

EPREUVE DE MECANIQUE DES SYSTEMES
ET DES MILIEUX DEFORMABLES

**Eléments de corrigé et
commentaires**

1) Étude de liaison voiture - bogie

• Q-1-1)

Posons bogie : 0 et cherchons à déterminer [1/0]

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 2$$

$$b_3 = 3$$

$$\overline{V_0 1/0} = \overline{V_C 1/0} + \overline{OC} \wedge \overline{\omega 1/0}$$

$$\overline{V_C 1/0} = \overline{V_C 2/0} = \overline{V_A 2/0} + \overline{CA} \wedge \overline{\omega 2/0} = -b \cdot \bar{x} \wedge (\alpha'_{20} \cdot \bar{x} + \beta'_{20} \cdot \bar{y} + \gamma'_{20} \cdot \bar{z}) = -b \cdot \beta'_{20} \cdot \bar{z} + b \cdot \gamma'_{20} \cdot \bar{y}$$

$$\overline{OC} \wedge \overline{\omega 1/0} = (c \cdot \bar{x} + a \cdot \bar{y}) \wedge (\alpha'_{10} \cdot \bar{x} + \beta'_{10} \cdot \bar{y} + \gamma'_{10} \cdot \bar{z}) = a \cdot \gamma'_{10} \cdot \bar{x} - c \cdot \gamma'_{10} \cdot \bar{y} + (c \cdot \beta'_{10} - a \cdot \alpha'_{10}) \bar{z}$$

$$\Rightarrow \overline{V_0 1/0} = \begin{pmatrix} a \cdot \gamma'_{10} \cdot \bar{x} \\ + (b \cdot \gamma'_{20} - c \cdot \gamma'_{10}) \bar{y} \\ (-b \cdot \beta'_{20} + c \cdot \beta'_{10} - a \cdot \alpha'_{10}) \bar{z} \end{pmatrix}$$

de même $\overline{V_0 1/0} = \overline{V_D 1/0} + \overline{OD} \wedge \overline{\omega 1/0}$

$$\overline{V_D 1/0} = \overline{V_D 3/0} = \overline{V_B 3/0} + \overline{DB} \wedge \overline{\omega 3/0} = b \cdot \bar{x} \wedge (\alpha'_{30} \cdot \bar{x} + \beta'_{30} \cdot \bar{y} + \gamma'_{30} \cdot \bar{z}) = b \cdot \beta'_{30} \cdot \bar{z} - b \cdot \gamma'_{30} \cdot \bar{y}$$

$$\overline{OD} \wedge \overline{\omega 1/0} = -\overline{OC} \wedge \overline{\omega 1/0}$$

$$\Rightarrow \overline{V_0 1/0} = \begin{pmatrix} -a \cdot \gamma'_{10} \cdot \bar{x} \\ (-b \cdot \gamma'_{30} + c \cdot \gamma'_{10}) \bar{y} \\ (b \cdot \beta'_{30} - c \cdot \beta'_{10} + a \cdot \alpha'_{10}) \bar{z} \end{pmatrix}$$

En identifiant les deux expressions, on trouve :

$$\gamma'_{10} = 0 \Rightarrow \overline{V_0 1/0} \cdot \bar{x} = 0$$

$$\gamma'_{20} = -\gamma'_{30}$$

$$(-b \cdot \beta'_{20} + c \cdot \beta'_{10} - a \cdot \alpha'_{10}) = (b \cdot \beta'_{30} - c \cdot \beta'_{10} + a \cdot \alpha'_{10})$$

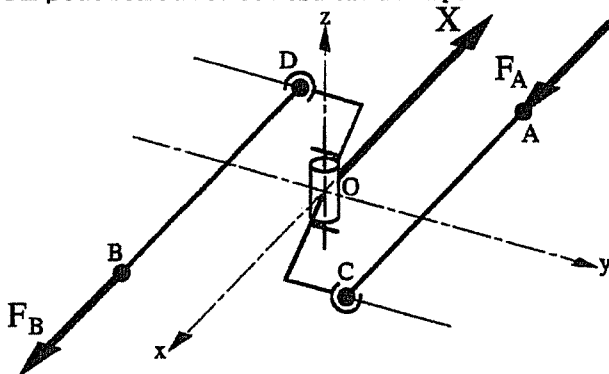
$$\Rightarrow [1/0] \begin{cases} \alpha'_{10} \cdot \bar{x} + \beta'_{10} \cdot \bar{y} \\ \overline{V_0} = \gamma'_{10} \cdot \bar{y} + z'_{10} \cdot \bar{z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow [V/B] \begin{cases} \alpha'_{VB} \cdot \bar{x} + \beta'_{VB} \cdot \bar{y} + \gamma'_{VB} \cdot \bar{z} \\ \overline{V_0} = y'_{VB} \cdot \bar{y} + z'_{VB} \cdot \bar{z} \end{cases}$$

Si les liaisons sont parfaites : $P^e[B \rightarrow V] = [B \rightarrow V][V/B]$

$$\Rightarrow [B \rightarrow V] \begin{cases} X \cdot \bar{x} \\ \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases}$$

On peut retrouver ce résultat de façon élémentaire :



$$Mt/Oz \Rightarrow F_A = F_B \Rightarrow [B \rightarrow V] \begin{cases} X \cdot \bar{x} \\ \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases}$$

• Q-1-2) et • Q-1-3)

Si l'on note, pour simplifier, "Z" l'ossature de biellettes articulées, les éléments limitant les mouvements sont :

pour le pompage : les ressorts de raideur globale $2.K_a$ (en effet "Z" est libre)

pour le ballant : les ressorts de raideur $2.K_r$ puis la butée de raideur infinie (en effet "Z" est libre)

pour le tamis : "Z" et les ressorts de raideur infinie

pour le roulis : les ressorts conduisant à une raideur $\frac{\Delta M}{\Delta \beta} = 2K_a \cdot h^2$ (en effet "Z" est libre)

pour le tangage : aucun élément ne l'interdit, la raideur est donc nulle

pour le lacet : les ressorts conduisant à une raideur $\frac{\Delta M}{\Delta \gamma} = 2K_r \cdot h^2$ (en effet "Z" est libre)

• Q-1-4)

L'intérêt d'une telle liaison complexe est donc d'avoir globalement, en l'absence d'éléments déformables interposés entre le bogie et la voiture, le comportement d'une liaison ponctuelle de normale \bar{x} . L'apport des éléments déformables respecte cette rigidité et limite alors les débattements par ailleurs autorisés.

2) Prédétermination des composants en respect d'un cahier des charges

Détermination des composants élastiques

• Q-2-1)

$$\begin{cases} M_c \cdot z_c'' = -k_{sp}(z_c - z_b) \\ M_b \cdot z_b'' = -k_{sp}(z_b - z_c) - k_{pp}(z_b - z_0 \cdot \cos \Omega t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} M_c \cdot z_c'' + k_{sp}z_c - k_{sp}z_b = 0 \\ -k_{sp}z_c + M_b \cdot z_b'' + (k_{sp} + k_{pp})z_b = k_{pp}z_0 \cdot \cos \Omega t \end{cases}$$

vibrations libres:

$$\det \begin{vmatrix} -M_c \omega^2 + k_{sp} & -k_{sp} \\ -k_{sp} & -M_b \omega^2 + k_{sp} + k_{pp} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{équation bicarrée aux pulsations}$$

$$M_c M_b \omega^4 - \omega^2 [M_c(k_{sp} + k_{pp}) + M_b k_{sp}] + k_{pp} k_{sp} = 0$$

$$\text{ou sur Laplace } \det \begin{vmatrix} M_c p^2 + k_{sp} & -k_{sp} \\ -k_{sp} & M_b p^2 + k_{sp} + k_{pp} \end{vmatrix} = 0 \quad p^2 = -\omega^2 \text{ soit numériquement}$$

$$75 \cdot 10^6 p^4 + p^2 (28000 \cdot k_{sp} + 25000 \cdot k_{pp}) + k_{sp} \cdot k_{pp} = 0 \Rightarrow$$

$$k_{pp} = -4000 \cdot \frac{p^2 (18750 \cdot p^2 + 7k_{sp})}{25000 \cdot p^2 + k_{sp}}$$

$$p = 2i\pi f \Rightarrow k_{pp} = 16.10^3 \pi^2 f^2 \cdot \frac{(-75000 \cdot \pi^2 \cdot f^2 + 7k_{sp})}{-10^5 \pi^2 \cdot f^2 + k_{sp}}$$

cahier des charges: k_{pp} et k_{sp} pour $f = 1,16$ Hz et pour $f = 7,3$ Hz

$$\Rightarrow \begin{cases} k_{pp} = 16.10^3 \pi^2 1,16^2 \cdot \frac{(-75000 \cdot \pi^2 \cdot 1,16^2 + 7k_{sp})}{-10^5 \pi^2 \cdot 1,16^2 + k_{sp}} \\ k_{pp} = 16.10^3 \pi^2 7,3^2 \cdot \frac{(-75000 \cdot \pi^2 \cdot 7,3^2 + 7k_{sp})}{-10^5 \pi^2 \cdot 7,3^2 + k_{sp}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_{sp1} = 1,96.10^6 \text{ N/m} \\ k_{pp} = 4,28.10^6 \text{ N/m} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} k_{sp2} = 3,82.10^6 \text{ N/m} \\ k_{pp} = 4,28.10^6 \text{ N/m} \end{cases}$$

choix

On peut vérifier que pour ces deux valeurs l'équation aux pulsations donne bien:

$$\omega_1 = 7,288 \text{ rad/s } (f_1 = 1,16 \text{ Hz}) \quad \omega_2 = 45,87 \text{ rad/s } (f_2 = 7,30 \text{ Hz})$$

Nécessité d'un amortissement

• Q-2-2)

Étude des vibrations forcées

On cherche des solutions sous la forme $\begin{cases} z_c = c \cdot \cos \Omega t \\ z_b = d \cdot \cos \Omega t \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-M_c \cdot \Omega^2 + k_{sp}) \cdot c - k_{sp} \cdot d = 0 \\ -k_{sp} \cdot c + [-M_b \cdot \Omega^2 + (k_{sp} + k_{pp})] \cdot d = k_{pp} \cdot z_0 \end{cases}$$

$$\text{soit: } c = \frac{k_{sp} \cdot k_{pp} \cdot z_0}{M_b M_c (\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} \quad \text{et} \quad d = \frac{k_{pp} \cdot z_0 (k_{sp} - M_c \Omega^2)}{M_b M_c (\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}$$

Exprimons la surcharge dynamique N au contact roue-sol

$$N = k_{pp} (z_b - z_0 \cos \Omega t) = k_{pp} z_0 \cos \Omega t \left[\frac{(k_{sp} - M_c \Omega^2) - M_b M_c (\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}{M_b M_c (\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} \right]$$

Par conséquent si Ω tend vers ω_1 ou ω_2 , N va devenir infiniment grand. Cela peut se produire puisque f_1 et $f_2 \in [0,5 \text{ Hz} ; 40 \text{ Hz}]$

De même $z_c = c \cdot \cos \Omega t = \frac{k_{sp} k_{pp} z_0}{M_b M_c (\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}$, on retrouve que z_c va devenir infiniment grand si Ω tend vers ω_1 ou ω_2 .

En l'absence d'amortisseur les conditions C2 et C3 ne peuvent donc être satisfaites.

3) Étude approfondie d'un composant : barre anti roulis

- Q-3-1) Le couple de rappel vaut $2pF$, l'angle de roulis (au premier ordre) $\frac{\delta}{p}$.

La raideur en roulis vaut donc $\frac{2p^2F}{\delta}$.

Dans l'étude de la barre non cintrée, la position des appuis (en D_1 et D'_1) n'était sans doute pas suffisamment bien précisée. Beaucoup de candidats les ont laissés à une distance r de ces points. Cette configuration plus compliquée a été comptée juste, les résultats obtenus sur la partie OA étant même reportés à la question 3-4 lorsque celle-ci n'avait pas été traitée

- Q-3-2) L'hypothèse de petite perturbation permet la superposition de deux configurations :

- OA indéformable et AC déformable

Barre AC encastrée en A, soumise à de la flexion : flèche en C $\frac{Fq^3}{3EI}$

- OA déformable et AC indéformable

Barre OA encastrée en O, soumise à de la torsion :

Angle unitaire de torsion $\frac{Fq}{GI_0}$; Rotation en A $\frac{Fq p}{GI_0}$; Flèche en C $\frac{Fq^2 p}{GI_0}$

Superposition : $\delta/F = \frac{q^3}{3EI} + \frac{q^2 p}{GI_0} = \frac{64q^2}{\pi E d^4} \left(\frac{q}{3} + p + \nu p \right) = 1,577 \cdot 10^{-6} \text{ m/N}$

Nous avons trouvé des résultats allant de $2,531 \cdot 10^{-26} \text{ mm/N}$ à 22918 m/N , avec des unités allant du m au Nm en passant par le Nm/rad.

- Q-3-3)

Les conditions de symétrie (symétrie géométrique et anti-symétrie du chargement) permettent de déduire qu'il y a invariance de la configuration d'étude par rotation d'angle π d'axe $O\bar{x}$, ce qui entraîne U_y, U_z, ω_y et ω_z nuls.

- Q-3-4) $F(\text{bogie} \rightarrow \text{barre}) = \begin{Bmatrix} -F \frac{p}{p-r} \bar{z} \\ \frac{p}{p-r} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_A$

Tronçon BC, avec $\overrightarrow{BP} = s\bar{x}$: $F(\text{CP} \rightarrow \text{PB}) = \begin{Bmatrix} F\bar{z} \\ -(q-r-s)F\bar{y} \end{Bmatrix}_P$

Tronçon AB : soit le repère local $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{z})$ où \bar{u} est dirigé vers le centre de courbure et \bar{v} est tangent à la ligne moyenne. Soit $\theta = (\bar{x}, \bar{u}) = (\bar{y}, \bar{v})$. $\overrightarrow{AP} = r(\bar{x} - \bar{u})$.

$$F(\text{BP} \rightarrow \text{PA}) = \begin{Bmatrix} F\bar{z} \\ [- (q-r)F \sin \theta + rF \cos \theta] \bar{u} + [- (q-r)F \cos \theta - rF - rF \sin \theta] \bar{v} \end{Bmatrix}$$

La composante du moment sur \bar{u} correspond à la flexion, la composante sur \bar{v} à la torsion.

$$\text{Tronçon OA, avec } \overline{OP} = s\bar{x} : F(\text{AP} \rightarrow \text{PO}) = \begin{Bmatrix} -F \frac{r}{p-r} \bar{z} \\ F \frac{rs}{p-r} \bar{x} - qF\bar{y} \end{Bmatrix}$$

$$\text{En O : } F(\text{OC} \rightarrow \text{OC}') = \begin{Bmatrix} -F \frac{r}{p-r} \bar{z} \\ -qF\bar{y} \end{Bmatrix}$$

• Q-3-5)

$$2U = \int_{\text{OC}} \frac{M_f^2}{EI} + \frac{M_t^2}{GI_0} ds = \frac{F^2(q-r)^3}{3EI} \quad \text{Flexion BC}$$

$$+ \frac{F^2 r}{4EI} (\pi(q-r)^2 + 4r(q-r) + \pi r^2) \quad \text{Flexion AB}$$

$$+ \frac{F^2 r^2 (p-r)}{3EI} \quad \text{Flexion OA}$$

$$+ \frac{F^2 r}{4GI_0} (\pi(q-r)^2 + 4r(q-r) + (3\pi-8)r^2) \quad \text{Torsion AB}$$

$$+ \frac{F^2 q^2 (p-r)}{GI_0} \quad \text{Torsion OA}$$

Travail des efforts extérieurs : nul en O, nul en A et égal à $F\delta$ en C.

$$\text{Justification en O : } F(\text{OC} \rightarrow \text{OC}') = \begin{Bmatrix} -F \frac{r}{p-r} \bar{z} \\ -qF\bar{y} \end{Bmatrix}, \text{ avec } U_z \text{ et } \omega_y \text{ nuls}$$

• Q-3-6).

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{F(q-r)^3}{3EI} + \frac{Fr}{4EI} (\pi(q-r)^2 + 4r(q-r) + \pi r^2)$$

$$+ \frac{Fr^2(p-r)}{3EI} + \frac{Fr}{4GI_0} (\pi(q-r)^2 + 4r(q-r) + (3\pi-8)r^2) + \frac{Fq^2(p-r)}{GI_0}$$

non demandé:

$$\frac{\delta}{F} = \left(\frac{3\pi-10}{6EI} + \frac{\pi-2}{GI_0} \right) r^3 + \left(\frac{(4-\pi)q}{2EI} + \frac{p}{3EI} + \frac{(2-\pi)q}{2GI_0} \right) r^2 + \left(\frac{(\pi-4)q^2}{4EI} + \frac{(\pi-4)q^2}{4GI_0} \right) r + \left(\frac{q^3}{3EI} + \frac{q^2 p}{GI_0} \right)$$

$$\text{numériquement : } \frac{\delta}{F} = 1,43765 \cdot 10^{-6} r^3 + 2,54481 \cdot 10^{-6} r^2 - 7,23968 \cdot 10^{-7} r + 1,57678 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{\partial \delta / F}{\partial r} = 0 \Rightarrow r = 0,1283 \text{ ou } r = -1,308$$

$$\text{Pour } r = 0,1283 \quad \frac{\partial^2 \delta / F}{\partial r^2} = 0 \Rightarrow \text{il s'agit d'un minimum} \quad \frac{F}{\delta} = 6,54 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

La raideur maximale en roulis vaut donc $7,36 \cdot 10^5 \text{ Nm/rd}$.

$$\text{Pour } r = 0,15 \quad \frac{F}{\delta} = 6,53 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

La raideur en roulis pour $r = 0,15 \text{ m}$ vaut donc $7,35 \cdot 10^5 \text{ Nm/rd}$.

Pour un encombrement donné (p et q fixés), ce n'est donc ni le rayon de cintrage nul, ni le rayon de cintrage maximum qui conduit à la raideur maximum de la barre.

• Q-3-7)

Sur OA : M_t est constant et M_f est linéaire, maximum en A.

Sur BC : M_t est nul et M_f est linéaire, maximum en B.

M_t et M_f sont continus, la section la plus sollicitée est donc sur [AB].

- Q-3-8) Dans une section quelconque de [AB], la contrainte normale (due à la composante de flexion) vaut $\sigma = \frac{M_f}{I} z$. Elle est maximale pour z maximum.

La contrainte de cisaillement (due à la composante de torsion) vaut $\tau = \frac{M_t}{I_0} r$. Elle est maximale sur toute la périphérie.

Le point le plus sollicité sera donc le point situé à $z = d/2$.

En se plaçant dans le cas où $r = q/2$, les moments de flexion et de torsion sont, sur [AB] :

$$M_t = -rF(\cos\theta + \sin\theta + 1) \text{ et } M_f = rF(\cos\theta - \sin\theta), \text{ pour } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right].$$

Le tenseur des contraintes au point le plus sollicité s'écrit donc, dans $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{z})$:

$$\begin{bmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rdF(\cos\theta - \sin\theta)/2I & 0 & -rdF(\cos\theta + \sin\theta + 1)/4I \\ 0 & 0 & 0 \\ -rdF(\cos\theta + \sin\theta + 1)/4I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• Q-3-9)

Critère de Tresca : $\text{Sup}_{ij}(\sigma_i - \sigma_j) \leq R_e$ où σ_i et σ_j sont des contraintes principales.

Ici, les contraintes principales valent $0, \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$ et $\frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$.

On retrouve bien $\text{Sup}_{ij}(\sigma_i - \sigma_j) = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$, soit $\frac{rdF}{2I} \sqrt{3 + 2\sin\theta + 2\cos\theta}$

Critère de Von Misès : $\sqrt{\frac{3}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)} \leq R_e$ où les s_i sont les contraintes principales déviatoriques. Ici, la contrainte normale moyenne vaut $\frac{\sigma}{3}$ d'où les contraintes principales

déviatoriques : $-\frac{\sigma}{3}, \frac{\sigma}{6} + \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$ et $\frac{\sigma}{6} - \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$

On retrouve $\sqrt{\frac{3}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ soit $\frac{rdF}{2\sqrt{2}I} \sqrt{5 - \cos\theta \sin\theta + 3\sin\theta + 3\cos\theta}$

• Q-3-10)

Sur AB, c'est-à-dire pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, les contraintes équivalentes de Tresca et Von Misès sont strictement croissantes. Le maximum est donc atteint en A.

La contrainte équivalente de Tresca en A vaut $\frac{\sqrt{5}rdF}{2I}$, et celle de Von Misès $\frac{rdF}{I}$.

Pour un angle de roulis de 3° , soit $0,0524$ rad, le couple de rappel vaut $3,85 \cdot 10^4$ Nm, soit un effort F en bout de barre de $2,57 \cdot 10^4$ N.

La contrainte équivalente de Tresca en A vaut 700 MPa. Celle de Von Misès 630 MPa.

La géométrie de la barre ne conduit pas à un important coefficient de concentration de contrainte. Ce n'est pas un élément de sécurité, d'où un faible coefficient de sécurité. La tenue statique est donc assurée.

En fatigue, le nombre de cycles correspondant à cette sollicitation étant faible (les butées de roulis ne sont pas atteintes en service normal), le fait que la contrainte équivalente maximale soit voisine de la limite d'endurance garantit la tenue de la barre.

4) Étude du comportement de la suspension primaire

• Q-4-1)

Aucune composante sur \bar{y}_{v_i} , nous pouvons donc en déduire : $-mg \cdot \sin \Phi = -m\omega^2 R \cdot \cos \Phi$

$$\Rightarrow \tan \Phi = \frac{V^2}{Rg}$$

$$\underline{AN} : \tan \Phi = 0,1574 \quad \Rightarrow \Phi = 8,94^\circ = 0,156 \text{ rad}$$

$$\frac{\Delta z}{v} = \sin \Phi \Rightarrow \Delta z = 1,74 \sin 8,94^\circ \quad \text{soit} \quad \Delta z = 0,272 \text{ m}$$

• Q-4-2) L'évolution des inconnues d'inter-effort en fonction du temps ne peut être déterminée sans rechercher l'évolution des inconnues cinématiques en fonction du temps. Il faudra donc écrire un système de 13 équations à 13 inconnues : les 7 inconnues cinématiques et les 6 inconnues du contact roue-rail recherchées.

Une erreur s'était glissée dans l'énoncé : les composantes transversales des actions entre les roues et le rail sont portées par le rail droit page 9 et étaient demandées sur le rail gauche dans cette question. C'était bien sûr Y_{1d} et Y_{2d} qu'il fallait rechercher. Seuls trois candidats ont relevé cette erreur, et elle n'a gêné personne.

• Q-4-3) Les 4 contacts ponctuels permettent d'écrire 4 équations scalaires de liaison.

• Q-4-4) Les 4 équations de liaison associées au contact roue-rail sont 4 des 13 équations recherchées. Il est nécessaire de trouver 9 équations indépendantes issues du théorème général de la dynamique :

Résultante pour 1 (puis 2) en projection sur \bar{z}_b

Moment pour 1 (puis 2) en B_1 (puis B_2) en projection sur \bar{x}_b

Moment pour $\Sigma = 1+2+b$ en G_b (équation vectorielle, 3 projections au choix)

Résultante pour $\Sigma = 1+2+b$ en projection sur 2 axes non liés perpendiculaires à \bar{x}_0

• Q-4-5) En considérant les paramètres z_b , α_b , β_b , λ_1 , λ_2 , β_1 et β_2 indépendants (paramétrage incompatible avec les 4 équations de contact roue-rail), il est possible d'écrire 7 équations de Lagrange, faisant intervenir les 4 efforts normaux aux contacts. Pour faire intervenir les deux efforts transversaux, il est nécessaire d'introduire 2 paramètres virtuels supplémentaires les faisant travailler. Une solution est de paramétrer les mouvements de lacet et de ballant. Il est ainsi possible d'écrire 9 équations de Lagrange, faisant intervenir 15 paramètres (les 7 inconnues cinématiques, les 6 inconnues du contact roue-rail, le lacet et le ballant). Il suffit d'annuler a posteriori le lacet et le ballant et d'ajouter les 4 équations de liaisons (contact roue-rail) pour obtenir le système 13x13 recherché.

• Q-4-6)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI_{1d}.z_{v1}} = 0 &\Rightarrow (\overrightarrow{OG_b} + \overrightarrow{G_b B_1} + \overrightarrow{B_1 A_{1d}} + \overrightarrow{A_{1d} I_{1d}}).z_{v1} = 0 \\ &\Rightarrow [(R + z_b).z_0 + x_b.x_0 + \frac{e}{2}.x_b + \lambda_1.z_b - \frac{v}{2}.y_1 - R.z_{v1}].z_{v1} = 0 \\ &\Rightarrow (R + z_b).\cos \Phi_1 - \frac{e}{2}\sin \alpha_b.\cos \Phi_1 + \lambda_1(\sin \Phi_1 \sin \beta_b + \cos \Phi_1 \cos \beta_b \cos \alpha_b) \\ &\quad - \frac{v}{2}[-\sin \Phi_1 \cos(\beta_1 + \beta_b) + \cos \Phi_1 \cos \alpha_b \sin(\beta_1 + \beta_b)] - R = 0 \\ &\text{soit au premier ordre : } z_b - \frac{e}{2}\alpha_b + \lambda_1 + \frac{v}{2}(\Phi_1 - \beta_1 - \beta_b) = 0 \end{aligned}$$

Les mêmes équations écrites en I_{1g} , I_{2d} et I_{2g} permettent d'obtenir le système donné.

Calcul de l'énergie cinétique réduite (non demandée)

$$T(b/R_0) = \frac{1}{2} [M_b(v_0^2 + \dot{z}_b^2) + A_b \dot{\beta}_b^2 + B_b \dot{\alpha}_b^2 \cos^2 \beta_b + C_b \dot{\alpha}_b^2 \sin^2 \beta_b]$$

$$T(1/R_0) = \frac{1}{2} [M_E \bar{V}_{B_1}^2 + \bar{\omega}_{B_1/R_0} \bar{I}_{B_1} \bar{\omega}_{B_1/R_0}]$$

$$\overrightarrow{\omega(1/R_0)} = \dot{\theta}_1 \overrightarrow{y_1} + \dot{\beta}_1 \overrightarrow{x_b} + \dot{\beta}_b \overrightarrow{x_b} + \dot{\alpha}_b \overrightarrow{y_0} \quad \text{avec } \overrightarrow{y_0} = \cos(\beta_b + \beta_1) \overrightarrow{y_1} - \sin(\beta_b + \beta_1) \overrightarrow{k_1}$$

$$\overrightarrow{OB_1} = (R + z_b).z_0 + x_b.x_0 + \frac{e}{2}.x_b + \lambda_1.z_b$$

$$\bar{V}_{B_1}^{R_0} = v_0 \overrightarrow{x_0} + \dot{z}_b \overrightarrow{z_0} - \frac{e}{2} \dot{\alpha}_b \overrightarrow{k_b} + \lambda_1 \overrightarrow{z_b} + \lambda_1 (\dot{\alpha}_b \cos \beta_b \overrightarrow{x_b} - \dot{\beta}_b \overrightarrow{y_b})$$

En déduisant $\bar{V}_{B_2}^2$ à partir de $\bar{V}_{B_1}^2$ en remplaçant e par $-e$ et λ_1 par λ_2 et en linéarisant à l'ordre 2 :

$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \left[M v_0^2 + M_b \dot{z}_b^2 + A_e (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) + A_b \dot{\beta}_b^2 + (B_b + 2B_e) \dot{\alpha}_b^2 + v_0 \left(\frac{4B_e}{R} \dot{\alpha}_b - 4M_e \dot{z}_b \alpha_b - 4M_e z_b \dot{\alpha}_b \right) \right]$$

$$\text{avec } M = M_b + 2M_e + 2 \frac{B_e}{R^2}$$

• Q-4-7)

Le paramétrage choisi garantit la nullité de la composante verticale de la vitesse roue-rail au point de contact (les efforts normaux ne travaillent donc pas) et la nullité des composantes tangentielles (les efforts transversaux ne travaillent donc pas non plus). Le rail étant lié au sol, supposé galiléen, aucune composante d'action de contact intervient dans l'expression de la puissance.

• Q-4-8) La puissance développée par les actions extérieures à l'ensemble Σ isolé, peut donc s'écrire :

$$P_{\Sigma}^g = -M_b g z_b' - M_e g z_0 \cdot \bar{V}_{B_1}^g - M_e g z_0 \cdot \bar{V}_{B_2}^g - (M_v \frac{g}{2} + K_{sp} z_b) z_b' - K_{sr} \beta_b \beta_b'$$

La puissance développée par les actions extérieures à l'ensemble Σ isolé, peut donc s'écrire à l'ordre 2:

$$P_{\Sigma \text{ordre } 2}^g = -[(M_b + \frac{M_v}{2})g + K_{sp} z_b] z_b' - K_{sr} \beta_b \beta_b'$$

Exprimons la puissance développée par les efforts intérieurs à Σ .

$$E_p(\text{ressort1d}) = \frac{K}{2} (\Delta L_0 + \lambda_1 - h\beta_1)^2 = \frac{K}{2} [(\Delta L_0 + \frac{e}{2}\alpha_b - z_b - h(\Phi_1 - \beta_b))]^2$$

$$\text{d'où : } P_{\text{intressort1d}} = -\frac{dE_p}{dt} = -K[(\Delta L_0 + \frac{e}{2}\alpha_b - z_b - h(\Phi_1 - \beta_b))][\frac{e}{2}\alpha'_b - z'_b + h\beta'_b]$$

$$\text{de même : } P_{\text{intressort1g}} = -K[(\Delta L_0 + \frac{e}{2}\alpha_b - z_b + h(\Phi_1 - \beta_b))][\frac{e}{2}\alpha'_b - z'_b - h\beta'_b]$$

$$P_{\text{intressort2d}} = -K[(\Delta L_0 - \frac{e}{2}\alpha_b - z_b - h(\Phi_2 - \beta_b))][-\frac{e}{2}\alpha'_b - z'_b + h\beta'_b]$$

$$P_{\text{intressort2g}} = -K[(\Delta L_0 - \frac{e}{2}\alpha_b - z_b + h(\Phi_2 - \beta_b))][-\frac{e}{2}\alpha'_b - z'_b - h\beta'_b]$$

Il est donc possible d'exprimer les coefficients de puissance partiels provenant des puissances intérieures :

$$\Pi_{\text{int}z'_b} = 2K(\Delta L_0 + \frac{e}{2}\alpha_b - z_b) + 2K(\Delta L_0 - \frac{e}{2}\alpha_b - z_b) = 4K(\Delta L_0 - z_b)$$

$$\Pi_{\text{int}\alpha'_b} = -K\frac{e}{2}(\Delta L_0 + \frac{e}{2}\alpha_b - z_b) + K\frac{e}{2}(\Delta L_0 - \frac{e}{2}\alpha_b - z_b) = -K\frac{e^2}{2}\alpha_b$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}\beta'_b} &= -Kh(\Delta L_0 + \frac{e}{2}\alpha_b - z_b - h(\Phi_1 - \beta_b)) + Kh(\Delta L_0 + \frac{e}{2}\alpha_b - z_b + h(\Phi_1 - \beta_b)) \\ &\quad - Kh(\Delta L_0 - \frac{e}{2}\alpha_b - z_b - h(\Phi_2 - \beta_b)) + Kh(\Delta L_0 - \frac{e}{2}\alpha_b - z_b + h(\Phi_2 - \beta_b)) \\ &= 2Kh^2(\Phi_1 - \beta_b) + 2Kh^2(\Phi_2 - \beta_b) \end{aligned}$$

Les trois équations de Lagrange linéarisées peuvent donc être écrites :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\Sigma}^g}{\partial z'_b} &= M_b z''_b - 2M_e v_0 \alpha_b ; \quad \frac{\partial T_{\Sigma}^g}{\partial z_b} = -2M_e v_0 \alpha'_b \Rightarrow M_b z''_b = 4K(\Delta L_0 - z_b) - [g(M_b + \frac{M_v}{2}) + K_{sp} z_b] \\ &\Rightarrow M_b z''_b + z_b(4K + K_{sp}) = 4K\Delta L_0 - g(M_b + \frac{M_v}{2}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T_{\Sigma}^g}{\partial \alpha'_b} = (B_b + 2B_e)\alpha'_b + \frac{2B_e}{R}v_0 - 2M_e v_0 z_b ; \quad \frac{\partial T_{\Sigma}^g}{\partial \alpha_b} = -2M_e v_0 z'_b \Rightarrow (B_b + 2B_e)\alpha''_b + K\frac{e^2}{2}\alpha_b = 0$$

$$\frac{\partial T_{\Sigma}^g}{\partial \beta'_b} = A_b \beta'_b ; \quad \frac{\partial T_{\Sigma}^g}{\partial \beta_b} = 0 \Rightarrow A_b \beta''_b + \beta_b(K_{sr} + 4Kh^2) = 2Kh^2(\Phi_1 + \Phi_2)$$

• Q-4-9)

L'équation de Lagrange relative à z_b correspond à l'équation de résultante pour b en projection sur \vec{z}_0 , celle relative à α_b à la somme des équations de moment en G_b pour b , en B_1 pour 1 et en B_2 pour 2 en projection sur \vec{y}_0 et celle relative à β_b à l'équation de moment en G_b pour b en projection sur \vec{x}_b .

Ces équations sont bien indépendantes des conséquences scalaires demandées.

• Q-4-10) Seules deux équations encadrées en gras étaient demandées

1) Résultante pour 1 (puis 2) en projection sur \bar{z}_b (à l'ordre 1)

$$-M_{eg} - K(\Delta L_0 + \lambda_1 - h\beta_1) - K(\Delta L_0 + \lambda_1 + h\beta_1) + Q_{1d} + Q_{1g} + Y_{1d}(\Phi_1 - \beta_b) = 0$$

Soit :
$$0 = -M_{eg} - 2K(\Delta L_0 + \lambda_1) + Q_{1d} + Q_{1g} + Y_{1d}(\Phi_1 - \beta_b)$$

Et pour l'essieu 2 :
$$0 = -M_{eg} - 2K(\Delta L_0 + \lambda_2) + Q_{2d} + Q_{2g} + Y_{2d}(\Phi_2 - \beta_b)$$

2) Moment pour 1 (puis 2) en B_1 (puis B_2) en projection sur \bar{x}_b

$$\bar{\delta}_{B_1}^g(1) \cdot \bar{x}_b = \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\bar{\sigma}_{B_1}^g(1) \cdot \bar{x}_b}_{A_e(\beta'_1 + \beta'_b)} \right] - \bar{\sigma}_{B_1}^g(1) \cdot \frac{d^g \bar{x}_b}{dt} \quad -\alpha'_b \bar{k}_b$$

$$\bar{\sigma}_{B_1}^g(1) = A_e(\beta'_1 + \beta'_b) \bar{x}_b + B_e[(\theta'_1 + \alpha'_b \cos(\beta_b + \beta_1)) \bar{y}_1 - A_e \alpha'_b \sin(\beta_b + \beta_1) \bar{k}_1]$$

$$\bar{y}_1 \cdot \bar{k}_b = \sin(\beta_b + \beta_1) \quad \bar{k}_1 \cdot \bar{k}_b = \cos(\beta_b + \beta_1)$$

D'où :

$$\bar{\delta}_{B_1}^g(1) \cdot \bar{x}_b = B_e[(\theta'_1 + \alpha'_b \cos(\beta_b + \beta_1)) \alpha'_b \sin(\beta_b + \beta_1) - A_e \alpha'_b \sin(\beta_b + \beta_1) [\alpha'_b \cos(\beta_b + \beta_1)]] + A_e(\beta''_1 + \beta''_b)$$

Soit à l'ordre 1 :
$$\bar{\delta}_{B_1}^g(1) \cdot \bar{x}_b = A_e(\beta''_1 + \beta''_b)$$

Pour les actions extérieures à 1 :

rails :
$$\overline{B_1 A_{1d}} \wedge (Y_{1d} \bar{y}_{v1} + Q_{1d} \bar{z}_{v1}) = RY_{1d} - \frac{v}{2} Q_{1d}$$

ressorts :
$$\left. \begin{array}{l} -h\bar{y}_1 \wedge [-K(\Delta L_0 + \lambda_1 - h\beta_1) \bar{k}_1] \\ h\bar{y}_1 \wedge [-K(\Delta L_0 + \lambda_1 + h\beta_1) \bar{k}_1] \end{array} \right\} \Rightarrow -2Kh^2\beta_1$$

d'où pour l'essieu 1 :

$$A_e(\beta''_1 + \beta''_b) = RY_{1d} - \frac{v}{2}(Q_{1d} - Q_{1g}) - 2Kh^2\beta_1$$

Et pour l'essieu 2 :
$$A_e(\beta''_2 + \beta''_b) = RY_{2d} - \frac{v}{2}(Q_{2d} - Q_{2g}) - 2Kh^2\beta_2$$

3) Moment pour $\Sigma = 1+2+b$ en G_b en projection sur \bar{z}_0 :

$$B_e \frac{v_0}{R} (\Phi'_1 + \Phi'_2) = \frac{e}{2} [(Y_{1d} - Y_{2d}) + \Phi_2(Q_{2d} + Q_{2g}) - \Phi_1(Q_{1d} + Q_{1g})]$$

4) Résultante pour $\Sigma = 1+2+b$ en projection sur \bar{y}_0 :

$$Y_{1d} + Y_{2d} - (Q_{1d} + Q_{1g})\Phi_1 - (Q_{2d} + Q_{2g})\Phi_2 = 0$$

5) Prédimensionnement du freinage mécanique

Position du problème

Dans cette partie, on s'intéresse à la partie du freinage assurée par les bogies porteurs. Dans le cas du TVG, ce freinage est assuré par des freins à disques en acier non ventilés avec des garnitures frittées. Ces disques sont des couronnes en galettes forgées de 45mm d'épaisseur et dont les diamètres extérieur et intérieur sont respectivement de 0,64m et 0,34m. Les garnitures sont conçues

pour assurer une répartition de pression uniforme et pour lutter contre la formation de cercles chauds.

Lors d'un freinage d'urgence, l'énergie mécanique est transformée par le frottement entre les garnitures et le disque en chaleur qui est emmagasinée principalement dans le disque et en partie, 8%, dans les garnitures. Ainsi le disque chauffe, et il n'est pas refroidi. En effet, les échanges par convection et par rayonnement sont négligeables au cours d'un freinage d'urgence. La conservation des propriétés mécaniques des disques nécessite, en particulier, que leur température n'excède pas une température maximale, T_{max} d'environ $400^{\circ}C$.

On proposait dans cette cinquième partie, d'estimer le nombre de disques nécessaire à installer sur les bogies porteurs pour assurer un freinage d'urgence et ceci pour une géométrie de disque et une température maximale données. Dans un premier temps, on cherche à estimer l'énergie qui doit être dissipée par ces disques. On réalise ensuite une première détermination du nombre de disques en les considérant comme de simples capacités calorifiques. Enfin, on affine l'estimation en tenant compte du temps de diffusion de la chaleur dans le disque par un calcul de conduction pure.

Estimation de l'énergie à dissiper par les disques

Lors d'un freinage d'arrêt à $V_0 = 300$ km/h, l'énergie totale à dissiper est constituée de l'énergie cinétique initiale de translation du train à laquelle on ajoute une énergie complémentaire qui représente environ 4%.

• **Q-5-1)** Cette énergie complémentaire correspond à l'énergie cinétique des équipements tournants (roues, moteur ...), de sorte que l'énergie totale à dissiper représente environ $1.7 \cdot 10^9$ Joules. En effet :

$$E_{tot} = E_{cinétique} = \frac{1}{2} M V_0^2 \cdot (1 + 0.04) = 1.7 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Une partie de cette énergie est dissipée par la résistance à l'avancement R qui s'exerce sur le train. Cette résistance peut être approchée par l'expression suivante :

$$R = A + B \cdot V + C \cdot V^2$$

où V représente la vitesse du train. Le terme constant caractérise les frottements dans les paliers et la résistance au roulement. Le second terme est essentiellement associé au frottement des roues sur les faces latérales des rails.

• **Q-5-2)** Le dernier terme en V^2 représente la résistance aérodynamique, c'est à dire la traînée de pression, celle de frottement et la traînée des accidents de géométrie comme le pantographe et les césures.

Les concepteurs ferroviaires disposent de formules empiriques pour estimer les coefficients A , B et C en fonction du type de train, de sa charge, de sa longueur etc.... Pour le TGV concerné par l'étude, on peut utiliser les valeurs suivantes :

$$A = 4460 \text{ N} ; B = 174,6 \text{ N/ms}^{-1} ; C = 11,3 \text{ N/(ms}^{-1})^2.$$

• **Q-5-3)** Lors d'un freinage, l'énergie dissipée par la résistance à l'avancement s'écrit :

$$E_R = \int_0^{t_{freinage}} (A + B V + C V^2) \cdot V \cdot dt$$

Elle dépend de la loi de freinage. Pour un freinage d'arrêt uniformément décéléré, on peut écrire :

$$V = V_0 - at \Rightarrow dV = -a \cdot dt \Rightarrow E_R = \int_{V_0}^0 -\frac{1}{a} (A + B V + C V^2) \cdot V \cdot dV$$

Soit après intégration :

$$E_R = \frac{1}{a} \left[\frac{A}{2} V^2 + \frac{B}{3} V^3 + \frac{C}{4} V^4 \right]_0^{V_0} \approx 185 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Cette énergie représente environ 10% de l'énergie totale à dissiper.

En tenant compte de l'énergie dissipée par les freins rhéostatiques et mécaniques des motrices, 18%, et de celle emmagasinée dans les garnitures, 8%, on obtient une estimation de l'énergie qui doit être absorbée par l'ensemble des disques des bogies porteurs : $E_{\text{disques}} = 1,09 \cdot 10^9 \text{ J}$.

Première estimation : approche quasi-statique

On considère que le transfert de chaleur dans le disque est quasi-statique au sens thermodynamique. C'est à dire qu'à chaque instant la température du disque est uniforme.

• **Q-5-4)** Les disques apparaissent alors comme de simples puits de chaleur de capacité calorifique massique C , et l'énergie maximale admissible par les disques s'écrit :

$$E_{\text{disques}} = N \cdot M_{\text{disque}} \cdot C \cdot (T_{\text{max}} - T_0)$$

où N désigne le nombre de disques et M_{disque} la masse d'un disque.

• **Q-5-5)** On en déduit, pour une température initiale des disques de 20°C et une température maximale admissible de 400°C , une estimation du nombre de disques total nécessaire pour absorber l'énergie : $N=75$. Soit 7 disques par bogie.

Estimation de la température de surface du disque

L'estimation précédente est une estimation par défaut. Elle suppose que la température est uniforme dans la couronne du disque en contact avec les garnitures, c'est à dire que le temps de diffusion de la chaleur dans le disque est négligeable par rapport au temps de freinage. On se propose maintenant de tenir compte de ce temps de diffusion qui provoque une surchauffe sur la surface du disque.

Modélisation

La forme du disque (épaisseur mince, échange négligeable aux périphéries du disque) et la conception des garnitures (flux de chaleur homogène) permettent de supposer, en première approximation, que les isothermes sont des plans parallèles aux faces du disque. De sorte que la diffusion de la chaleur dans le disque est sensiblement la même que celle qui se produit dans une plaque infinie soumise à un flux de chaleur uniforme sur ses deux faces q_0 . Pour simplifier, on supposera ce flux constant au cours du freinage.

• **Q-5-6)** Le flux q_0 correspond à la puissance par unité de surface transmise au disque par ses surfaces. Soit en introduisant le temps de freinage t_{freinage} , la surface d'échange d'un disque $2S$ et le nombre de disques N_{disques} , on obtient la relation :

$$q_0 \cdot 2S \cdot N_{\text{disques}} = \frac{E_{\text{disques}}}{t_{\text{freinage}}} \quad \text{avec} \quad S = \pi \cdot \left(\frac{D_{\text{ext}}^2}{4} - \frac{D_{\text{int}}^2}{4} \right)$$

Formulation du problème

L'équation qui régit l'évolution de la température à l'intérieur du mur (le disque), est l'équation de la chaleur.

• **Q-5-7)** Cette équation s'obtient en injectant la loi de Fourier et l'équation d'état qui lie, pour un solide parfait, l'énergie interne et la température, dans l'équation locale d'énergie interne dans laquelle on a négligé l'énergie de déformation (hypothèse de solide parfait). Enfin, compte tenu de la modélisation retenue à une dimension spatiale, on obtient :

$$\alpha \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\lambda}{\rho C}$$

Cette équation est une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre en espace et du premier ordre en temps. Il est donc nécessaire de lui adjoindre deux conditions en espace (conditions aux limites) et une condition en temps (condition initiale).

• **Q-5-8)** Les conditions aux limites traduisent l'injection du flux de chaleur q_0 par chaque face. De façon générale, le flux de chaleur apporté au milieu à travers une surface S de normale \mathbf{n} (sortante) est donné par

$$\phi = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} S = \lambda \mathbf{grad} T \cdot \mathbf{n} S$$

Par suite les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ se mettent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} &= q_0 \\ +\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} &= q_0 \end{aligned}$$

La condition en temps est donnée par la condition initiale :

$$T(x, t = 0) = T_0$$

Forme de la solution

Le système d'équations obtenu est linéaire mais non homogène au niveau des conditions aux limites et de la condition initiale. On peut ramener facilement la condition initiale à une condition homogène en faisant le changement de variable $\theta = T - T_0$.

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_0 \\ +\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = q_0 \\ \theta(x; t = 0) = 0 \end{cases}$$

La solution du problème se traduit alors par une relation entre les 6 paramètres $\theta = T - T_0$, α , q_0/λ , L , x et t .

• **Q-5-9)** L'analyse dimensionnelle (théorème de Vaschy-Buckingham) permet de préciser cette relation qui doit ne faire apparaître qu'un système de nombres sans dimension indépendants. Dans notre cas, il y a 6 paramètres caractérisés par 3 dimensions (K , m , s). Le nombre de nombres sans dimension indépendants est donc de $6-3=3$, et un système indépendant peut être :

$$\frac{(T - T_0)\lambda}{q_0 L}, \quad \frac{x}{L}, \quad \frac{\alpha t}{L^2}$$

Ce système n'est bien sûr pas unique. La solution du problème se met alors naturellement sous la forme :

$$\frac{(T - T_0)\lambda}{q_0 L} = f\left(\frac{x}{L}, \frac{\alpha t}{L^2}\right)$$

Résolution

On revient au système d'équations initiales. Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles, on cherche à se ramener à une équation différentielle ordinaire. Pour cela on utilise, pour éliminer la variable d'espace, la transformation intégrale suivante :

$$\left(\begin{array}{l} \text{transformation} \\ \text{intégrale} \end{array} \right) \tilde{T}_n(t) = \int_0^L X_n(x) \cdot T(x,t) dx$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{formule} \\ \text{d'inversion} \end{array} \right) T(x,t) = \sum_n X_n(x) \cdot \tilde{T}_n(t)$$

où les fonctions $X_n(x)$ sont les fonctions propres normalisées du problème aux valeurs propres suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 X_n}{dx^2} + \beta_n^2 X_n(x) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq L \\ \frac{dX_n}{dx} = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } x = L \end{array} \right.$$

Par intégration, on obtient :

$$\beta_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{et} \quad X_n = C_n \cos(\beta_n x) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

Les constantes C_n de normalisation valent $\sqrt{\frac{2}{L}}$ pour $n \neq 0$ et $\sqrt{\frac{1}{L}}$ pour $n = 0$.

• **Q-5-10)** En appliquant la transformation à l'équation de la chaleur, on obtient :

$$\int_0^L X_n(x) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cdot dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^L X_n(x) \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dx$$

La première intégrale s'intègre par partie deux fois et les parties intégrées se calculent avec les conditions aux limites. La seconde intégrale est évidente après avoir sorti la dérivée temporelle du signe somme. On obtient ainsi une équation différentielle ordinaire linéaire à coefficients constants, en \tilde{T} .

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\tilde{T}_n}{dt} + \beta_n^2 \tilde{T}_n = D_n \quad \text{avec} \quad D_n = (1 + (-1)^n) \frac{q_0}{\lambda} C_n$$

• **Q-5-11)** Dans le cas $n=0$, on obtient :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\tilde{T}_0}{dt} = 2 \frac{q_0}{\lambda} C_0$$

• **Q-5-12)** En appliquant la transformation à la condition initiale, on obtient :

$$\tilde{T}_0(0) = T_0 L C_0 \quad \text{et} \quad \tilde{T}_n(0) = 0$$

• **Q-5-13)** L'intégration des équations 5-10 et 5-11 est immédiate. En utilisant les conditions initiales établies à la question précédente, on obtient alors :

$$\tilde{T}_0 = \frac{2\alpha q_0 C_0}{\lambda} t + T_0 C_0$$

$$\tilde{T}_n = \frac{q_0 C_n}{\lambda \beta_n^2} (1 + (-1)^n) \left[1 - e^{-\alpha \beta_n^2 t} \right]$$

En reportant ces expressions dans la formule d'inversion, après quelques calculs plus ou moins simples, la température peut être mise sous la forme suivante :

$$T - T_0 = \frac{q_0 L}{2\lambda} \left[Fo + \frac{1}{2} \left(2 \frac{x}{L} - 1 \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p^2} \cos \left(2p\pi \frac{x}{L} \right) \exp(-p^2 \pi^2 Fo) \right) \right]$$

où Fo est un nombre de Fourier qui désigne $Fo = \frac{4\alpha t}{L^2}$.

On constate bien que cette expression est conforme à la forme de la solution prédite par l'analyse dimensionnelle.

Par ailleurs, on montre que la série converge rapidement. De plus, elle tend vers 0 lorsque Fo augmente (c'est à dire lorsque le temps augmente). La correction qu'elle apporte est inférieure à 0,5% pour Fo > 0,5. Ainsi pour les valeurs de Fo pas trop petites, c'est à dire pour les temps pas trop petits, la température montre une évolution linéaire en temps et parabolique en espace.

- **Q-5-14)** Ce comportement est illustré sur la figure 5.1 qui représente l'évolution du rapport $\frac{(T-T_0)2\lambda}{q_0L}$ en fonction de Fo pour $\frac{x}{L}=1$ et 0,5, et en fonction de x/L pour différentes valeurs du nombre de Fourier.

Estimation du nombre de disques nécessaires

Revenons au problème du freinage et de l'estimation du nombre de disques.

- **Q-5-15)** En fin de freinage, soit $t \approx 80s$, le nombre de Fourier Fo vaut 1.9. La répartition de température est donc bien approchée par la solution quasi-stationnaire

$$T - T_0 = \frac{q_0L}{2\lambda} \left[Fo + \frac{1}{2} \left(2\frac{x}{L} - 1 \right)^2 - \frac{1}{6} \right]$$

Bien évidemment le maximum de température se situe sur les faces en $x=0$ ou $x=L$.

- **Q-5-16)** En imposant que la température des faces n'excède pas T_{max} , et en reportant la valeur de q_0 en fonction du nombre de disques obtenue à la question Q-5-6, on obtient :

$$T_{max} - T_0 = \frac{E_{disques}L}{t_{freinage} 2SN_{disque} 2\lambda} \left[Fo + \frac{1}{3} \right]$$

On obtient ainsi environ 89 disques soit 8 disques par boggie, c'est le nombre de disques qui sont installés sur les bogies du TGV.

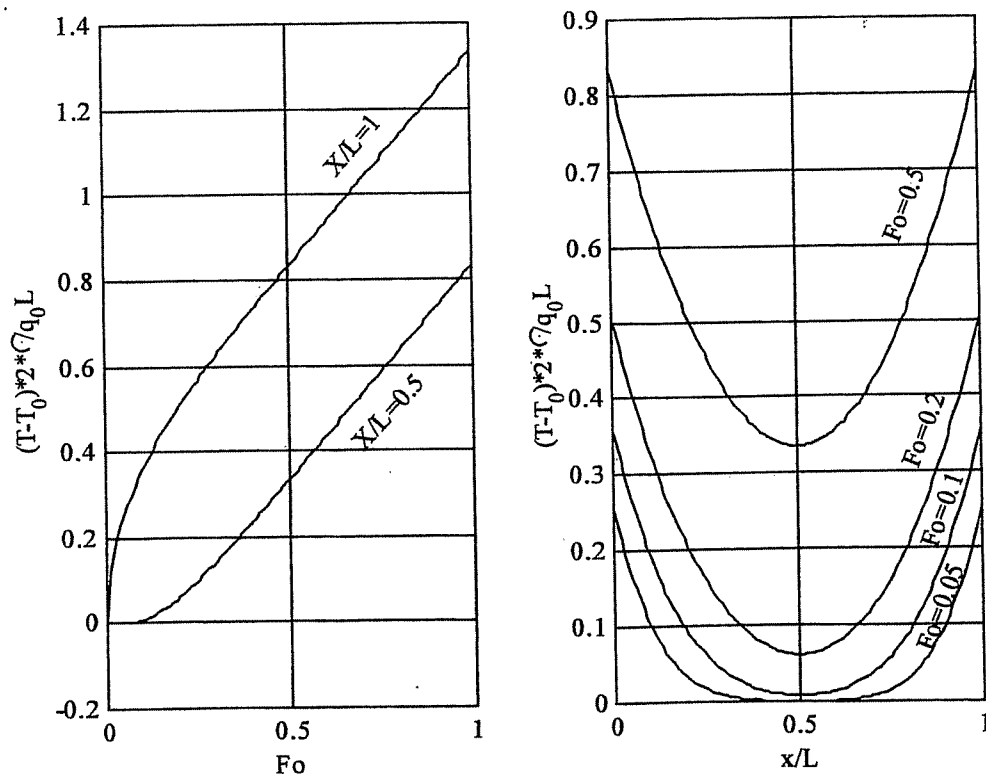


Figure 5.1: Evolution de la température en fonction du temps et de la position dans l'épaisseur du disque

Commentaires des correcteurs de l'épreuve « Mécanique des systèmes et des milieux déformables »

Les auteurs du sujet remercient les sociétés ALSTOM et BOMBARDIER A.N.F pour leur accueil chaleureux et les précieux renseignements qu'elles ont bien voulu leur communiquer.

Le sujet de cette épreuve s'intéressait à l'élément bogie assurant la jonction entre la caisse de la voiture et les essieux d'un TGV. Il était découpé en cinq parties indépendantes.

La première partie concernait la liaison voiture bogie.

Cette partie obligeait le candidat à mener une étude simple soit de cinématique, soit de statique. Elle a été abordée par presque la totalité des candidats. Trop souvent, le torseur cinématique de la voiture par rapport au bogie, après des calculs plus ou moins longs, avait ses six composantes non nulles. Il s'en suivait que le torseur associé aux actions du bogie sur la voiture était identiquement nul. La conclusion consistait alors à affirmer que l'intérêt de la réalisation de cette liaison était d'assurer un filtrage efficace des actions transmissibles du bogie à la voiture. Certains candidats ont toutefois remarqué que le bogie ne pouvait aller plus vite que la voiture.

D'autres ont trouvé l'un des torseurs attendus correct sans pouvoir établir le second.

Enfin quelques-uns ont fait preuve d'un réel esprit d'analyse pour répondre très correctement à l'ensemble de cette première partie.

Dans la seconde partie, on devait s'attacher à respecter un cahier des charges imposé d'un système simplifié à deux degrés de liberté.

Quelle que soit la méthode utilisée (Lagrange ou théorèmes généraux), la mise en équations fut laborieuse pour un candidat sur deux, ce qui est étonnant à un tel niveau supposé de connaissances en mécanique.

Nous avons rencontré :

- le calcul de l'énergie cinétique d'un ressort de masse négligée,
- des pulsations de résonance négatives ou complexes,
- des matrices de raideur non symétriques,
- des systèmes directement découplés en z_b et z_c .

Ces erreurs traduisent un manque de réflexion évident sur un problème aussi classique.

Pour justifier la nécessité d'un amortissement, il a été souvent impossible de répondre à cette question car la composante normale de l'action de contact roue-sol n'était pas exprimée et la phase de résonance rarement abordée.

Enfin dans la vérification du composant amortisseur, l'erreur, couramment rencontrée, a été d'écrire que le module de $a \cdot \sin \omega t + c \cdot \cos \omega t$ était $a + c$.

Dans la troisième partie, une étude plus approfondie du composant barre anti-roulis était proposée.

Un cas de figure simple était en premier lieu proposé. Il est préoccupant de découvrir que seulement un candidat sur deux soit capable de calculer la flèche d'une poutre encastree soumise à un effort ponctuel et l'angle de torsion d'une poutre soumise à un moment de torsion constant, la deuxième moitié des candidats éprouvant quelques difficultés à proposer un modèle ou ne sachant pas conduire la résolution des calculs.

Le sens physique semble faire défaut à bon nombre de candidats : les valeurs de souplesse annoncées à la question 3.2 sont souvent aberrantes, les unités, quand elles sont précisées,

L'étude dynamique du comportement de la suspension en amorce de virage était abordée dans la quatrième partie. Une des craintes du jury était qu'elle soit très rarement traitée. Elle a été abordée par la majorité des candidats et certains n'ont même traité que celle-là.

Par contre, seul un candidat sur deux a répondu correctement à la première question de cette partie pourtant d'un niveau pré bac. Le développement de la réponse a pu atteindre parfois trois lignes de calcul pour convertir des km/h en m/s ... et obtenir un résultat incorrect. Plus grave, moins d'un candidat sur dix répond correctement à la seconde question, la réponse étant "on recherche six inconnues, il faut donc six équations".

Enfin, certains savent conduire des calculs (équations de Lagrange et/ou théorèmes généraux), mais ne sont pas capables de choisir les équations à écrire par les théorèmes généraux ou le paramétrage à utiliser par la méthode de Lagrange. Le jury ayant choisi de donner plus de poids à la méthode qu'à la résolution, les candidats qui ont écrit des pages de calculs sans fil conducteur explicitement détaillé, n'ont pas obtenu de bons résultats.

La dernière partie avait pour but d'estimer le nombre de disques de freinage nécessaire pour assurer un arrêt d'urgence. Elle était constituée de trois sections indépendantes. La dernière, qui portait sur une approche instationnaire, a été très peu abordée. Pourtant hors résolution elle semblait accessible. Ceci vient sans doute de la longueur du sujet dans son ensemble. On ne saurait recommander aux candidats de prendre le temps de se faire une idée des différentes parties du sujet. Par contre, les deux premières qui s'adressaient aux connaissances élémentaires des candidats en énergétique, ont été généralement bien traitées par plus de la moitié d'entre eux qui les ont abordées. En particulier, l'identification de la force de traînée qui était au centre de la partie mécanique des fluides du sujet 2000, a été réalisée par presque tous les candidats. Par contre, l'analyse dimensionnelle également abordée par le sujet 2000 reste un outil inconnu des candidats, ce qui est dommage. Enfin, quelques candidats n'ont pas su calculer l'énergie dissipée par "la résistance à l'avancement", la force et la loi de vitesse étant données. Ceci n'est pas acceptable. Il semble que pour ces candidats la notion de travail diffère suivant le contexte de l'étude (thermique, mécanique générale...). De façon générale, les candidats semblent appréhender cette partie de l'épreuve qui porte sur la thermique, la thermodynamique ou la mécanique des fluides. Nous ne saurions trop leur recommander de prendre du recul, d'utiliser leurs connaissances générales et de travailler les bases de la formulation d'un problème de mécanique des milieux continus.

Si la majorité des candidats présentent des copies claires, proprement rédigées, aux résultats encadrés biens apparents, certains rendent des copies comportant des ratures sales et des schémas innombrables, ce qui est inadmissible pour un futur enseignant.

