}{2\pi z}$$

On a $w(z_A) = 0$ pour $z_A^2 e^{-2i\alpha} - i \frac{\Gamma}{2\pi U_0} z_A e^{-i\alpha} - R^2 = 0$ qui admet pour solutions :

$$z_A e^{-i\alpha} = i \frac{\Gamma}{4\pi U_0} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 U_0^2}}$$

Question 1.6

A la surface du cylindre, $U(R, \theta) = u_\theta(R, \theta) = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_R = \frac{\Gamma}{2\pi R} - 2U_0 \sin(\theta - \alpha)$

Question 1.7

Fluide incompressible, parfait. Ecoulement permanent irrotationnel. On applique la relation de Bernoulli le long de la ligne de courant confondue avec la paroi du cylindre en négligeant le terme de gravité.

$$p(R, \theta) + \frac{1}{2} \rho U(R, \theta)^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho U_0^2 \text{ soit } p(R, \theta) - p_0 = \frac{1}{2} \rho U_0^2 \left(1 - \frac{U(R, \theta)^2}{U_0^2} \right) \text{ ou encore après}$$

développement :

$$p(R, \theta) - p_0 = \frac{1}{2} \rho U_0^2 \left(1 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 U_0^2 R^2} - 4 \sin^2(\theta - \alpha) + \frac{2\Gamma \sin(\theta - \alpha)}{\pi U_0 R} \right)$$

Question 1.8

$$\vec{R}_p = R_{px'} \vec{x}' + R_{py'} \vec{y}' \text{ et } \vec{n} = \frac{dy'}{dl} \vec{x}' - \frac{dx'}{dl} \vec{y}'$$

$$D'où \begin{cases} R_{px'} = - \int_{\text{cylindre}} p dy' = - \int_{\text{cylindre}} (p - p_0) dy' \\ R_{py'} = \int_{\text{cylindre}} p dx' = \int_{\text{cylindre}} (p - p_0) dx' \end{cases}$$

$$\text{On a par ailleurs } \begin{cases} x' = R \cos(\theta - \alpha) \\ y' = R \sin(\theta - \alpha) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} dx' = -R \sin(\theta - \alpha) d\theta \\ dy' = R \cos(\theta - \alpha) d\theta \end{cases}$$

$$\text{soit après calculs en utilisant la relation établie à la question 1.7 } \begin{cases} R_{px'} = 0 \\ R_{py'} = -\rho U_0 \Gamma \end{cases}$$

Ce résultat montre que la portance est une force verticale dirigée vers le haut lorsque la circulation est dans le sens horaire ($\Gamma < 0$) et verticale dirigée vers le bas lorsque la circulation du fluide est réalisée est dans le sens trigonométrique ($\Gamma > 0$). La portance est nulle en l'absence de circulation du fluide.

Question 1.9

$$\text{En appliquant la relation donnée en annexe, on a : } W(Z) = \frac{dF}{dZ} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dZ} = \frac{df}{dz} \frac{dz_1}{dZ}$$

$$\text{avec, } z_1 = z - m \text{ et } Z = z_1 + \frac{a^2}{z_1}$$

$$\text{On obtient par conséquent : } W(Z) = \frac{dF}{dZ} = \frac{df}{dz} \frac{1}{1 - a^2/z_1^2} = w(z) \frac{1}{1 - a^2/z_1^2}$$

Question 1.10

Le dénominateur de la fonction précédente s'annule lorsque $z_1^2 = a^2$, soit pour $z_1 = \pm a$, ce qui correspond aux angles $\theta_1 = 0$ et $\theta_1 = \pi$. Dans l'espace $z = (z_1 + m)$, cela correspond à deux complexes de modules respectifs $|z_+| = a + m = R$ et $|z_-| = |m - a| = |2m - R| = R - 2m$. Le point d'affixe z_+ est donc situé sur le cylindre tandis que z_- est à l'intérieur. L'affixe z_+ correspond à un angle $\theta = 0$ et correspond donc au bord de fuite.

Question 1.11

Condition de Kutta : $w(z_{BF}) = 0$ avec $z_{BF} = R$ et $w(z_{BF}) = \frac{df}{dz} \Big|_{z_{BF}}$.

Utilisant le résultat de la question 1.5, on obtient :

$$w(z = R) = U_0 e^{-i\alpha} - \frac{U_0 R^2}{R^2 e^{-i\alpha}} - i \frac{\Gamma}{2\pi R} = 0$$

$$\text{Ou encore } w(z = R) = -2iU_0 \sin \alpha - i \frac{\Gamma}{2\pi R} = 0.$$

Soit, pour la circulation $\Gamma = -4\pi R U_0 \sin \alpha$.

Si l'angle α que fait l'écoulement avec le profil de l'aile est positif ($\alpha_{\max} = 12^\circ$), la circulation Γ est négative et la force de portance dirigée vers le haut (voir question 1.9). Si l'angle α est négatif ($\alpha_{\max} = -12^\circ$), la circulation Γ est positive et la force de portance dirigée vers le bas (voir question 1.9).

Question 1.12

A partir de l'élément de contour $d\ell$, on peut exprimer le vecteur tangent sous la forme :

$$\vec{t} = \frac{dx}{d\ell} \vec{x} + \frac{dy}{d\ell} \vec{y} \text{ et la circulation } \Gamma = \oint u_x dx + u_y dy = \oint \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = \oint d\phi$$

Question 1.13

Le potentiel des vitesses ϕ dans le plan du cylindre z a pour image dans le plan Z le potentiel des vitesses Φ . Par transformation conforme, la fonction potentiel complexe $f(z) = \phi + i\psi$ du plan d (cylindre) devient dans D (aile) $F(Z) = \Phi + i\Psi$. On peut donc écrire : $\Gamma = \oint_z d\phi = \oint_Z d\Phi$.

Question 1.14

En utilisant les résultats établis aux questions 1.9 et 1.12, on obtient pour la force de portance :

$$|L'| = \rho U_0 |\Gamma| = 4\pi \rho R U_0^2 |\sin \alpha|.$$

Rappelant que la corde $c = 4(R - m) \approx 4R$, on obtient le coefficient de portance : $C_{L'} \approx 2\pi |\sin \alpha|$

Question 1.15

Si l'angle est nul, la circulation et donc la force de portance sont nuls.

$$\sin \alpha \neq 0 \Rightarrow \Gamma \neq 0 \Rightarrow L' \neq 0$$

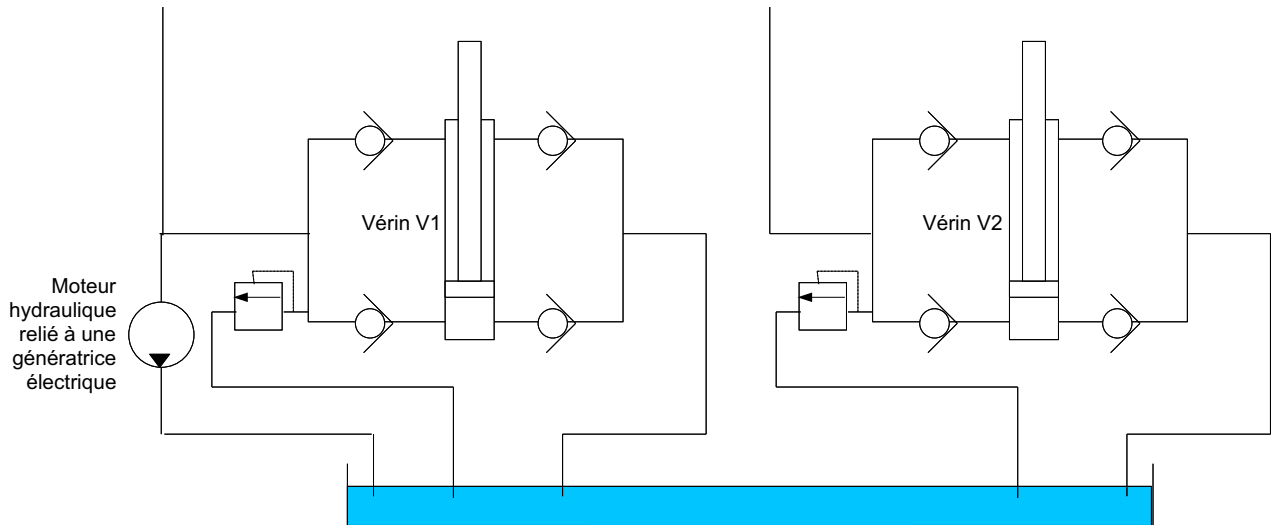
$$L = L'b = 4\pi \rho R U_0^2 b \sin \alpha \text{ soit numériquement pour un angle de } 12^\circ :$$

$$L = 4\pi \times 1030 \times 0.849 \times 2^2 \times 15 \times \sin(12\pi/180) = 137083 \text{ N}$$

Lorsque l'angle est positif, le bras est soumis à une force de portance verticale dirigée vers le haut. Réciproquement, lorsque l'angle est négatif, la force est verticale dirigée vers le bas. Si l'on considère en première approximation, que les poids de l'aile et du bras sont à peu près équilibrés par la poussée d'Archimède, l'aile réalise un mouvement oscillant sous l'effet de l'énergie des courants marins. La fonction technique FT1 est par conséquent réalisée.

PARTIE 2

Question 2.1



Question 2.2

Le solide 1 est une poutre infiniment mince, de longueur L_1 . Donc

$$I_{o_1}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 \frac{L_1^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \frac{L_1^2}{3} \end{pmatrix}_{b_1}$$

Le solide 2 est une plaque infiniment mince, de dimensions L_2 et $2xb$. Donc

$$I_{o_2}(2) = \begin{pmatrix} m_2 \frac{b^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 \frac{b^2}{3} + m_2 \frac{c^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \frac{c^2}{3} \end{pmatrix}_{b_2}$$

Question 2.3

On a $E_c((1+2)/R_0) = E_c(1/R_0) + E_c(2/R_0)$.

$$\text{Or } E_c(1/R_0) = \frac{1}{2} \left(V(1/0) \otimes C(1/0) \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_{10}^i \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{pmatrix}_{o_1} \otimes \begin{pmatrix} m_1 \frac{L_1}{2} \theta_{10}^i \vec{y}_1 \\ m_1 \frac{L_1^2}{3} \theta_{10}^i \vec{z}_0 \end{pmatrix}_{o_1} = \frac{1}{2} m_1 \frac{L_1^2}{3} \theta_{10}^2$$

$$\text{Donc } E_c(1/R_0) = \frac{1}{2} m_1 \frac{L_1^2}{3} \theta_{10}^2 = \frac{1}{2} C_1 \theta_{10}^2.$$

De plus, $E_c(2/R_0) = \frac{1}{2} [V(2/0)] \otimes [C(2/0)]$.

$$\text{Or } [V(2/0)] = \begin{pmatrix} (\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{21}) \vec{z}_0 \\ L_1 \dot{\theta}_{10} \vec{y}_1 \end{pmatrix}_{O_2} \text{ et } [C(2/0)] = \begin{pmatrix} m_2 L_1 \dot{\theta}_{10} \vec{y}_1 + m_2 \frac{c}{2} (\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{21}) \vec{y}_2 \\ \vec{\sigma}_{O_2}(2/0) \end{pmatrix}_{O_2}, \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{O_2}(2/0) &= m_2 \vec{O}_2 \vec{G} \wedge \vec{V}(O_2 \in 2/0) + I_{O_2}(2/0) \cdot \vec{\Omega}(2/0) \\ &= m_2 \frac{c}{2} \vec{x}_2 \wedge L_1 \dot{\theta}_{10} \vec{y}_1 + m_2 \frac{c^2}{3} (\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{21}) \vec{z}_0 \\ &= \frac{1}{2} m_2 L_1 c \cos(\theta_{21}) \dot{\theta}_{10} \vec{z}_0 + m_2 \frac{L_2^2}{3} (\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{21}) \vec{z}_0 \end{aligned}$$

Donc

$$E_c(2/R_0) = \frac{1}{2} \left(m_2 L_1^2 \dot{\theta}_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1 c \dot{\theta}_{10} (\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{21}) \cos(\theta_{21}) + \frac{1}{2} m_2 L_1 c \cos(\theta_{21}) \dot{\theta}_{10} (\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{21}) + m_2 \frac{c^2}{3} (\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{21})^2 \right)$$

$$\text{Donc } E_c(2/R_0) = \frac{1}{2} \left(m_2 L_1^2 \dot{\theta}_{10}^2 + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_{10} (\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{21}) \cos(\theta_{21}) + m_2 \frac{L_2^2}{3} (\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{21})^2 \right).$$

Question 2.4

Le coefficient énergétique associé au paramètre θ_{10} est

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_{10}} E_c((1+2)/R_0) - \frac{\partial}{\partial \theta_{10}} E_c((1+2)/R_0)$$

Donc le coefficient énergétique associé au paramètre θ_{10} est

$$m_1 \frac{L_1^2}{3} \ddot{\theta}_{10} + m_2 L_1^2 \ddot{\theta}_{10} + m_2 \frac{c^2}{3} (\ddot{\theta}_{10} + \ddot{\theta}_{21}) + \frac{1}{2} m_2 L_1 c ((2\ddot{\theta}_{10} + \ddot{\theta}_{21}) \cos(\theta_{21}) - (2\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{21}) \dot{\theta}_{21} \sin(\theta_{21}))$$

Le coefficient énergétique associé au paramètre θ_{21} est

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_{21}} E_c((1+2)/R_0) - \frac{\partial}{\partial \theta_{21}} E_c((1+2)/R_0)$$

Donc le coefficient énergétique associé au paramètre θ_{21} est

$$\frac{1}{2} m_2 L_1 c \dot{\theta}_{10} \cos(\theta_{21}) + \frac{1}{2} m_2 L_1 c \dot{\theta}_{10}^2 \sin(\theta_{21}) + m_2 \frac{c^2}{3} (\ddot{\theta}_{10} + \ddot{\theta}_{21})$$

Question 2.5

$$\text{L'énergie mécanique de pesanteur est } m_1 g \frac{L_1}{2} \sin \theta_{10} + m_2 g \left(L_1 \sin \theta_{10} + \frac{c}{2} \sin(\theta_{10} + \theta_{21}) \right)$$

Question 2.6

La puissance virtuelle due à l'action de l'eau sur 1 est

$$\int_{P \in 1} \vec{V}^*(P \in 1/0) \cdot (-K_e \vec{V}(P \in 1/0)) dl = \int_{x=0}^{L_1} -K_e x^2 \dot{\theta}_{10} \dot{\theta}_{10}^* dx = -K_e \frac{L_1^3}{3} \dot{\theta}_{10} \dot{\theta}_{10}^*$$

La puissance virtuelle due à l'action de l'eau sur 2 est

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{e2} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C \otimes \left\{ \begin{array}{c} (\dot{\theta}_{10}^* + \dot{\theta}_{21}^*) \vec{Z}_0 \\ L_1 \dot{\theta}_{10}^* \vec{Y}_1 + \frac{C}{4} (\dot{\theta}_{10}^* + \dot{\theta}_{21}^*) \vec{Y}_2 \end{array} \right\}_C = L_1 (F_{e2x} \sin(\theta_{21}) + F_{e2y} \cos(\theta_{21})) \dot{\theta}_{10}^* + \frac{C}{4} F_{e2y} (\dot{\theta}_{10}^* + \dot{\theta}_{21}^*) .$$

Question 2.7

Les deux vérins ont une masse nulle. N'étant soumis qu'à deux glisseurs, les forces qu'ils subissent (et donc qu'ils exercent sur le bras 1) sont dirigées suivant la direction (A_1B) .

La puissance virtuelle due à l'action de V1 sur 1 est

$$\vec{F}(V1 \rightarrow 1) \cdot \vec{V}^*(B \in 1/0) = F(V1 \rightarrow 1) \frac{\vec{A}_1 \vec{B}}{\|\vec{A}_1 \vec{B}\|} \cdot \vec{V}^*(B \in 1/0) .$$

Or $\vec{A}_1 \vec{B} \cdot \vec{V}^*(B \in 1/0) = (-H \vec{Y}_0 + R_1 \vec{X}_1) \cdot R_1 \dot{\theta}_{10}^* \vec{Y}_1 = -H \cos \theta_{10} R_1 \dot{\theta}_{10}^*$ et

$$\|\vec{A}_1 \vec{B}\| = \sqrt{\| -H \vec{Y}_0 + R_1 \vec{X}_1 \|^2} = \sqrt{H^2 + R_1^2 - 2HR_1 \sin \theta_{10}} .$$

$$\text{Donc } \vec{F}(V1 \rightarrow 1) \cdot \vec{V}^*(B \in 1/0) = F(V1 \rightarrow 1) \frac{(-H \cos \theta_{10} R_1 \dot{\theta}_{10}^*)}{\sqrt{H^2 + R_1^2 - 2HR_1 \sin \theta_{10}}}$$

Pour le vérin V2, le calcul est le même, en remplaçant $-H$ par H .

$$\text{Donc } \vec{F}(V2 \rightarrow 1) \cdot \vec{V}^*(B \in 1/0) = F(V2 \rightarrow 1) \frac{(H \cos \theta_{10} R_1 \dot{\theta}_{10}^*)}{\sqrt{H^2 + R_1^2 + 2HR_1 \sin \theta_{10}}}$$

Question 2.8

La vitesse d'allongement du vérin V1 est $\frac{d\|\vec{A}_1 \vec{B}\|}{dt}$.

Or $\|\vec{A}_1 \vec{B}\| = \sqrt{\| -H \vec{Y}_0 + R_1 \vec{X}_1 \|^2} = \sqrt{H^2 + R_1^2 - 2HR_1 \cos \theta_{10}}$.

$$\text{Donc la vitesse d'allongement du vérin V1 est } \frac{-HR_1 \cos \theta_{10} \dot{\theta}_{10}}{\sqrt{H^2 + R_1^2 - 2HR_1 \sin \theta_{10}}}$$

Pour le vérin V2, le calcul est le même, en remplaçant $-H$ par H .

$$\text{Donc la vitesse d'allongement du vérin V2 est } \frac{HR_1 \cos \theta_{10} \dot{\theta}_{10}}{\sqrt{H^2 + R_1^2 + 2HR_1 \sin \theta_{10}}}$$

Question 2.9

L'équation de Lagrange associée au paramètre θ_{10} s'écrit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_{10}} E_c((1+2)/R_0) - \frac{\partial}{\partial \theta_{10}} E_c((1+2)/R_0) + m_1 g \frac{L_1}{2} \cos \theta_{10} + m_2 g \left(L_1 \cos \theta_{10} + \frac{c}{2} \cos(\theta_{10} + \theta_{21}) \right) =$$

$$-K_e \frac{L_1^3}{3} \dot{\theta}_{10} + F(V1 \rightarrow 1) \frac{(-H \cos \theta_{10} R_1)}{\sqrt{H^2 + R_1^2 - 2HR_1 \sin \theta_{10}}} + F(V2 \rightarrow 1) \frac{(H \cos \theta_{10} R_1)}{\sqrt{H^2 + R_1^2 + 2HR_1 \sin \theta_{10}}}$$

$$+ L_1 (F_{e2x} \sin(\theta_{21}) + F_{e2y} \cos(\theta_{21})) + \frac{c}{3} F_{e2y}$$

Question 2.10

- On remarque tout d'abord sur les courbes le cycle sinusoïdal du mouvement, comme souhaité. Les deux courbes de mouvements sont déphasées de $\frac{\pi}{2}$, ce qui est normal, car quand le bras oscillant arrive en position haute, l'incidence de l'aile par rapport à l'horizontale est nulle.
- Par ailleurs, la puissance générée est nulle quand le bras est immobile, ce qui est également normal vu que les vérins, dans ce cas, ne s'allongent ou ne se raccourcissent pas, et ne débiteront donc pas d'huile.
- Enfin, on remarque que quand le bras monte, la puissance générée est plus faible que quand il descend. Ceci est dû à la gravité qu'il faut contrer.

Question 2.11

Par lecture graphique, la puissance moyenne de la fonction FS1 du cahier des charges est à peu près de 50 kW.

PARTIE 3

Question 3.1

Vu la géométrie, on a

$$\vec{u}(P) = -y\theta_z \vec{x}_2 + y\theta_x \vec{z}_2 + w \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -y\theta_z \\ w \\ y\theta_x \end{pmatrix}$$

Question 3.2

Dans l'approximation cinématique proposée, on a $\theta_z = \frac{\partial w}{\partial x}$ et $\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial z}$. Donc

$$\vec{u}(P) = -y \frac{\partial w}{\partial x} \vec{x}_2 - y \frac{\partial w}{\partial z} \vec{z}_2 + w \vec{y}_2.$$

$$\vec{u}(P) = -y \frac{\partial w}{\partial x} \vec{x}_2 - y \frac{\partial w}{\partial z} \vec{z}_2 + w \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -y \frac{\partial w}{\partial x} \\ w \\ -y \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Question 3.3

On a $[\epsilon] = \frac{1+\nu}{E} [\sigma] - \frac{\nu}{E} \text{Tr}([\sigma]) \mathbf{I}$. En se limitant à la partie plane 2x2 des matrices, vu que l'on est en

contraintes planes, on a $[\epsilon_{cp}] = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_{cp}] - \frac{\nu}{E} \text{Tr}([\sigma_{cp}]) \mathbf{I}_{cp}$, où \mathbf{I}_{cp} est la matrice 2x2 identité. Donc

$\text{Tr}([\epsilon_{cp}]) = \frac{1+\nu}{E} \text{Tr}([\sigma_{cp}]) - 2 \frac{\nu}{E} \text{Tr}([\sigma_{cp}])$. Donc $\text{Tr}([\epsilon_{cp}]) = \frac{1-\nu}{E} \text{Tr}([\sigma_{cp}])$. En réinjectant dans l'équation initiale,

on obtient

$[\sigma_{cp}] = \frac{E}{1+\nu} [\epsilon_{cp}] + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \text{Tr}([\epsilon_{cp}]) \mathbf{I}_{cp}$. On en déduit donc l'expression demandée, avec

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{1+\nu} \end{bmatrix}$$

Question 3.4

On a $P_{\text{int}}^* = -\int_{\Omega} \text{Tr}([\sigma][\epsilon(\vec{u}^*)]) d\Omega = -\int_{\Omega} (\sigma)^T \cdot (\epsilon^*) d\Omega = -\int_{\Omega} y^2 (C)^T \cdot [D]^T \cdot (C^*) d\Omega$.

Donc $P_{\text{int}}^* = -\int_{\Omega} y^2 (C)^T \cdot [D]^T \cdot (C^*) d\Omega = -\int_S \frac{h^3}{12} (C)^T \cdot [D]^T \cdot (C^*) dS$. On obtient bien l'expression demandée, avec

$$[M] = \frac{h^3}{12} [D][C]$$

Question 3.5

On a $P_{\text{int}}^* = - \int_S (M)^T \cdot (C^*) dS = - \sum_{e \in \text{élément}} \int_{S_e} (M_e)^T \cdot (C_e^*) dS_e$. Donc

$$P_{\text{int}}^* = - \sum_{e \in \text{élément}} \int_{S_e} (d_e)^T \cdot [B_e]^T \cdot \frac{h^3}{12} \cdot [D_e] \cdot [B_e] \cdot (d_e^*) dS_e.$$

On obtient donc bien la formule demandée, avec

$$[K_e] = \frac{h^3}{12} \cdot \int_{S_e} [B_e]^T \cdot [D_e] \cdot [B_e] \cdot dS_e$$

De la même manière, on a

$$P_{\text{ext}}^* = \int_S f \cdot w^* dS = \sum_{e \in \text{élément}} \int_{S_e} f \cdot w_e^* dS_e = \sum_{e \in \text{élément}} (d_e^*)^T \int_{S_e} f \cdot (N_e) dS_e.$$

On a bien la forme demandée, avec

$$(f_e) = \int_{S_e} f \cdot (N_e) dS_e$$

Question 3.6

On a 105 noeuds. Il y a 3 inconnues par noeuds. Donc il y a 315 inconnues. Or deux noeuds sont encastres. Donc 6 inconnues sont déterminées.

Donc le problème matriciel aura une taille de 309x309.

Question 3.7

D'après la simulation numérique, la contrainte maximale est de 49 Mpa. Donc on est en dessous des 100 Mpa admissibles. Donc l'aile le critère de résistance aux efforts de pression de la fonction FT1.

Question 4.1

On isole le tronçon

$$\begin{cases} -T + (T + dT) - qdx = 0 \\ -M + (M + dM) + (T + dT)dx + P \frac{dy}{dx} dx - \int_0^{dx} zqdz = 0 \end{cases} \text{ soit au 1}^{\text{er}} \text{ ordre } \begin{cases} \frac{dT}{dx} = +q \\ \frac{dM}{dx} = -T - P \frac{dy}{dx} \end{cases}$$

Question 4.2

$$EI_{Gz} \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_{fz} \text{ donc } EI_{Gz} \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{dM_{fz}}{dx} = -T - P \frac{dy}{dx} \text{ soit } EI_{Gz} \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{dT}{dx} - P \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$EI_{Gz} \frac{d^4 y}{dx^4} = q - P \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ et donc } \boxed{\frac{d^4 y}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{EI_{Gz}}} \text{ avec } \boxed{k = \sqrt{\frac{P}{EI_{Gz}}}}$$

Question 4.3

$$\text{Solution particulière } \frac{d^2 y_P}{dx^2} = \frac{q}{P} = \text{constante avec } \frac{dy_P}{dx} = \frac{q}{P} x + K$$

$$\text{donc } \boxed{y_P(x) = \frac{q}{P} \frac{x^2}{2} + Ex + F}$$

Question 4.4

Les déplacements suivant y et les moments sont nuls en chacune des extrémités de la poutre. D'autre part, $M = -EI_{Gz} y''$ donc les conditions aux limites s'écrivent : $y(0) = y(L) = y''(0) = y''(L) = 0$

Question 4.5

$$\boxed{y(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) + \frac{q}{P} \frac{x^2}{2} + (C + E)x + D + F}$$

$$y(0) = 0 \quad \text{soit} \quad 0 = B + D + F$$

$$y''(0) = 0 \quad \text{soit} \quad 0 = -Bk^2 + \frac{q}{P}$$

$$y(L) = 0 \quad \text{soit} \quad 0 = A \sin kL + B \cos kL + \frac{q}{P} \frac{L^2}{2} + (C + E)L + D + F$$

$$y'' = 0 \quad \text{soit} \quad 0 = -Ak^2 \sin kL - Bk^2 \cos kL + \frac{q}{P}$$

$$\boxed{B = \frac{q}{Pk^2}}$$

$$\boxed{D + F = -\frac{q}{Pk^2}}$$

$$\boxed{A = \frac{q}{Pk^2} \left(\frac{1 - \cos kL}{\sin kL} \right)}$$

$$\boxed{C + E = -\frac{qL}{P2}}$$

car

$$-(C + E)L = \frac{q}{Pk^2} \left(\frac{1 - \cos(kL)}{\sin(kL)} \right) \sin(kL) + \frac{q}{Pk^2} \cos(kL) + \frac{qL^2}{P2} - \frac{q}{Pk^2}$$

$$-(C + E)L = \frac{q}{Pk^2} (1 - \cos(kL)) + \frac{q}{Pk^2} \cos(kL) + \frac{qL^2}{P2} - \frac{q}{Pk^2}$$

$$y(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) + \frac{q}{P} \frac{x^2}{2} + (C + E)x + D + F$$

$$\text{donc } y(x) = \frac{q}{Pk^2} \left(\frac{1 - \cos(kL)}{\sin(kL)} \right) \sin(kx) + \frac{q}{Pk^2} \cos(kx) + \frac{q}{P} \frac{x^2}{2} - \frac{qL}{P2} x - \frac{q}{Pk^2}$$

$$y(x) = \frac{q}{Pk^2} \left[\left(\frac{1 - \cos(kL)}{\sin(kL)} \right) \sin(kx) + \cos(kx) - 1 + \frac{k^2 x}{2} (x - L) \right] \text{ avec } k^2 = \frac{P}{EI_{Gz}}$$

$$y(x) = \left[\frac{EI_{Gz} q}{P^2} \left(\frac{1 - \cos(kL)}{\sin(kL)} \right) \sin(kx) + \frac{EI_{Gz} q}{P^2} (\cos(kx) - 1) + \frac{q}{P} \frac{x}{2} (x - L) \right]$$

Effort critique de flambement F_C : $y(x)$ ne diverge pour aucune valeur de k .

$$\text{soit } \sin(kL) = 0 \text{ soit } kL = \pi \text{ et donc } k^2 = \frac{P}{EI_{Gz}} = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \text{ soit } F_C = EI_{Gz} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2$$

La charge linéique n'a pas d'incidence.

Question 4.6

Poutre encastree / libre

$$M = P(y(A) - y) \text{ or } EI_{Gz} \frac{d^2 y}{dx^2} = M \text{ donc } EI_{Gz} \frac{d^2 y}{dx^2} = P(y(A) - y) \text{ soit}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI_{Gz}} y = \frac{P}{EI_{Gz}} y(A) \text{ avec } k = \sqrt{\frac{P}{EI_{Gz}}}$$

$$y(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) + y(A)$$

$$y(0) = 0 \text{ soit } 0 = B + y(A) \text{ soit } B = -y(A)$$

$$y'(0) = 0 \text{ soit } 0 = Ak \text{ soit } A = 0$$

$$y(x) = y(A)(1 - \cos kx) \text{ or } y(A) = y(A)(1 - \cos kL) \text{ donc } \cos kL = 0$$

$$\text{Effort critique de flambement } F_C : \cos kL = 0 \text{ soit } kL = \frac{\pi}{2} \text{ et donc } k^2 = \frac{P}{EI_{Gz}} = \left(\frac{\pi}{2L} \right)^2 \text{ soit}$$

$$F_C = EI_{Gz} \left(\frac{\pi}{2L} \right)^2$$

Question 4.7

Poutre encastree / appui simple $y(A) = 0$

$$M = -Py + F(L - x) \text{ or } EI_{Gz} \frac{d^2y}{dx^2} = M \text{ donc } EI_{Gz} \frac{d^2y}{dx^2} = -Py + F(L - x) \text{ soit}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI_{Gz}}y = \frac{F}{EI_{Gz}}(L - x)} \text{ avec } \boxed{k = \sqrt{\frac{P}{EI_{Gz}}}}$$

$$y(x) = A \sin kx + B \cos kx + \frac{F}{P}(L - x)$$

$$y(0) = 0 \quad \text{soit} \quad 0 = B + \frac{FL}{P} \text{ soit } B = -\frac{FL}{P}$$

$$y'(0) = 0 \quad \text{soit} \quad 0 = Ak - \frac{F}{P} \text{ soit } A = \frac{F}{Pk}$$

$$y(L) = 0 \quad \text{soit} \quad 0 = A \sin(kL) + B \cos(kL)$$

$$\boxed{\tan(kL) = -\frac{B}{A} = kL}$$

Effort critique de flambement F_C : $\tan(kL) = (kL)$ soit $kL = 4,493$ et donc $k^2 = \frac{P}{EI_{Gz}} = \left(\frac{4,493}{L}\right)^2$

$$\text{soit } \boxed{F_C = EI_{Gz} \left(\frac{4,493}{L}\right)^2}$$

Question 4.8

S'il n'y a pas de plastification en compression avant le flambage

Question 4.9

Pour un deplacement δ du noeud A ($\delta < L$) on a $\boxed{N_{mat} = ES_a \frac{\delta}{L}}$ et $\boxed{N_{tirant} = ES_b \frac{\delta}{L}}$

Equilibre du noeud A : $P = N_{mat} + 2N_{tirant} \cos \alpha$ soit $\boxed{P = E \frac{\delta}{L} (S_a + 2S_b \cos \alpha)}$

$$\text{Soit } \boxed{\delta = \frac{PL}{E(S_a + 2S_b \cos \alpha)}}, \quad \boxed{N_{mat} = ES_a \frac{\delta}{L}}, \quad \boxed{N_{tirant} = ES_b \frac{\delta}{L}}$$

Question 4.10

Il faut verifier simultanement les conditions de non plastification et de non flambement, soit :

Condition de non plastification sur le mat et les tirants : $\frac{|N_{mat}|}{S_a} < \sigma_e$ $\frac{|N_{tirant}|}{S_b} < \sigma_e$

Condition de non flambement sur le mat et les tirants :

$$N_{mat} < E \cdot \min(I_{Gz}, I_{Gy}) \frac{(4,493)^2}{(L)^2} \text{ et } \frac{N_{mat}}{S_a} < \sigma_e$$

On doit avoir :

$$N_{tirant} < E I_b \frac{\pi^2}{\left(\frac{L}{\cos \alpha}\right)^2} \text{ et } \frac{N_{tirant}}{S_b} < \sigma_e$$

Question 5.1

$$\vec{u}(M) = u(r, \theta, z) \vec{e}_r + v(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + w(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

Symétrie cylindrique donc $\vec{u}(M) = u(r) \vec{e}_r + w(z) \vec{e}_z$

Tenseur de déformation $\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left[\overline{\overline{\text{grad } \vec{u}(M)}} + {}^t \overline{\overline{\text{grad } \vec{u}(M)}} \right]$

$$\overline{\overline{\text{grad } \vec{u}(M)}} = \begin{bmatrix} \frac{du}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dw}{dz} \end{bmatrix}_{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z} \quad \text{donc} \quad \overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{du}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dw}{dz} \end{bmatrix}_{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z}$$

Question 5.2

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \text{tr}(\overline{\overline{\varepsilon}}) \delta_{ij}$$

$$\sigma_{rr} = 2\mu \varepsilon_{rr} + \lambda (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{rr} + \lambda \varepsilon_{\theta\theta} + \lambda \varepsilon_{zz}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu \varepsilon_{\theta\theta} + \lambda (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{\theta\theta} + \lambda \varepsilon_{rr} + \lambda \varepsilon_{zz}$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu \varepsilon_{zz} + \lambda (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{zz} + \lambda \varepsilon_{\theta\theta} + \lambda \varepsilon_{rr}$$

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{du}{dr} + \lambda \frac{u}{r} + \lambda \frac{dw}{dz}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r} + \lambda \frac{du}{dr} + \lambda \frac{dw}{dz}$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{dw}{dz} + \lambda \frac{du}{dr} + \lambda \frac{u}{r}$$

Question 5.3

Il s'agit d'un problème de statique et les forces de graviter sont négligées. L'équilibre local s'écrit

donc : $\overline{\overline{\text{div } \sigma}} = \vec{0}$ donc
$$\begin{cases} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dz} = 0 \end{cases}$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{\lambda}{r} \frac{du}{dr} - \frac{\lambda}{r^2} u + \frac{1}{r} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{du}{dr} + \lambda \frac{u}{r} + \lambda \frac{dw}{dz} - (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r} - \lambda \frac{du}{dr} - \lambda \frac{dw}{dz} \right] = 0$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{\lambda}{r} \frac{du}{dr} - \frac{\lambda}{r^2} u + \frac{2\mu}{r} \frac{du}{dr} - 2\mu \frac{u}{r^2} = 0$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{\lambda + 2\mu}{r} \right) \frac{du}{dr} - (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r^2} = 0$$

et donc $\boxed{\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0}$ (E) et $\boxed{w_{,zz} = 0}$

Question 5.4

On trouve $\boxed{w = Cz + D}$

Vérifions que $\boxed{u(r) = Ar + \frac{B}{r}}$ est solution de (E)

$$u'(r) = A - \frac{B}{r^2} \text{ et } u''(r) = -\frac{2B}{r^3} \text{ et donc } -\frac{2B}{r^3} + \frac{A}{r} - \frac{B}{r^3} - \frac{A}{r} + \frac{B}{r^3} = 0$$

Question 5.5

$$\boxed{\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr} = A - \frac{B}{r^2}}$$

$$\boxed{\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} = A + \frac{B}{r^2}}$$

$$\boxed{\varepsilon_{zz} = \frac{dw}{dz} = C}$$

$$\boxed{\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \left(A - \frac{B}{r^2} \right) + \lambda \left(A + \frac{B}{r^2} \right) + \lambda C = 2(\lambda + \mu)A - 2\mu \frac{B}{r^2} + \lambda C}$$

$$\boxed{\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu) \left(A + \frac{B}{r^2} \right) + \lambda \left(A - \frac{B}{r^2} \right) + \lambda C = 2(\lambda + \mu)A + 2\mu \frac{B}{r^2} + \lambda C}$$

$$\boxed{\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)C + \lambda \left(A + \frac{B}{r^2} \right) + \lambda \left(A - \frac{B}{r^2} \right) = (\lambda + 2\mu)C + 2\lambda A}$$

Question 5.6

Composante u du champ de déplacement $\boxed{u(r) = Ar + \frac{B}{r}}$

Conditions aux limites $\boxed{\sigma_{rr}(R_i) = -p_i}$ et $\boxed{\sigma_{rr}(R_e) = -p_e}$

$$2(\lambda + \mu)A - 2\mu \frac{B}{R_i^2} + \lambda C = -p_i$$

$$2(\lambda + \mu)A - 2\mu \frac{B}{R_e^2} + \lambda C = -p_e$$

donc $-2\mu \frac{B}{R_i^2} + 2\mu \frac{B}{R_e^2} = -p_i + p_e$

soit $2\mu B \left(\frac{1}{R_e^2} - \frac{1}{R_i^2} \right) = -p_i + p_e$ et donc $\boxed{B = \frac{p_e - p_i}{2\mu} \frac{R_i^2 R_e^2}{R_i^2 - R_e^2}}$

$$\frac{2(\lambda + \mu)A}{R_e^2} - 2\mu \frac{B}{R_i^2 R_e^2} + \frac{\lambda C}{R_e^2} = -\frac{\rho_i}{R_e^2}$$

$$\frac{2(\lambda + \mu)A}{R_i^2} - 2\mu \frac{B}{R_i^2 R_e^2} + \frac{\lambda C}{R_i^2} = -\frac{\rho_e}{R_i^2}$$

$$\text{soit } \frac{2(\lambda + \mu)A}{R_e^2} - \frac{2(\lambda + \mu)A}{R_i^2} + \frac{\lambda C}{R_e^2} - \frac{\lambda C}{R_i^2} = -\frac{\rho_i}{R_e^2} + \frac{\rho_e}{R_i^2}$$

$$\left[\frac{1}{R_e^2} - \frac{1}{R_i^2} \right] 2(\lambda + \mu)A + \lambda C \left(\frac{1}{R_e^2} - \frac{1}{R_i^2} \right) = \frac{R_e^2 \rho_e - R_i^2 \rho_i}{R_i^2 R_e^2}$$

$$A = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \left[-\lambda C + \frac{R_e^2 \rho_e - R_i^2 \rho_i}{R_i^2 - R_e^2} \right]$$

$$B = \frac{\rho_e - \rho_i}{2\mu} \frac{R_i^2 R_e^2}{R_i^2 - R_e^2}$$

$$u(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

Question 5.7

- $w(0) = 0$ donc $D = 0$

- Equilibre du couvercle

$$-\rho_e \pi R_e^2 + \rho_i \pi R_i^2 - \sigma_{zz} \pi (R_e^2 - R_i^2) = 0 \text{ donc } \sigma_{zz} = -\frac{\rho_e R_e^2 - \rho_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

- Calcul de C :

$$\begin{cases} 2(\lambda + \mu)A + \lambda C = \frac{R_e^2 \rho_e - R_i^2 \rho_i}{R_i^2 - R_e^2} \text{ (expression de A)} \\ (\lambda + 2\mu)C + 2\lambda A = \frac{R_e^2 \rho_e - R_i^2 \rho_i}{R_i^2 - R_e^2} \text{ (expression de } \sigma_{zz}) \end{cases} \text{ donc } 2(\lambda + \mu)A + \lambda C = (\lambda + 2\mu)C + 2\lambda A$$

soit $2(\lambda + \mu)A - 2\lambda A = (\lambda + 2\mu)C - \lambda C$ et donc $2\mu A = 2\mu C$

$$\text{soit } C = A = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_e^2 \rho_e - R_i^2 \rho_i}{R_i^2 - R_e^2} \text{ et } w(z) = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_e^2 \rho_e - R_i^2 \rho_i}{R_i^2 - R_e^2} z$$

Question 5.8

$$\sigma_{rr} = (3\lambda + 2\mu)A - 2\mu \frac{B}{r^2} = \frac{R_e^2 \rho_e - R_i^2 \rho_i}{R_i^2 - R_e^2} - (\rho_e - \rho_i) \frac{R_i^2 R_e^2}{R_i^2 - R_e^2} \frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{R_e^2 - R_i^2} \left[\rho_i R_i^2 - \rho_e R_e^2 - \frac{(\rho_i - \rho_e) R_i^2 R_e^2}{r^2} \right] \text{ avec } \sigma_{rr}(R_i) = -\rho_i$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (3\lambda + 2\mu)A + 2\mu \frac{B}{r^2} = \frac{R_e^2 \rho_e - R_i^2 \rho_i}{R_i^2 - R_e^2} + (\rho_e - \rho_i) \frac{R_i^2 R_e^2}{R_i^2 - R_e^2} \frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (3\lambda + 2\mu)A + 2\mu \frac{B}{r^2} = \frac{R_e^2 p_e - R_i^2 p_i}{R_i^2 - R_e^2} + (p_e - p_i) \frac{R_i^2 R_e^2}{R_i^2 - R_e^2} \frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{R_i^2 - R_e^2} \left[R_e^2 p_e - R_i^2 p_i + (p_e - p_i) \frac{R_i^2 R_e^2}{r^2} \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{R_e^2 - R_i^2} \left[p_i R_i^2 - p_e R_e^2 + \frac{(p_i - p_e) R_i^2 R_e^2}{r^2} \right]$$

$$\sigma_{zz} = - \frac{p_e R_e^2 - p_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

Question 5.9

$$p_e(H) = \rho g H$$

$$\text{AN } p_e(H) = 5.10^5 \text{ Pa}$$

Question 5.10

$$\sigma_{rr}(p_i = 0) = \frac{-p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \left[1 - \frac{R_i^2}{r^2} \right] \quad \sigma_{\theta\theta}(p_i = 0) = \frac{-p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \left[1 + \frac{R_i^2}{r^2} \right]$$

$$\sigma_{zz}(p_i = 0) = - \frac{p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

Question 5.11

Critère de Von Mises

$$\sigma_{eq}^2 = \frac{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + 6(\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{zz}^2)}{2} < \sigma_e^2$$

$$\text{soit } 2\sigma_{eq}^2 = (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 < 2\sigma_e^2$$

Question 5.12

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \frac{2p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \frac{R_i^2}{r^2} \quad \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = \frac{p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \frac{R_i^2}{r^2} \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = \frac{p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \frac{R_i^2}{r^2}$$

$$2\sigma_{eq}^2 = 6 \left(\frac{p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \frac{R_i^2}{r^2} \right)^2 \quad \text{donc } \sigma_{eq} = \sqrt{3} \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \frac{R_i^2}{r^2} p_e$$

Question 5.13

- Contrainte maximale $\sigma_{eq} = \sqrt{3} \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \frac{R_i^2}{r^2} p_e$ en $r = R_i$

$$\text{Soit } \sigma_{eq}(r = R_i) = \sqrt{3} \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} p_e$$

- Epaisseur du tube $\sigma_{eq}(r = R_i) < \sigma_e$ soit $\sqrt{3} \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} p_e < \sigma_e$

$$\sqrt{3}R_e^2 p_e < \sigma_e (R_e^2 - R_i^2) \text{ et donc } (\sigma_e - \sqrt{3}p_e) R_e^2 > \sigma_e R_i^2 \text{ soit } R_e^2 > \frac{\sigma_e R_i^2}{\sigma_e - \sqrt{3}p_e}$$

$$e > R_i \left(\sqrt{\frac{\sigma_e}{\sigma_e - \sqrt{3}p_e}} - 1 \right)$$

$$e = 0,5 \text{ mm}$$

Question 5.14
Facile à assurer

PARTIE 6

Question 6.1

Compte-tenu des hypothèses sur les conditions d'échange, le problème est unidimensionnel et radial. On applique la conservation de l'énergie sur l'élément de volume délimité par les cylindres de rayon r et $r+dr$: $q''(r+dr)S(r+dr) = q''(r)S(r) + \omega_n dV$ (6.1)

Avec $S(r) = 2\pi rL$, $S(r+dr) = 2\pi(r+dr)L$, $dV \approx 2\pi Lrdr$ et $q''(r) = -k_n \left. \frac{dT}{dr} \right|_r$

En remplaçant ces quantités dans la relation (6.1), on obtient : $k_n \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \omega_n = 0$ (6.2)

Question 6.2

L'âme en aluminium de volume $V = \pi r_0^2 L$ est parcourue par un courant $I = j\pi r_0^2$. Sa résistance électrique vaut $\Re = \rho_0 \frac{L}{\pi r_0^2}$. La puissance électrique dissipée par unité de volume (effet Joule) s'écrit

par conséquent : $\omega_0 = \frac{\Re I^2}{V} = \rho_0 j^2$.

Question 6.3

On intègre l'équation (6.2) entre $r=0$ et $r=r_0$ en utilisant les deux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \\ T(r=0) = T(0) \end{cases} .$$

On obtient le profil de température dans l'âme en aluminium $T(r) = -\frac{\omega_0 r^2}{4k_0} + T(0)$ et par suite la

différence : $T(0) - T(r_0) = \frac{\omega_0 r_0^2}{4k_0}$. La température est maximum au centre du câble.

Question 6.4

Pour les couches 1, 2, 3, il n'y a pas de génération interne d'énergie, $\omega_n = 0$ $n=1, 2, 3$. Le bilan d'énergie établi à la question 6.1 montre que le flux se conserve $Q_n(r) = Q(r) = \text{cste}$.

$$Q(r) = -k_n 2\pi r L \left(\frac{dT}{dr} \right)_r = \text{cste} \text{ ou encore } -\frac{dr}{k_n 2\pi r} \frac{Q(r)}{L} = dT$$

Soit, après intégration entre les deux extrémités du milieu n :

$$\frac{Q(r)}{L} = \frac{2\pi k_n}{L \ln\left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)} [T(r_{n-1}) - T(r_n)]$$

On remarquera la cohérence de signe entre l'écart de température et le flux de chaleur. La température décroît vers la périphérie du câble ($T(r_{n-1}) - T(r_n) > 0$), ce qui correspond à un flux sortant ($Q(r) > 0$).

Question 6.5

Utilisant la définition de la résistance thermique $R_{th} = \frac{\Delta T}{Q}$, il vient :

$$R_{th_n} = \frac{1}{2\pi k_n L} \ln\left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right), \text{ soit par unité de longueur } R_{th_n} L = \frac{1}{2\pi k_n} \ln\left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)$$

Question 6.6

Applications numériques : $S_0 = 1200 \text{ mm}^2 \Rightarrow r_0 = 19.5 \text{ mm}$

$r_1 = 19.5 + 28 = 47.5 \text{ mm}$, $r_2 = 47.5 + 5 = 52.5 \text{ mm}$, $r_3 = 52.5 + 5 = 57.5 \text{ mm}$.

$k_1 = 0.17 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$, $k_2 = 35 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$, $k_3 = 0.5 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$.

$R_{th_1} L = 0.83 \text{ Km W}^{-1}$, $R_{th_2} L = 4.5 \cdot 10^{-4} \text{ Km W}^{-1}$, $R_{th_3} L = 0.03 \text{ Km W}^{-1}$.

La gaine en plomb utilisée pour lester le câble n'a aucun effet sur le plan thermique. L'isolation thermique est principalement réalisée par la couche de PVC.

Question 6.7

La résistance thermique par convection est donnée par $R_{cv} = \frac{1}{h(2\pi r_3 L)}$, soit pour une longueur de

$$\text{câble unité : } R_{cv} L = \frac{1}{h(2\pi r_3)} = 0.028 \text{ Km W}^{-1}$$

Cette résistance est du même ordre de grandeur que celle du polyéthylène. Elle reste faible devant la résistance thermique du PVC.

Question 6.8

La température de l'âme en aluminium étant supposée uniforme, $T(r_0) = 90 \text{ °C}$. Le flux maximal qui peut être dissipé dans l'âme est donné par

$$Q = \frac{T(r_0) - T_{\text{eau}}}{R_{\text{tot}}} \text{ où } R_{\text{tot}} = \sum_{n=1}^3 R_{th_n} + R_{cv}. \text{ Ce flux est égal à la puissance électrique générée par}$$

$$\text{effet Joule : } \omega_0 V = \Re I^2 = \rho_0 j^2 \pi r_0^2 L$$

$$\text{La densité de courant maximale que peut supporter le câble est donc : } j_{\text{Max}} = \left(\frac{T(r_0) - T_{\text{eau}}}{R_{\text{tot}} L} \frac{1}{\rho_0 \pi r_0^2} \right)^{1/2},$$

soit numériquement : $j_{\text{Max}} \approx 2 \text{ A/mm}^2$.

Question 6.9

Utilisant le résultat établi à la question 6.2, on peut calculer numériquement la valeur ω_0 et par suite la différence de température dans l'aluminium obtenue à la question 6.3. Le cas le plus défavorable correspond à $j_{\text{Max}} \approx 2 \text{ A/mm}^2$ et conduit à une différence de température de l'ordre de 0.033 K. L'hypothèse de température uniforme dans l'âme en aluminium est par conséquent pertinente.

Question 6.10

Utilisant le concept de résistance thermique, il vient immédiatement :

$$T(r_1) = T(r_0) - \frac{R_{th_1} L}{R_{\text{tot}} L} (T(r_0) - T_{\text{eau}}), \text{ soit numériquement : } T(r_1) \approx 15.6 \text{ °C.}$$

$$T(r_2) = T(r_1) - \frac{R_{th_2} L}{R_{\text{tot}} L} (T(r_0) - T_{\text{eau}}), \text{ soit numériquement : } T(r_2) \approx 15.1 \text{ °C}$$

$$T(r_3) = T(r_2) - \frac{R_{th_3} L}{R_{\text{tot}} L} (T(r_0) - T_{\text{eau}}), \text{ soit numériquement : } T(r_3) \approx 12.4 \text{ °C}$$

La principale chute de température est observée dans l'isolant en PVC. La température n'évolue que très peu dans les autres milieux.

Question 6.11

Le courant circulant dans le câble pour une puissance de 200 kW sous une tension de 400 V est de 500 A. La densité de courant correspondante est donnée par $j = I/S_0 \approx 0.42 \text{ A/mm}^2$. Cette valeur est compatible avec la valeur maximale déterminée à la question 6.9. En pratique, la température du câble en aluminium sera bien inférieure à la valeur limite de 90°C. La fonction technique FT9 est par conséquent bien assurée.

Épreuve de Mécanique Générale et des Milieux Déformables

Présentation de l'épreuve

Le support retenu pour l'épreuve était un système de récupération d'énergie des courants marins par aile oscillante appelé Stingray. Un prototype de ce système industriel réel est utilisé en version test dans les îles Shetland. Il se différencie des autres hydroliennes immergées en utilisant un mouvement d'aile oscillante plutôt qu'un mouvement de rotation d'une hélice pour capter l'énergie des courants marins. En évoluant dans le courant, l'aile oscillante provoque la rotation cyclique d'un bras pivotant qui, à son tour, provoque l'allongement et le raccourcissement de vérins hydrauliques. Ces vérins mettent en marche un moteur hydraulique relié à une génératrice électrique.

La conception pluri technologique du système Stingray et la nature de l'environnement dans lequel il évolue justifie la pertinence de son choix pour évaluer les candidats. En effet, l'analyse de ses solutions constructives et la prédiction de ses performances a permis de les évaluer sur tous les champs disciplinaires requis pour cette épreuve de mécanique générale et des milieux déformables.

Le sujet comportait 6 parties indépendantes qui étaient organisées autour d'une analyse systémique du support. Elles s'attachaient chacune à tester les compétences des candidats pour prédire les performances liées à une ou plusieurs fonctions techniques, ou valider le dimensionnement d'un composant du système.

Commentaires sur l'épreuve

Partie 1

L'objectif de cette partie était de prédire la performance de la fonction technique FT1 « récupérer l'énergie des courants marins ». Cette fonction pouvait être estimée à partir du calcul de la force de portance (la force de traînée étant négligée devant cette dernière). La modélisation était simplifiée en considérant un écoulement plan autour du profil d'aile (les effets tri-dimensionnels étaient négligés) et un régime permanent. Le fluide était incompressible et parfait. Dans ces conditions, la situation était similaire au classique problème d'aérodynamique que constitue l'écoulement d'air autour d'un profil d'aile.

Dans une première partie les candidats étaient invités à déterminer l'écoulement d'un fluide parfait autour d'un cylindre portant (écoulement potentiel avec circulation de vitesses) : détermination à partir de la fonction potentiel complexe (donnée) du champ de vitesse sur la paroi du cylindre, identification des points d'arrêt, calcul du champ de pression à partir du théorème de Bernoulli puis de la résultante des forces de pression exercées par le fluide sur le cylindre, enfin, identification avec la force de portance perpendiculaire à la vitesse du fluide incident.

Dans une seconde partie, l'écoulement autour du cylindre portant était transformé en écoulement autour du profil d'aile du Stingray (NACA0015) par utilisation d'une transformation conforme de Joukovski dont les paramètres étaient donnés dans le texte. Le candidat était amené à retrouver la valeur de la circulation satisfaisant la condition de Kutta (vitesse nulle au bord de fuite). Après avoir démontré que cette circulation était identique à celle qui serait obtenue sur le cylindre portant à l'origine de la transformation de Joukovski, le candidat pouvait en déduire l'égalité des forces de portance sur les deux systèmes et enfin calculer la valeur attendue pour le profil d'aile.

Cette partie comportait 15 questions permettant de guider le candidat dans sa démarche. 57 candidats sur 96 ne l'ont pas traitée, peut être rebutés par la nécessaire maîtrise des nombres complexes. Sur les 39 restants, une très large majorité n'a traité que les toutes premières questions, seuls 3 candidats ont traité l'intégralité du problème.

Partie 2

L'objectif de cette partie était de prédire le niveau de puissance moyenne générée par le système. Elle faisait appel à des compétences de modélisation et d'interprétation de résultats simulés. Le candidat

était amené à modéliser les quantités dynamiques du système et les actions mécaniques qui s'exerçaient sur lui. Il pouvait ainsi mettre en équation son mouvement général, et en déduire, après simulation, l'évolution de la puissance générée au niveau vérins hydrauliques. Les champs disciplinaires qui y étaient requis concernaient principalement la mécanique des solides indéformables, et sa description par le formalisme de Lagrange.

Beaucoup de candidats ont abordé cette partie, avec plus ou moins de succès. Certains d'entre eux ont en effet une grande maîtrise du formalisme de Lagrange et ont une bonne capacité de calcul. D'autres au contraire ne connaissent pas ce formalisme ou se perdent dans des calculs inutiles, ne répondant pas aux questions posées. Le jury ne saurait trop conseiller aux candidats de se mettre au point sur la mécanique des solides indéformables, sous toutes ses formes.

Partie 3

L'objectif de cette partie était de valider le dimensionnement de l'aile oscillante pour résister aux efforts de pression que l'eau exerce sur elle. L'aile étant plane et de faible épaisseur, la modélisation qui était retenue faisait appel à la théorie des plaques sous l'approximation de Kirchhoff-Love. Les candidats étaient amenés à mettre en place le modèle d'une simulation numérique par éléments finis basé sur un maillage utilisant des éléments rectangulaires. Le résultat de la simulation étant fourni, ils pouvaient conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Très peu de candidats ont abordé cette partie. Ceux qui l'ont traitée se sont vite arrêtés aux premières difficultés liées à la modélisation proposée pour les plaques, qui était pourtant absolument classique. Encore moins de candidats ont abordé les questions sur la modélisation par éléments finis. Le jury regrette le peu de maîtrise des candidats en modélisation des milieux continus à deux dimensions. Il regrette également le peu de connaissances des candidats dans la résolution des problèmes par la technique des éléments finis, technique pourtant largement utilisée en recherche et dans l'industrie.

Partie 4

L'objectif de cette partie était de valider le dimensionnement au flambement du mat et des tirants dans une configuration très simplifiée qui permettait néanmoins d'effectuer des calculs analytiques. Les compétences nécessaires pour traiter cette partie relevaient de la résistance de matériaux appliquée aux poutres et de quelques notions de flambement. Dans un premier temps, les candidats devaient calculer la charge critique de flambement de deux poutres simples. L'une était encadrée d'un côté et libre de l'autre tandis que la seconde était encadrée et en appui simple. Dans un second temps ils devaient appliquer les résultats obtenus au dimensionnement du mat et des tirants dans une configuration très simplifiée.

Ces questions ont été abordées par de nombreux candidats avec plus ou moins de réussite. Dans l'ensemble ils ont réussi à établir les équations d'équilibre local et l'équation de la ligne moyenne. Par contre trop de candidats ont buté sur le calcul d'une solution particulière de cette équation. Ensuite soit les candidats ne connaissaient pas le flambement, auquel cas il ne savaient pas calculer l'effort critique, soit ils ne savaient pas résoudre un problème 2D du type treillis, auquel cas ils ne pouvaient pas appliquer les résultats obtenus. En conséquence, le jury recommande aux futurs candidats de revoir le cours de flambement ainsi que le calcul de treillis.

Partie 5

L'objectif de cette partie était de valider le dimensionnement de l'enceinte de protection du POD (moteur hydraulique + réducteur + génératrice électrique) afin que le matériau qui la constitue ne plastifie pas. Les compétences nécessaires pour traiter cette question relevaient de la mécanique des milieux continus et du comportement élastique linéaire isotrope des matériaux. Dans un premier temps, les candidats étaient amenés à calculer le champ de contraintes dans l'enceinte et dans un second temps ils devaient appliquer les résultats obtenus au dimensionnement de celle-ci. Cela nécessitait de connaître et de savoir appliquer le critère de Von Mises.

Cette partie a été abordée par beaucoup de candidats mais avec plus ou moins de succès. En effet, à la surprise du jury, de nombreux candidats n'ont pas pu traiter correctement le problème posé car ils ne connaissent pas la loi de comportement d'un milieu élastique linéaire et isotrope ou ne savent pas

appliquer des conditions limites du type pression imposée. En conséquence, le jury conseille aux futurs candidats de s'entraîner à la formulation d'un problème d'élasticité.

Partie 6

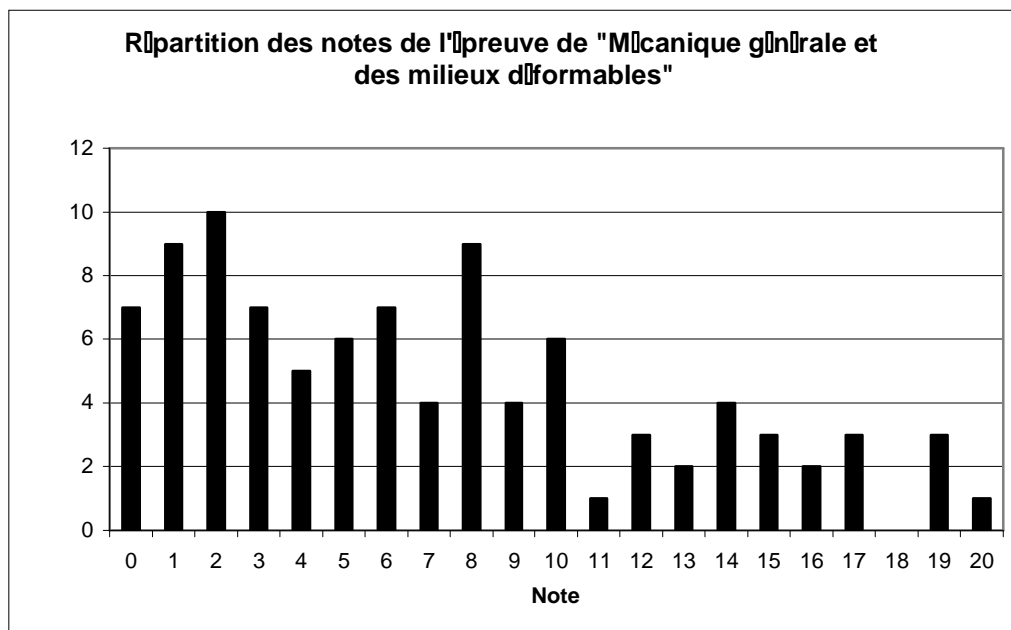
L'objectif de cette partie était de valider le dimensionnement des câbles destinés à transporter l'énergie électrique vers la terre (fonction technique FT9). En effet, les câbles sous-marins sont lestés par une gaine en plomb qui doit être isolée électriquement de l'âme conductrice et de l'eau. L'ensemble du câble est ainsi constitué d'une âme en aluminium surmonté de 3 gaines superposées (PVC, plomb, polyéthylène). Ce milieu multicouches doit être thermiquement compatible avec les impératifs électriques. Cette partie s'intéressait à la validation du dimensionnement en vérifiant que la température limite d'utilisation (90°C pour l'âme) était compatible avec la puissance électrique à transporter (200 kW).

Le candidat était d'abord invité à retrouver l'équation de la chaleur en coordonnées radiales cylindriques dans le cas général (avec génération interne de chaleur) puis à la résoudre pour établir le profil de température dans l'âme conductrice. Utilisant le concept de résistances thermiques pour modéliser le transfert par conduction dans les 3 gaines et l'échange convectif avec l'eau, le candidat pouvait ainsi calculer le flux de chaleur échangé entre le câble et l'eau puis en déduire la puissance électrique générée par unité de volume dans l'âme conductrice. Il vérifiait enfin que la valeur de la densité de courant obtenue était compatible avec la puissance produite par l'aile oscillante.

Cette partie comportait 11 questions. 64 candidats sur 96 n'ont pas traité cette 6^{ème} partie. Sur les 32 restants, une très large majorité n'a traité que les toutes premières questions et seuls 3 candidats ont traité l'intégralité du problème. Les outils mathématiques sous-tendus ne présentant pas de difficulté particulière, il semble qu'il faille chercher une explication vers une connaissance insuffisante ou une faible assimilation des concepts propres au transfert de chaleur. Enfin, il est à noter que les formules élémentaires d'électricité telles que celles donnant la résistance électrique $R=\rho L/S$ et la densité de courant $j=I/S$ ont fait défaut à de trop nombreux candidats.

Bilan global

96 candidats ont composé pour cette épreuve. La moyenne des résultats obtenus est de 7,5/20 et l'écart type de 5,4. La note maximale est 20/20 et la minimale est 0,2/20.



La répartition des notes est fournie sur le graphique ci-dessus. 38 candidats ont eu une note inférieure à 5/20. 30 candidats ont eu une note comprise entre 5 et 10. 16 candidats ont eu une note comprise entre 10 et 15. 12 candidats ont eu une note supérieure ou égale à 15. L'étalement des notes sur

toute la gamme de notation montre bien la capacité de l'épreuve à déceler clairement les candidats ayant développé les compétences recherchées par le concours dans cette épreuve.

Conseils du jury

Comme chaque année, le jury constate une grande disparité dans les copies : certaines sont d'une excellente qualité, alors que d'autres sont au contraire très pauvres. De nombreux candidats ont très bien fait certaines parties dans leur globalité, et ont raté d'autres parties dans leur globalité, ce qui traduit le caractère mono-disciplinaire de leurs compétences. Le jury rappelle que le concours cherche à déceler par cette épreuve les candidats ayant une vision large de la mécanique, et leur conseille donc de ne faire aucune impasse dans le programme.

Par ailleurs, le jury constate trop de fautes de calcul élémentaire. Il ne saurait que trop conseiller aux candidats de faire extrêmement attention aux calculs qu'ils mènent, et leur rappelle que la vérification de l'homogénéité des résultats doit être un réflexe obligatoire.

Le jury est par ailleurs sensible à la présentation et la clarté des explications. Il s'attend donc à ce que les copies soient claires et les explications bien détaillées. Certains candidats s'attachent à bien encadrer ou souligner les résultats de manière à bien faire ressortir l'essentiel. D'autres, au contraire, enchaînent les questions sans les numéroter et sans mettre en valeur les points essentiels, ce qui est très regrettable. Enfin, le jury juge inacceptables certaines copies contenant un nombre incroyable de fautes d'orthographe.