

SESSION DE 2001

**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés**

section : mécanique

épreuve de mécanique des systèmes et des milieux déformables

Durée : 8 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.

Notes préliminaires

Le dossier comprend 1 page de photo de TGV avec extrait d'article de revue, 15 pages de texte et 4 pages de figures. Les cinq parties sont indépendantes. Il est recommandé de consacrer, en pourcentage exprimé en fonction du temps global :

- 10 % pour la partie 1
- 15 % pour la partie 2
- 25 % pour la partie 3
- 30 % pour la partie 4
- 20 % pour la partie 5

Le candidat doit obligatoirement traiter les cinq parties sur des copies distinctes, en précisant bien sur chaque copie le repère et la partie de l'épreuve traitée.

Tournez la page S.V.P.

ALSTOM

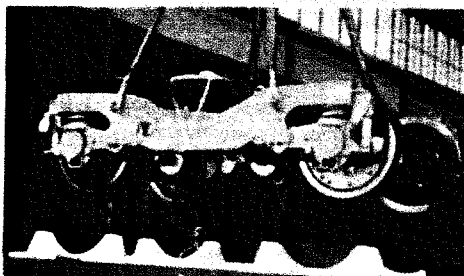
Le bogie, pièce maîtresse du train

Le contact roue/rail joue un rôle déterminant car il conditionne la dynamique ferroviaire. Le bogie, doit donc répondre aux exigences de vitesse, puissance, sécurité, confort et débit. La conception du bogie doit optimiser les

fonctions de freinage, adhérence, guidage, traction, suspension et amortissement. L'établissement ALSTOM-Le Creusot est spécialisé dans les bogies de locomotives électriques et diesel-électriques. Grâce à cette expérience, il a

étendu son champ d'activité à tout type de matériel roulant.

Des chaînes de l'établissement du Creusot sortent actuellement des bogies pour le NEC (Nord-Est-Corridor, TGV pendulaire destiné au marché américain), le TER (Train Express Régional, automotrices SNCF), le MP 89 (Métro Pneu RATP), le métro de Bruxelles, CITADES (tramsways de Montpellier, Orléans et Lyon), JUNIPER (automotrices pour le Royaume-Uni), le M12N (automotrices électriques SNCF), ASTRID (automotrice), etc.



atouts 26 - mars 1989



QUELQUES ASPECTS DE LA CONCEPTION ET DU COMPORTEMENT D'UN BOGIE

I) Présentation générale

Le souci majeur de nombreux exploitants de liaisons par rail reste la réduction des temps de parcours entre villes sans pour autant négliger le confort et la sécurité des passagers transportés.

La conséquence logique qui en résulte au niveau des concepteurs ferroviaires est l'augmentation de la vitesse du matériel roulant.

L'étude proposée concerne les trains à grande vitesse. Elle s'intéresse à quelques aspects liés à la recherche constante voulant concilier vitesse de transport élevée et quiétude du voyageur. La jonction entre la caisse de la voiture et les essieux passe inévitablement par un élément appelé bogie. Chaque voiture est posée sur deux bogies qui lui sont propres ou communs à deux voitures. Le bogie réalise trois fonctions : guidage, filtrage et freinage.

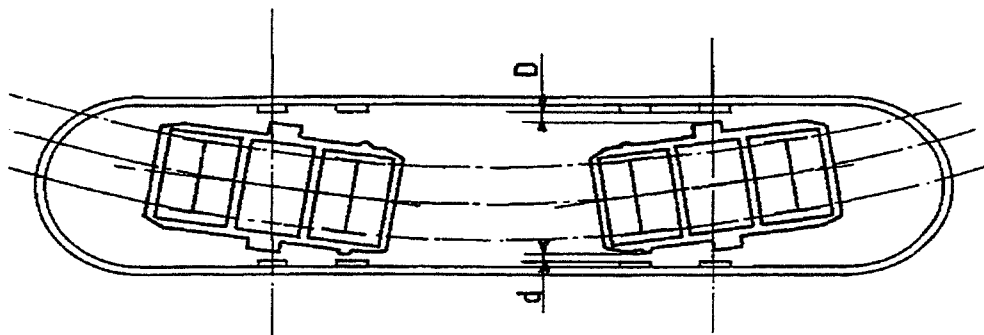
- La fonction "guidage" garantit principalement la stabilité du train, et en particulier, le non-déraillement. Elle se traduit par une limitation en toute circonstance du rapport entre la composante transversale (Y) et la composante verticale (Q) de l'action de contact du sol sur chaque roue. Si la limitation de Y est en grande partie liée à la qualité du tracé de la voie (rayons de courbure, dévers...), la limitation de Q est liée à la conception du bogie.

- La fonction "filtrage" est double. Elle doit à la fois garantir un niveau de confort acceptable (limitation de la transmission aux voitures des défauts de la voie, atténuation des bruits de roulement) et réduire les sollicitations transmises à la voie lors du passage du train. Les mouvements de la voiture doivent être le moins incommodants possible pour l'organisme humain.

- La fonction "freinage" doit assurer le ralentissement des voitures (donc la transmission de l'effort longitudinal lié à la décélération) et la dissipation ou le stockage de l'énergie. Trois types de freinage sont distingués :

- le freinage de service (arrêt aux stations)
- le freinage de maintien (régulation de la vitesse en descente)
- le freinage d'urgence (arrêt du train sur une distance minimale).

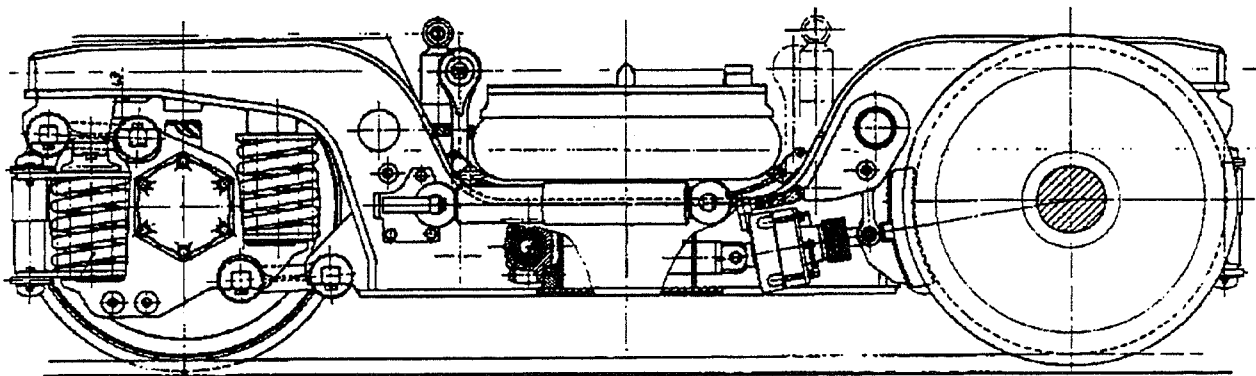
A ces fonctions s'ajoutent des contraintes comme le respect du gabarit extérieur (voiture et bogies ne doivent jamais entrer en contact avec les ouvrages d'art et la signalisation) ou du gabarit intérieur (aucun contact ne doit exister entre les différentes pièces en mouvement, excepté les butées prévues à cet effet).



II) Présentation du bogie

Le bogie est matérialisé par un chariot supportant les deux essieux sur lequel pivote le châssis d'une voiture pour permettre à celui-ci de s'inscrire dans les courbes et d'éviter le déraillement. Il comporte en outre tous les éléments constituant la suspension de la voiture.

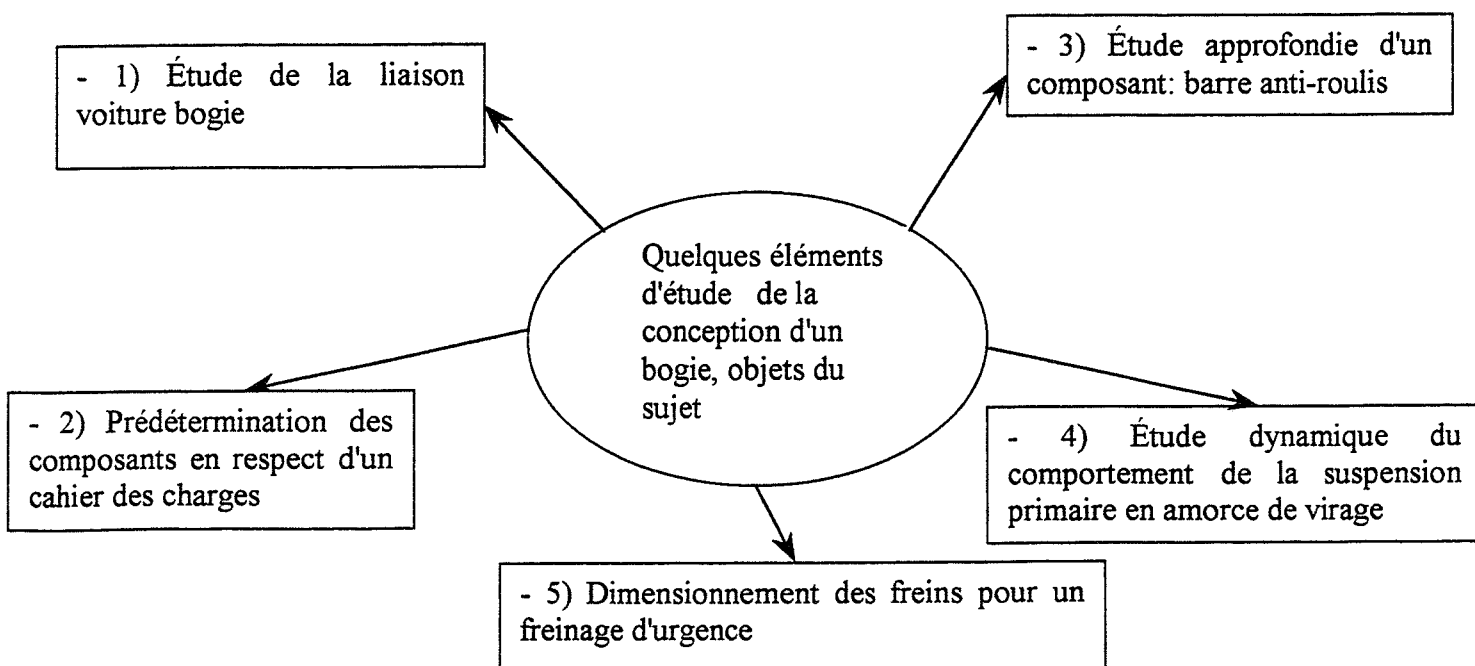
La suspension est composée de deux étages d'éléments filtrants (ensemble ressorts et amortisseurs). Le premier ensemble constitue la suspension primaire, il est placé entre les essieux et le bogie. Le second ensemble, appelé suspension secondaire (parfois réalisée à l'aide de ressorts pneumatiques) relie le bogie à la caisse de la voiture. Chaque essieu est constitué de deux roues liées par un arbre sur lequel sont placés les freins à disque, ventilés ou non.



Le bogie dépend donc du type de matériel auquel il est destiné (métro, train pendulaire, train à grande vitesse à deux niveaux...) et est en constante évolution.

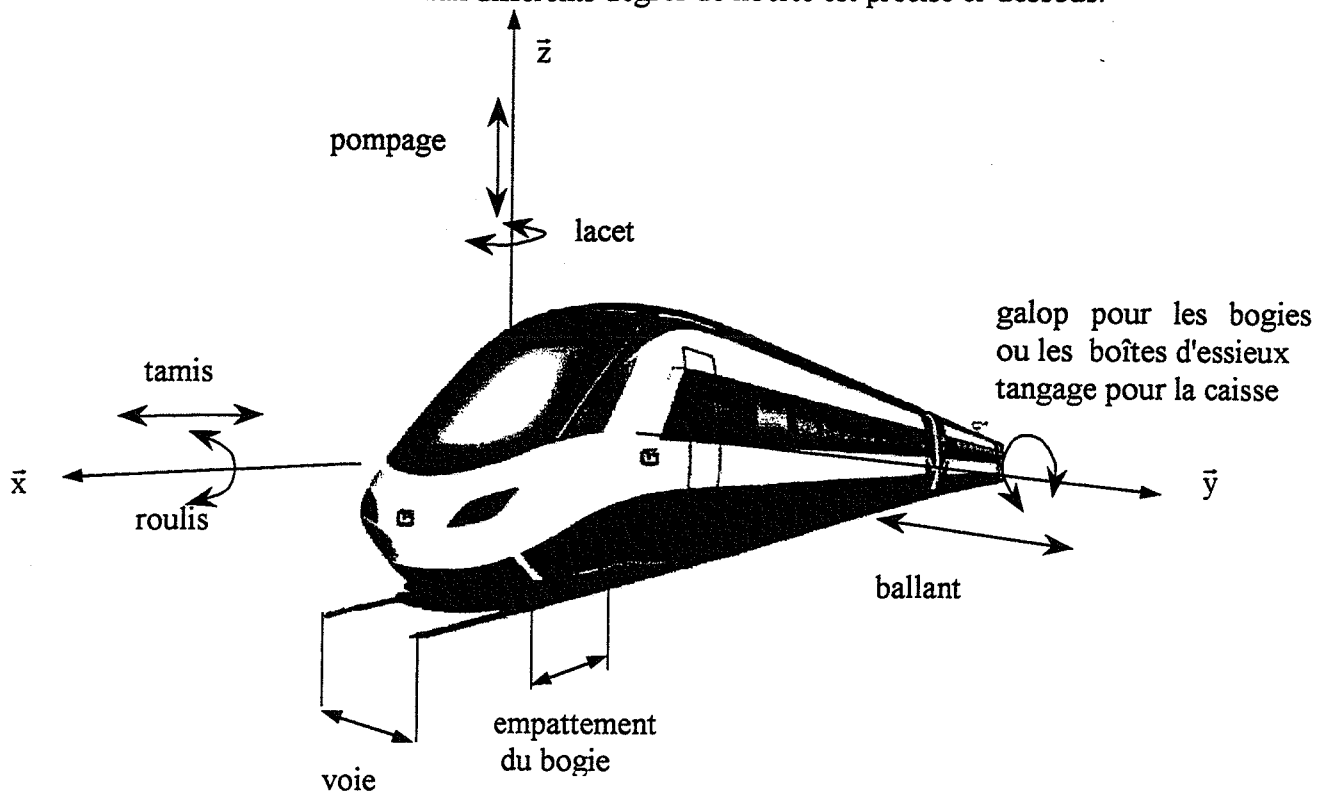
III) Présentation du problème

Le problème n'aborde que quelques aspects propres à la conception des bogies, éléments essentiels de l'interface entre la voie et la voiture.



Tournez la page S.V.P.

Le vocabulaire ferroviaire associé aux différents degrés de liberté est précisé ci-dessous:



1) Étude de la liaison voiture bogie (figures 1)

La liaison entre la voiture (V) et le bogie (B) est réalisée par une ossature de biellettes articulées.

Il est nécessaire, pour aborder le comportement dynamique du bogie, d'établir, en l'absence d'éléments déformables interposés entre la voiture et le bogie, le torseur cinématique [V/B] et le torseur des efforts transmissibles [B→V].

• Q-1-1) Toutes les liaisons étant supposées parfaites, déterminer, avec une démarche rigoureuse, les torseurs [V/B] et [B→V] en O.

Les éléments déformables interposés entre le bogie et la voiture sont constitués de ressorts pneumatiques omnidirectionnels. Leur raideur axiale (suivant \bar{z}) vaut K_a et leur raideur radiale (suivant \bar{x} ou \bar{y}) K_r . Une butée limite de plus le mouvement de ballant à ± 50 mm.

• Q-1-2) Quels sont les éléments limitant les mouvements de pompage, ballant, tamis, tangage et lacet ?

• Q-1-3) Quelle est la raideur équivalente de la liaison bogie/voiture pour chacun des six mouvements élémentaires ?

• Q-1-4) Quel est l'intérêt d'une telle liaison complexe ?

2) Prédétermination des composants en respect d'un cahier des charges

La détermination complète des raideurs et de l'amortissement suivant les trois axes s'avère trop longue pour cette épreuve. L'étude est donc volontairement limitée aux phénomènes de pompage de la voiture et du bogie, de masses respectivement notées M_v (masse de la voiture) et M_b (bogie). On note $M_c = M_v/2$ la masse de la demi voiture au niveau du bogie.

Les suspensions primaire et secondaire sont modélisées par deux ressorts équivalents de raideur en pompage notées respectivement k_{pp} et k_{sp} (figure 2-1). Seuls les mouvements verticaux de la voiture et du bogie sont envisagés (mouvement de pompage). Les défauts de la voie génèrent une excitation $z_0 \cdot \cos(\Omega t)$ avec

$$z_0 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m et } f = \frac{\Omega}{2\pi} \in [0,5\text{Hz}; 40\text{Hz}].$$

cahier des charges:

C1 ♦ Le confort du passager impose que dans la bande des fréquences d'excitation générées par le contact roue-voie, les fréquences propres $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ n'appartiennent pas à [1,16 Hz ; 7,3 Hz].

C2 ♦ La surcharge dynamique au contact roue-sol ne doit pas excéder 30 % de la charge statique.

C3 ♦ Pour éviter l'apparition d'arc électrique au contact pantographe-caténaire, le débattement maximal de la voiture par rapport à sa position d'équilibre ne doit pas être supérieur à 4 cm.

Détermination des composants élastiques

• Q-2-1) Proposer des valeurs de k_{pp} et k_{sp} satisfaisant la condition C1, la raideur k_{sp} devant être la plus faible possible lorsque $M_c = 25 \cdot 10^3 \text{ kg}$ et $M_b = 3 \cdot 10^3 \text{ kg}$.

Nécessité d'un amortissement

• Q-2-2) Montrer qu'en l'absence d'amortisseur les conditions C2 et C3 ne peuvent être satisfaites.

Vérification du composant amortisseur

On pose en parallèle du ressort équivalent secondaire, un amortisseur de type visqueux (action proportionnelle à la vitesse relative du piston par rapport au corps) de constante μ_s (figure 2-2).

On cherche des solutions sous la forme:
$$\begin{cases} z_b = b \sin \Omega t + d \cos \Omega t \\ z_c = a \sin \Omega t + c \cos \Omega t \end{cases}$$

Pour $\mu_s = 50000 \text{ N.s/m}$, les valeurs de a, b, c et d pour les deux pulsations de résonance sont :

$$\begin{cases} a = 3,29 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ b = 1,06 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ c = 6,2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ d = 6,2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{cases} \text{ pour la pulsation de résonance la plus basse,}$$

$$\begin{cases} a = -2,67 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ b = 6,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ c = -3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ d = -3,03 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{cases} \text{ pour la pulsation de résonance la plus haute.}$$

• Q-2-3) Montrer alors que les conditions C2 et C3 peuvent être satisfaites.

3) Étude approfondie d'un composant: barre antiroulis

La raideur équivalente secondaire, déterminée précédemment pour obtenir un comportement satisfaisant en pompage, impose la raideur axiale des deux éléments élastiques placés en parallèle entre le bogie et la voiture. Une étude similaire en roulis permettrait de déterminer la raideur équivalente idéale en roulis qui ne pourrait être obtenue à l'aide des seuls éléments élastiques précédents (elle nécessiterait un écartement de ceux-ci incompatible avec le respect du gabarit extérieur).

C'est pourquoi l'augmentation de la raideur en roulis se fait généralement en ajoutant une barre antiroulis entre le bogie et la voiture. Chaque extrémité de cette barre est reliée à la voiture par l'intermédiaire d'une biellette, et sa partie centrale est reliée au bogie par deux paliers autorisant le rotulage de la barre. On se propose d'étudier la raideur équivalente en roulis d'une barre pleine, de section circulaire constante ($\varnothing d$) cintrée (rayon r), dont la géométrie est précisée figure 3. Les biellettes de raccordement à la voiture sont ancrées en C et C'. L'angle de roulis restant petit, on suppose que les biellettes restent en permanence perpendiculaires au plan xy de la barre non déformée.

$$[\text{voiture} \rightarrow \text{barre}] = \left\{ \begin{array}{c} Fz \\ \bar{0} \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} -Fz \\ \bar{0} \end{array} \right\}_{C'}$$

Les paliers de liaison au bogie sont situés en A et A', aux extrémités des parties cintrées. Les parties CB, C'B' et AA' sont rectilignes. La barre est géométriquement symétrique par rapport au plan Oxz. Elle a un comportement élastique linéaire (module d'Young E, coefficient de Poisson ν).

Hypothèse :

Dans toute cette partie, les contraintes générées par les efforts tranchants et l'effort normal seront négligées devant celles générées par les moments fléchissants et le moment de torsion.

Après avoir déterminé analytiquement la raideur de cette barre antiroulis, on vise à optimiser celle-ci, tout en respectant l'encombrement fixé (p et q imposés) :

- pour quel rayon de cintrage la raideur en roulis est-elle maximale ?
- expression de cette raideur maximale.

Une vérification du dimensionnement de la barre complétera l'étude de celle-ci.

Expression de la raideur de torsion

• **Q-3-1)** Soit δ le déplacement vertical du point C. Exprimer la raideur en roulis de la barre (rapport entre le couple de rappel exercé par la barre sur la voiture et l'angle de roulis relatif de la voiture par rapport au bogie) en fonction de F, δ et des dimensions de la barre.

Cas d'une barre de rayon de cintrage nul

• **Q-3-2)** Dans le cas simplifié d'une barre ayant un rayon de cintrage nul (géométrie CD₁D'₁C'), calculer le rapport δ/F en fonction des paramètres caractérisant la géométrie et le matériau de la barre.

Réaliser l'application numérique avec les valeurs suivantes :

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa} ; \quad \nu = 0,3 ; \quad d = 50 \text{ mm} ; \quad p = 0,75 \text{ m} \quad \text{et} \quad q = 0,3 \text{ m}$$

Étude d'une barre cintrée

• **Q-3-3)** Soient U_x , U_y et U_z les déplacements sous sollicitation du point O et ω_x , ω_y et ω_z les rotations de la section droite de centre O. Quels termes doivent être nuls pour respecter les conditions de symétrie et d'antisymétrie du problème ?

- **Q-3-4)** Après avoir recherché le torseur des actions du bogie sur la barre en A, exprimer le torseur des actions intérieures lorsque l'abscisse curviligne évolue de O à C. Que vaut-il en particulier en O ?
- **Q-3-5)** Exprimer l'énergie de déformation de la demi-barre et le travail des efforts extérieurs à cette demi-barre.
- **Q-3-6)** Déterminer l'expression analytique du déplacement δ en fonction de F et des paramètres caractérisant la géométrie et le matériau de la barre.

Optimisation du rayon de cintrage

En écrivant le rapport δ/F sous la forme d'un polynôme du 3^{ème} degré en r, on peut ensuite calculer la valeur optimale de r en terme de raideur (valeur qui conduit au plus faible rapport δ/F).

Pour les valeurs numériques proposées :

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}; \quad \nu = 0,3; \quad d = 50 \text{ mm}; \quad p = 0,75 \text{ m} \quad \text{et} \quad q = 0,3 \text{ m}$$

on obtient r très peu différent de 0,13 m.

La raideur en roulis de la barre pour ce rayon de cintrage optimal est d'environ $7,36 \cdot 10^6 \text{ Nm/rad}$.

Vérification du dimensionnement de la barre

Un système de butées limite physiquement l'angle de roulis de la voiture par rapport au bogie à 3° (en limitant le débattement des éléments élastiques). La barre antiroulis est réalisée en 50 Cr Mo V 4, de limite élastique à l'extension de 980 MPa et de limite d'endurance à l'extension de 685 MPa.

- **Q-3-7)** Montrer que la section la plus sollicitée se situe dans la partie cintrée.
- **Q-3-8)** On se place dans une section droite quelconque de cette partie cintrée. En quel point l'état de contrainte est-il maximum ? En se plaçant dans le cas où $r = q/2$, écrire le tenseur des contraintes en ce point en fonction de F et des données géométriques de la barre.
- **Q-3-9)** Après avoir rappelé l'expression des critères de Tresca et de Von Mises dans le cas général, exprimer ces critères pour l'état de contrainte précédemment défini. Retrouver les expressions de ces critères appliquées au cas des poutres soumises à une sollicitation combinée de flexion-torsion, à savoir :
$$\sigma_{\text{éq}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < R_e \quad \text{pour le critère de Tresca}$$
$$\sigma_{\text{éq}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} < R_e \quad \text{pour le critère de Von Mises}$$
- **Q-3-10)** Dans quelle section de la partie cintrée les contraintes équivalentes de Tresca et Von-Mises sont-elles maximum ? Que valent ces contraintes lors de l'entrée en action des butées de roulis ? Vérifier le dimensionnement de la barre.

4) Étude du comportement de la suspension primaire

La nécessité d'un dévers étant abordée dans la question Q-4-1, cette partie s'intéresse ensuite autant à l'analyse et au choix des équations permettant d'aborder l'étude du comportement de la suspension primaire qu'à l'écriture de quelques unes d'entre elles.

La grandeur principale qui permet de quantifier le risque de déraillement est, pour chaque roue, le rapport Y/Q , où Q est la charge de la roue (composante normale au contact) et Y la composante transversale. Ce rapport doit être aussi faible que possible, ce qui implique de minimiser Y et de maximiser Q .

En roulage à grande vitesse, outre les perturbations incontrôlables (vent latéral), la composante transversale est principalement due aux virages. Si la cote d'altitude des deux rails restait identique dans le virage, la composante transversale supportée par chaque bogie se répartirait équitablement sur les deux roues extérieures au virage, et pourrait être importante. Pour limiter cette composante et garantir le confort des passagers, un dévers est installé et l'angle de dévers (fig. 4-1) est optimisé pour une certaine vitesse de passage. A cette vitesse, la voie est dite "neutre" (composante transversale due au virage nulle). Au-dessus de cette vitesse, la voie est dite en "sous-dévers" et si la vitesse de passage est plus faible, en "sur-dévers".

Calcul d'un dévers

• Q-4-1) Pour une voie d'entraxe v égal à 1,75 m et de rayon de courbure 2000 m, quel angle de dévers Φ doit-on installer pour que la voie soit neutre lors d'un passage à 200 km/h ? Quelle différence de cotes d'altitude entre les deux rails Δz ce dévers implique-t-il ? ($g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$).

Étude dynamique lors du passage dans la zone de vrillage de la voie

Cette différence de cotes d'altitude entre les deux rails impose une zone dite de "vrillage", qui se situe sur la fin de la ligne droite précédant le virage. Cette zone mesure environ 100 m. Si le risque de déraillement dans un virage déversant pris à la bonne vitesse est nul, il faut vérifier la valeur du rapport Y/Q dans la zone de vrillage. La composante transversale n'est en effet plus nulle (présence d'un dévers en ligne droite) et certaines roues vont se trouver déchargées par le profil de la voie. Sans suspension primaire (essieux directement reliés au bogie par une liaison pivot), une des roues au moins "délesterait", ce qui entraînerait un probable déraillement. Le rôle principal de la suspension primaire est de garantir le maintien du contact des quatre roues du bogie avec la voie. Par une étude dynamique, on se propose maintenant de caractériser l'évolution des efforts de contact lors du passage dans la zone de vrillage à l'aide d'un modèle simplifié du bogie.

Hypothèses simplificatrices:

- La voie est horizontale (ni montée, ni descente), \bar{z}_0 est vertical ascendant, le repère $(O_0, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ noté R_0 est supposé galiléen.
- Le train se déplace à vitesse constante v_0 durant toute la phase de vrillage, le bogie étudié n'est pas moteur et les freins sont relâchés.
- Le train arrive en début de zone de vrillage sans aucune perturbation (toutes conditions initiales nulles excepté sa vitesse).
- Les liaisons entre le bogie et les essieux sont parfaites.

Modélisation retenue (fig. 4-2) :

Bogie : repère lié: $(G_b, \bar{x}_b, \bar{y}_b, \bar{z}_b)$

$$\overrightarrow{OG_b} = x_b \cdot \bar{x}_0 + (R + z_b) \cdot \bar{z}_0 \quad (z_b : \text{pompage}) \text{ avec } x_b = v_0 \cdot t$$

première rotation d'axe \bar{y}_0 , α_b (galop) telle que $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0) \rightarrow (\bar{x}_b, \bar{y}_0, \bar{k}_b)$

deuxième rotation d'axe \bar{x}_b , β_b (roulis) telle que $(\bar{x}_b, \bar{y}_0, \bar{k}_b) \rightarrow (\bar{x}_b, \bar{y}_b, \bar{z}_b)$

$$\text{masse } M_b, \text{ centre d'inertie } G_b, \bar{I}(G_b, b) = \begin{bmatrix} A_b & 0 & 0 \\ 0 & B_b & 0 \\ 0 & 0 & C_b \end{bmatrix}_{(\bar{x}_b, \bar{y}_b, \bar{z}_b)}$$

Essieu 1 : (essieu avant) repère lié : $(B_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ $\overline{G_b B_1} = (e/2) \cdot \bar{x}_b + \lambda_1 \cdot \bar{z}_b$

première rotation d'axe \bar{x}_b , β_1 telle que $(\bar{x}_b, \bar{y}_b, \bar{z}_b) \rightarrow (\bar{x}_b, \bar{y}_1, \bar{k}_1)$

seconde rotation d'axe \bar{y}_1 , θ_1 (avec $\dot{\theta}_1 = v_0 / R$) telle que $(\bar{x}_b, \bar{y}_1, \bar{k}_1) \rightarrow (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$

$$\text{masse } M_e, \text{ centre d'inertie } B_1, \bar{I}(B_1, 1) = \begin{bmatrix} A_e & 0 & 0 \\ 0 & B_e & 0 \\ 0 & 0 & A_e \end{bmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)} \quad \overline{A_{1d} B_1} = \overline{B_1 A_{1g}} = (v/2) \cdot \bar{y}_1$$

Essieu 2 : (essieu arrière) repère lié : $(B_2, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ $\overline{G_b B_2} = -(e/2) \cdot \bar{x}_b + \lambda_2 \cdot \bar{z}_b$

première rotation d'axe \bar{x}_b , β_2 telle que $(\bar{x}_b, \bar{y}_b, \bar{z}_b) \rightarrow (\bar{x}_b, \bar{y}_2, \bar{k}_2)$

seconde rotation d'axe \bar{y}_2 , θ_2 (avec $\dot{\theta}_2 = v_0 / R$) telle que $(\bar{x}_b, \bar{y}_2, \bar{k}_2) \rightarrow (\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$

$$\text{masse } M_e, \text{ centre d'inertie } B_2, \bar{I}(B_2, 2) = \begin{bmatrix} A_e & 0 & 0 \\ 0 & B_e & 0 \\ 0 & 0 & A_e \end{bmatrix}_{(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)} \quad \overline{A_{2d} B_2} = \overline{B_2 A_{2g}} = (v/2) \cdot \bar{y}_2$$

En conclusion, dans la modélisation retenue, le nombre de degrés de liberté pris en compte est réduit :

- la position du bogie est repérée par rapport au sol à l'aide des paramètres z_b , α_b et β_b . Les mouvements de ballant, de tamis et de lacet sont négligés.
- les positions des essieux sont repérées par rapport au bogie grâce à λ_1 et β_1 (respectivement par λ_2 et β_2) qui correspondent aux mouvements permis par la liaison complexe reliant les boîtes d'essieux au bogie. La vitesse de rotation des essieux par rapport aux boîtes d'essieux est constante et vaut v_0/R (R rayon de la roue).

Les mouvements sont suffisamment petits pour permettre une linéarisation au premier ordre en z_b , α_b , β_b , λ_1 , β_1 , λ_2 et β_2 .

Voie : L'évolution de la cote d'altitude des deux rails est asymétrique. En prenant comme cote de référence l'altitude du point O_0 , la cote du rail gauche vaut $z_g = f(x)$ et celle du rail droit $z_d = -f(x)$, avec $f(x) > 0$ pour préparer un virage à droite. L'angle de dévers ϕ vaut alors $\arcsin(2f(x)/v)$, il est positif dans un virage à droite.

Cet angle de dévers évolue dans la zone de vrillage de 0 à Φ (angle de dévers du virage).

On appelle ϕ_1 (resp. ϕ_2) l'angle de dévers de l'essieu 1 (resp. 2). ϕ_1 et ϕ_2 sont du premier ordre et définissent les repères $(\bar{x}_0, \bar{y}_{v1}, \bar{z}_{v1})$ et $(\bar{x}_0, \bar{y}_{v2}, \bar{z}_{v2})$.

La composante transversale "Y" des efforts entre les roues et les rails n'affecte que les roues en contact avec le rail "bas", soit ici le rail droit. Pour l'essieu avant, les torseurs associés à ces actions s'écrivent:

$$[F(d \rightarrow 1)] = \left\{ \begin{array}{c} Y_{1d} \bar{y}_{v1} + Q_{1d} \bar{z}_{v1} \\ \bar{0} \end{array} \right\}_{I_{1d}} \quad [F(g \rightarrow 1)] = \left\{ \begin{array}{c} Q_{1g} \bar{z}_{v1} \\ \bar{0} \end{array} \right\}_{I_{1g}} \quad \text{avec} \quad \overline{I_{1d} A_{1d}} = \overline{I_{1g} A_{1g}} = R \bar{z}_{v1}$$

De même, pour l'essieu arrière les torseurs associés à ces actions s'écrivent:

Tournez la page S.V.P.

$$[F(d \rightarrow 2)] = \begin{Bmatrix} Y_{2d}\bar{y}_{v2} + Q_{2d}\bar{z}_{v2} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_{I_{2d}} \quad [F(g \rightarrow 2)] = \begin{Bmatrix} Q_{2g}\bar{z}_{v2} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_{I_{2g}} \quad \text{avec} \quad \overline{I_{2d}A_{2d}} = \overline{I_{2g}A_{2g}} = R\bar{z}_{v2}$$

Suspension : On néglige l'action des amortisseurs (la stabilité doit de toute façon être garantie même si les amortisseurs n'ont plus aucune efficacité). L'ensemble des ressorts reliant chaque boîte d'essieu au bogie sera assimilé à un unique ressort de raideur K , agissant sur les essieux aux points C_{1g} , C_{1d} , C_{2g} , et C_{2d} . A l'ordre 1, le torseur associé à l'action du ressort avant droit sur l'essieu avant vaut:

$$[F(\text{ressort } 1d \rightarrow 1)] = \begin{Bmatrix} -K(\Delta L_0 + \lambda_1 - h\beta_1)\bar{k}_1 \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_{C_{2d}} \quad \text{où } 2h \text{ est l'entraxe entre les ressorts droit et gauche}$$

d'un essieu et ΔL_0 l'écrasement initial des ressorts (différence entre leur longueur à vide et la longueur de référence en ordre de marche qu'ils ont juste avant la zone de vrillage).

$$\overline{C_{1d}B_1} = \overline{B_1C_{1g}} = h.\bar{y}_1 \quad \overline{C_{2d}B_2} = \overline{B_2C_{2g}} = h.\bar{y}_2$$

Voiture : Soit K_{sp} la raideur globale en pompage de la suspension secondaire et z_v la cote d'altitude de la voiture au droit du bogie. Soit K_{sr} sa raideur globale en roulis et β_v l'angle de roulis absolu de la voiture. Soit M_v la masse de la voiture. Le torseur associé à l'effort transmis par la voiture au bogie s'écrit :

$$[F(\text{voiture} \rightarrow b)] = \begin{Bmatrix} -\left(\frac{M_v g}{2} + K_{sp}(z_b - z_v)\right)\bar{z}_0 \\ -K_{sr}(\beta_b - \beta_v)\bar{x}_0 \end{Bmatrix}_{G_b}$$

L'inertie de la voiture étant très importante et la phase de vrillage courte, il est légitime de supposer, au moins dans un premier temps, qu'aucun mouvement de pompage ni de roulis de la voiture n'apparaît durant la phase de vrillage, soit $z_v = 0$ et $\beta_v = 0$ (sans cette hypothèse, l'étude devrait porter sur une voiture complète, à savoir la voiture en elle-même et ses deux bogies). Le torseur associé à l'effort transmis par la voiture au bogie s'écrit alors :

$$[F(\text{voiture} \rightarrow b)] = \begin{Bmatrix} -\left(\frac{M_v g}{2} + K_{sp}z_b\right)\bar{z}_0 \\ -K_{sr}\beta_b\bar{x}_0 \end{Bmatrix}_{G_b}$$

Analyse, choix des équations

Afin de chiffrer l'évolution du rapport "Y/Q" lors du passage de la voiture dans la zone de vrillage, on souhaite déterminer l'évolution en fonction du temps de Q_{1d} , Y_{1g} , Q_{1g} , Q_{2d} , Y_{2g} et Q_{2g} .

- Q-4-2) Combien d'équations faut-il écrire pour déterminer ces grandeurs en fonction du temps ?
- Q-4-3) De combien d'équations de liaison dispose-t-on ?
- Q-4-4) Quelles équations doit-on écrire pour résoudre le problème uniquement à l'aide du théorème général de la dynamique ? On précisera pour chaque conséquence scalaire retenue le(s) solide(s) isolé(s), la projection choisie...
- Q-4-5) Quel paramétrage doit-on choisir pour résoudre le problème à l'aide des seules équations de Lagrange ?

Écriture des équations

On veut résoudre le problème avec une méthode mixte. A l'aide des équations de liaison, on explicite λ_1 , β_1 , λ_2 et β_2 en fonction de α_b , β_b et z_b . Ensuite, on écrit les trois équations de Lagrange pour le système $\{\text{bogie} \cup \text{essieux}\}$ relatives aux paramètres z_b , α_b et β_b (équations de mouvement), puis six équations indépendantes des précédentes à partir du principe fondamental de la dynamique pour déterminer les efforts associés aux contacts roues-rails.

- Q-4-6) Écrire les équations de liaison et les linéariser au premier ordre.

Montrer qu'elles peuvent se mettre sous la forme:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{e}{2}\alpha_b - z_b \\ \lambda_2 = -\frac{e}{2}\alpha_b - z_b \\ \beta_1 = \phi_1 - \beta_b \\ \beta_2 = \phi_2 - \beta_b \end{cases}$$

On donne l'énergie cinétique réduite (linéarisée à l'ordre 2) du système $\Sigma \equiv \{\text{bogie} \cup \text{essieux}\}$ en mouvement par rapport à R_0 en fonction de α_b , β_b et z_b et de leurs dérivées par rapport au temps :

$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \left[Mv_0^2 + M_b \dot{z}_b^2 + A_e(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) + A_b \dot{\beta}_b^2 + (B_b + 2B_e)\dot{\alpha}_b^2 + v_0 \left(\frac{4B_e}{R} \dot{\alpha}_b - 4M_e \dot{z}_b \alpha_b - 4M_e z_b \dot{\alpha}_b \right) \right]$$

avec $M = M_b + 2M_e + 2\frac{B_e}{R^2}$; \dot{q} désigne la dérivée première du paramètre q par rapport au temps.

- Q-4-7) Montrer que pour le paramétrage choisi, les efforts associés aux contacts n'interviennent pas dans le second membre des trois équations de Lagrange.
- Q-4-8) Écrire les trois équations de Lagrange linéarisées à l'ordre 1.
- Q-4-9) Montrer que les six équations suivantes sont indépendantes des trois équations de Lagrange précédentes

Pour $\{b \cup 1 \cup 2\}$: résultante dynamique en projection sur \bar{y}_0
moment dynamique en G_b en projection sur \bar{z}_0

Pour 1 (resp. 2): résultante dynamique en projection sur \bar{z}_b
moment dynamique en B_1 (resp. B_2) en projection sur \bar{x}_b .

- Q-4-10) Écrire les deux équations relatives au solide 1. Les linéariser à l'ordre 1.

Pour continuer cette étude "à la main", il serait nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires, en se limitant par exemple à un vrillage "linéaire" (vrillage au cours duquel $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ est constant). λ_1 , β_1 , z_b et α_b restent alors constamment nuls et il est possible de résoudre l'équation en β_b . En ne conservant que le régime forcé, on peut expliciter Q_{1a} , Y_{1g} , Q_{1g} , Q_{2a} , Y_{2g} et Q_{2g} et déterminer la longueur de vrillage nécessaire pour éviter une variation de $\frac{Y}{Q}$ de plus de 40% et de $\frac{\Delta Q}{Q}$ de plus de 20%.

L'étude dans le cas général nécessite le recours au calcul numérique.

5) Prédimensionnement du freinage mécanique

Position du problème

Le but essentiel à atteindre lorsqu'on parle de freinage des trains, est d'obtenir l'arrêt total du train en toute certitude dans un temps donné et dans des conditions acceptables pour le confort des voyageurs. Par exemple, pour un arrêt d'urgence d'un train à grande vitesse (300 km/h), le temps d'arrêt est d'environ 80s et la décélération n'excède pas 1 ms^{-2} . Pour assurer ce freinage, toutes les parties du train sont mises à contribution :

- les motrices qui assurent environ 18% du freinage, avec des freins rhéostatiques et des freins mécaniques,
- les voitures avec des freins mécaniques montés sur les bogies porteurs.

Dans cette partie, on s'intéresse à la partie du freinage assurée par les bogies porteurs. Dans le cas du TVG, ce freinage est assuré par des freins à disques en acier non ventilés avec des garnitures frittées. Ces disques sont des couronnes en galettes forgées de 45mm d'épaisseur et dont les diamètres extérieur et intérieur sont respectivement de 0,64m et 0,34m (voir figures 5-1). Les garnitures sont conçues pour assurer une répartition de pression uniforme et pour lutter contre la formation de cercles chauds.

Lors d'un freinage d'urgence, l'énergie mécanique est transformée par le frottement entre les garnitures et le disque en chaleur qui est emmagasinée principalement dans le disque et en partie, 8%, dans les garnitures. Ainsi le disque chauffe, et il n'est pas refroidi. En effet, les échanges par convection et par rayonnement sont négligeables au cours d'un freinage d'urgence. La conservation des propriétés mécaniques des disques nécessite en particulier que leur température n'excède pas une valeur maximale, T_{max} , d'environ 400°C .

On se propose dans cette cinquième partie, d'estimer le nombre de disques nécessaire à installer sur les bogies porteurs pour assurer un freinage d'urgence, pour une géométrie de disque et une température maximale données. Dans un premier temps, on cherche à estimer l'énergie qui doit être dissipée par ces disques. On réalise ensuite une première détermination du nombre de disques en les considérant comme de simples capacités calorifiques. Enfin, on affine l'estimation en tenant compte du temps de diffusion de la chaleur dans le disque par un calcul de conduction pure.

Estimation de l'énergie à dissiper par les disques

Lors d'un freinage d'arrêt à $V_0 = 300 \text{ km/h}$, l'énergie totale à dissiper est constituée de l'énergie cinétique initiale de translation du train à laquelle on ajoute une énergie complémentaire qui représente environ 4%.

• **Q-5-1)** Expliquer à quoi correspond cette énergie complémentaire. Estimer la valeur de l'énergie totale à dissiper, E_{tot} .

Une partie de cette énergie est dissipée par la résistance à l'avancement R qui s'exerce sur le train. Cette résistance peut être approchée par l'expression suivante :

$$R = A + B \cdot V + C \cdot V^2$$

où V représente la vitesse du train. Le terme constant caractérise les frottements dans les paliers et la résistance au roulement. Le terme $B \cdot V$ est essentiellement associé au frottement des roues sur les faces latérales des rails.

• **Q-5-2)** Expliquer à quoi correspond le terme en V^2 .

Les concepteurs ferroviaires disposent de formules empiriques pour estimer les coefficients A , B et C en fonction du type de train, de sa charge, de sa longueur etc... Pour le TGV concerné par l'étude, on peut utiliser les valeurs suivantes: $A = 4460 \text{ N}$ $B = 174,6 \text{ N/ms}^{-1}$ $C = 11,3 \text{ N/(ms}^{-1})^2$

• **Q-5-3)** On règle le freinage pour assurer un mouvement uniformément décéléré, d'accélération $-a$; donner l'expression de l'énergie dissipée par la résistance à l'avancement E_R en fonction de V_0 , a et des différentes constantes. Estimer ensuite sa valeur.

En tenant compte de l'énergie dissipée par les freins rhéostatiques et mécaniques des motrices, et emmagasinée dans les garnitures, on obtient une estimation de l'énergie qui doit être absorbée par l'ensemble des disques des bogies porteurs : $E_{\text{disques}} = 1,09 \cdot 10^9 \text{ J}$.

Première estimation : approche quasi-statique

On considère dans cette section que le transfert de chaleur dans le disque est quasi-statique au sens thermodynamique. C'est à dire qu'à chaque instant la température du disque est uniforme.

• **Q-5-4)** Établir la relation entre l'énergie absorbée E_{disques} , le nombre total de disques et l'écart de température admissible $T_{\text{max}} - T_0$.

• **Q-5-5)** Évaluer le nombre de disques nécessaires, dans cette approche, par bogie porteur. La température initiale des disques sera prise égale à $T_0 = 20^\circ\text{C}$ et la température maximale admissible à $T_{\text{max}} = 400^\circ\text{C}$.

Estimation de la température de surface du disque

L'estimation précédente suppose que la température est uniforme dans la couronne du disque en contact avec les garnitures, c'est à dire que le temps de diffusion de la chaleur dans le disque est négligeable par rapport au temps de freinage. On se propose maintenant de tenir compte de ce temps de diffusion qui provoque une surchauffe sur la surface du disque.

Modélisation

La forme du disque (épaisseur mince, échange négligeable aux périphéries du disque) et la conception des garnitures (flux de chaleur homogène) permet de supposer, en première approximation, que les isothermes sont des plans parallèles aux faces du disque. Ainsi la diffusion de la chaleur dans le disque est sensiblement la même que celle qui se produit dans une plaque infinie soumise à un flux de chaleur q_0 uniforme sur ces deux faces (voir figure 5-2). Pour simplifier, on supposera ce flux constant au cours du freinage.

• **Q-5-6)** Établir la relation liant le flux q_0 , supposé constant, à l'énergie absorbée par les disques E_{disques} .

Formulation du problème

L'équation qui régit l'évolution de la température à l'intérieur du mur (le disque) est l'équation de la chaleur. Compte tenu de la modélisation unidimensionnelle retenue, cette équation s'écrit

$$\alpha \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

où α désigne la diffusivité thermique.

• **Q-5-7)** Expliquer succinctement comment est établie cette équation à partir des équations de la mécanique des milieux continus.

Cette équation est une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre en espace et du premier ordre en temps. Il est donc nécessaire de lui adjoindre deux conditions en espace (conditions aux limites) et une condition en temps (condition initiale).

• **Q-5-8)** Montrer que les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ se mettent sous la forme suivante :

Tournez la page S.V.P.

$$\varepsilon_0 \cdot \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q_0$$

$$\varepsilon_L \cdot \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = q_0$$

où ε_0 et ε_L sont deux constantes que l'on précisera.

La condition en temps est donnée par la condition initiale :

$$T(x, t = 0) = T_0$$

Forme de la solution

Le système d'équations obtenu est linéaire mais non homogène au niveau des conditions aux limites et de la condition initiale. On peut ramener facilement la condition initiale à une condition homogène en faisant le changement de variable $\theta = T - T_0$. La solution du problème se traduit alors par une relation entre les paramètres $T - T_0$, α , q_0/λ , L , x et t .

- Q-5-9) Montrer, à l'aide de l'analyse dimensionnelle, que cette relation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{(T - T_0)\lambda}{q_0 L} = f\left(\frac{x}{L}, \frac{\alpha t}{L^2}\right) \text{ avec } \alpha \text{ diffusivité thermique égale à } \frac{\lambda}{\rho C}$$

Résolution

On revient au système d'équations initiales. Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles, on cherche à se ramener à une équation différentielle ordinaire. On peut utiliser la transformation de Laplace pour éliminer la variable temporelle. Cependant, il est souvent plus pratique d'utiliser une transformation intégrale pour éliminer la variable d'espace. C'est ce que l'on se propose de faire. On définit la transformation intégrale (et sa formule d'inversion) de la température $T(x, t)$ par rapport à la variable d'espace x par :

$$\left(\begin{array}{l} \text{transformation} \\ \text{intégrale} \end{array} \right) \tilde{T}_n(t) = \int_0^L X_n(x) \cdot T(x, t) dx$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{formule} \\ \text{d'inversion} \end{array} \right) T(x, t) = \sum_n X_n(x) \cdot \tilde{T}_n(t)$$

où les fonctions $X_n(x)$ sont les fonctions propres normalisées du problème aux valeurs propres suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 X_n}{dx^2} + \beta_n^2 X_n(x) = 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq L \\ \frac{dX_n}{dx} = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = L \end{array} \right.$$

Par intégration, on obtient :

$$\beta_n = \frac{n\pi}{L} \text{ et } X_n = C_n \cos(\beta_n x) \text{ pour } n \in \mathbb{N}, n \in [0, \infty[$$

Les constantes C_n de normalisation valent $\sqrt{\frac{2}{L}}$ pour $n \neq 0$ et $\sqrt{\frac{1}{L}}$ pour $n = 0$.

- Q-5-10) En appliquant la transformation à l'équation de la chaleur, montrer que l'on obtient une équation différentielle ordinaire en \tilde{T}_n qui se met pour $n \neq 0$ sous la forme :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d}{dt} \tilde{T}_n + \beta_n^2 \tilde{T}_n = D_n$$

où les D_n sont des constantes que l'on précisera.

- Q-5-11) Quelle est l'équation qui régit \tilde{T}_0 ?

• Q-5-12) En appliquant la transformation à la condition initiale, calculer la valeur de $\tilde{T}_0(0)$ et celle de $\tilde{T}_n(0)$.

• Q-5-13) Faire l'intégration et donner les expressions de $\tilde{T}_0(t)$ et de $\tilde{T}_n(t)$.

En reportant ces expressions dans la formule d'inversion, la température peut être mise sous la forme suivante :

$$T - T_0 = \frac{q_0 L}{2\lambda} \left[Fo + \frac{1}{2} \left(2 \frac{x}{L} - 1 \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p^2} \cos \left(2p\pi \frac{x}{L} \right) \exp(-p^2 \pi^2 Fo) \right) \right]$$

où Fo est un nombre de Fourier qui désigne $Fo = \frac{4\alpha t}{L^2}$

(NB : on ne demande pas d'établir cette expression).

On constate bien que cette expression est conforme à la forme de la solution prédite par l'analyse dimensionnelle.

La série converge rapidement. De plus, elle tend vers 0 lorsque Fo augmente (c'est à dire lorsque le temps augmente). La correction qu'elle apporte est inférieure à 0,5% pour Fo > 0,5.

• Q-5-14) Tracer l'allure de l'évolution du rapport $\frac{(T - T_0)2\lambda}{q_0 L}$:

en fonction de Fo ($0 < Fo < 1$) pour $\frac{x}{L} = 1$ et 0,5,

et, en fonction de $\frac{x}{L}$ pour Fo = 0,5.

Estimation du nombre de disques nécessaires

• Q-5-15) Quelle est la valeur de Fo en fin de freinage ?

• Q-5-16) Estimer le nombre de disques nécessaires, dans cette approche, pour l'ensemble des bogies porteurs pour que la température de surface n'excède pas la température maximale admissible, les conditions de fonctionnement étant inchangées ($T_0 = 20^\circ\text{C}$; $T_{\max} = 400^\circ\text{C}$).

Notations et valeurs numériques

- a :** Décélération lors du freinage (1 ms^{-2}).
 E_{disques} : Énergie absorbée par l'ensemble des disques lors du freinage ($1,09 \cdot 10^9 \text{ J}$).
 N_{bogies} : Nombre de bogies porteurs par train (11).
 T_0 : Température initiale avant freinage des disques (20°C).
 T_{max} : Température maximale admissible par l'acier constituant les disques (400°C).
 V_0 : Vitesse initiale du train (300 km/h).
 α : Diffusivité thermique ($11,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$).
 λ : Conductivité thermique (pour l'acier : $43,2 \text{ W/mK}$).
C : Capacité calorifique massique (pour l'acier : 470 J/kgK).
 ρ : Masse volumique (pour l'acier : 7790 kg/m^3).
M : Masse totale du train (485 tonnes).
 L_{train} : Longueur du train (395 m).
L : Épaisseur des disques (45 mm).
 $D_{\text{ext}}, D_{\text{int}}$: Diamètres extérieur et intérieur de la partie utile des disques (0,64 m et 0,34 m).
 q_0 : Flux de chaleur fourni au disque par une face et par unité de surface, son unité Wm^{-2} .
x : Coordonnée dans l'épaisseur du disque ($0 \leq x(\text{m}) \leq L$).
t : Temps

Quelques équations de mécanique des milieux continus

Les équations de base générales :

Masse :
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0$$

Quantité de mouvement :
$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Énergie totale :
$$\rho \frac{de}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij} V_i}{\partial x_j} + \rho f_i V_i - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

Les équations dérivées :

Énergie cinétique :
$$\rho \frac{d[V^2/2]}{dt} = \rho f_i V_i + V_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}$$

Énergie interne :
$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

Autres relations pour un solide parfait :

Loi de Fourier :
$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Équations d'état :

$$u = u(T)$$

$$du = T ds$$

$$C = T \frac{ds}{dT}$$

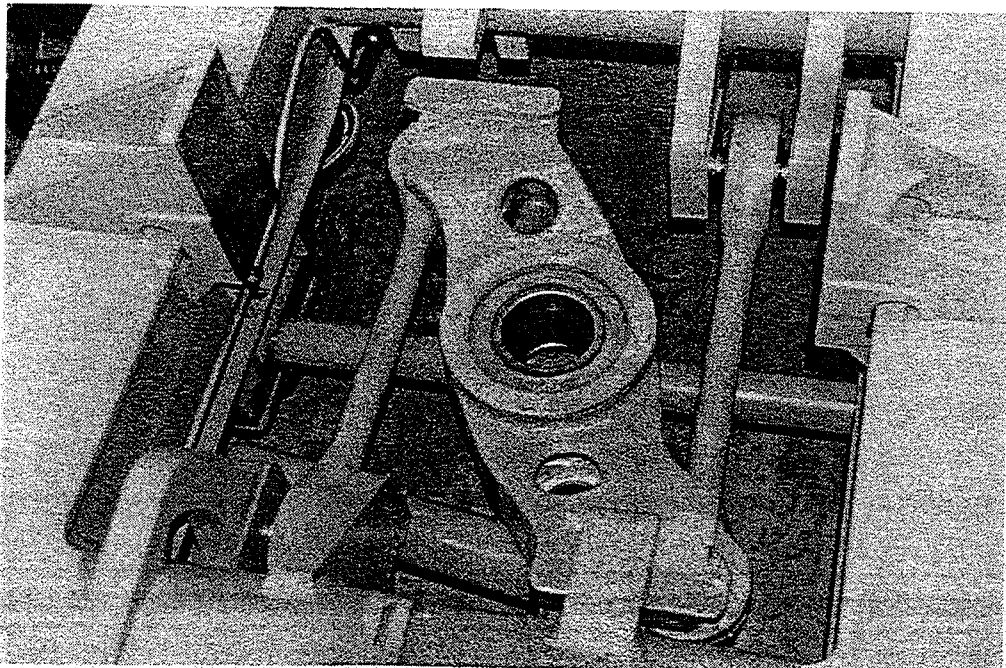
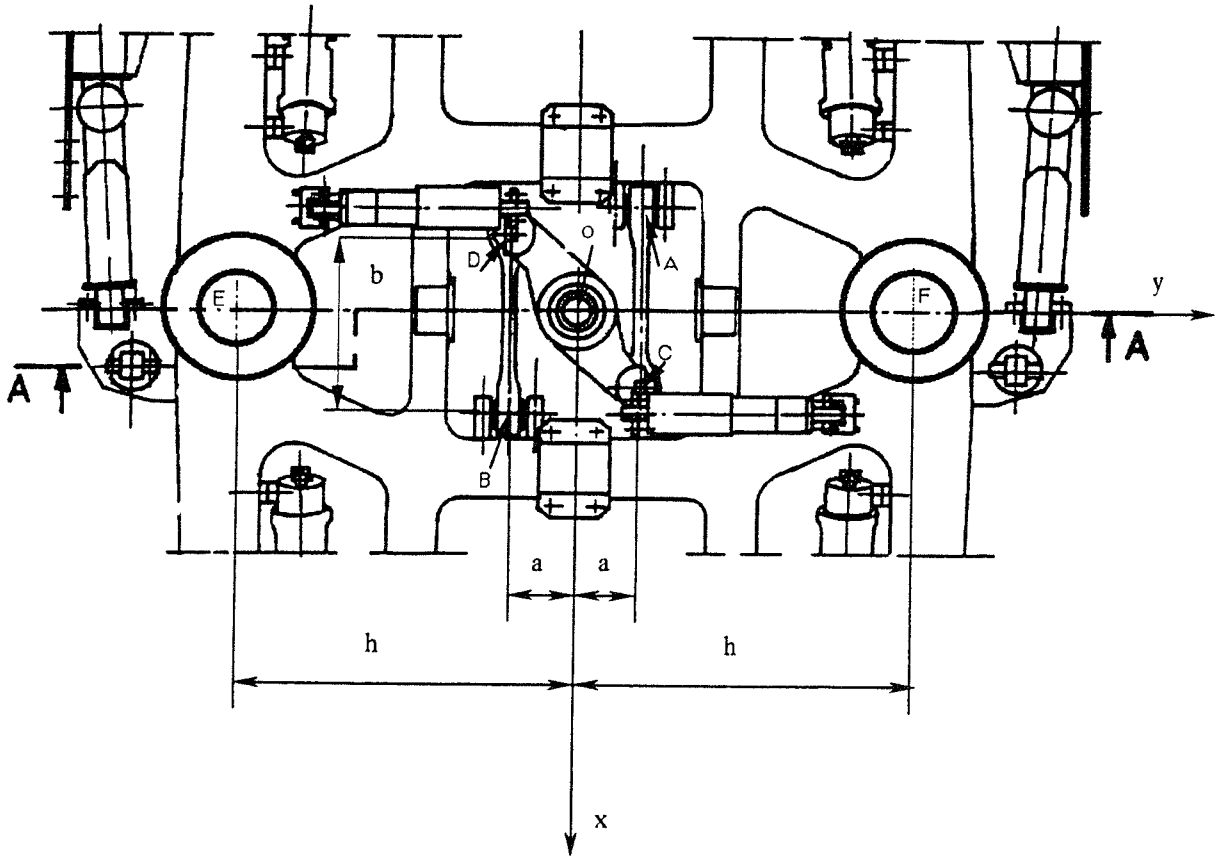
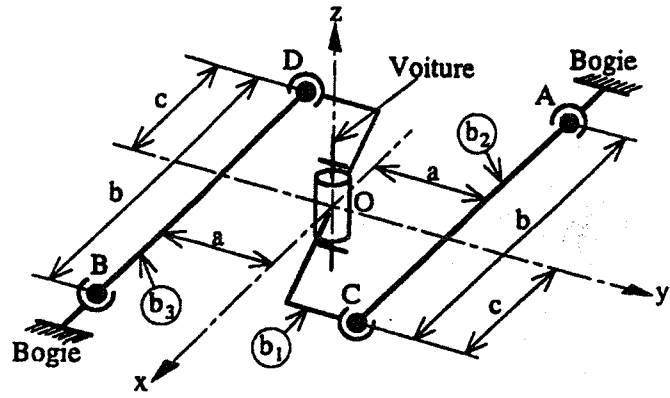


Figure 2-1

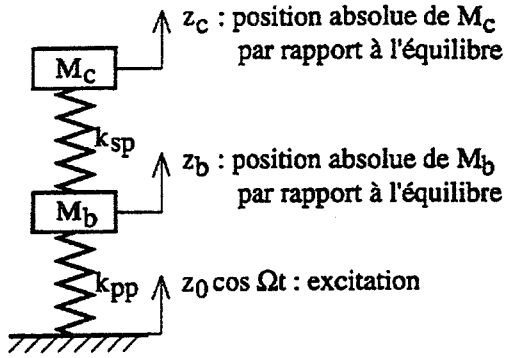
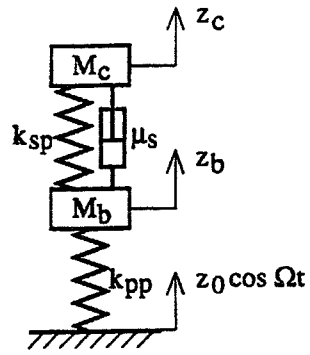
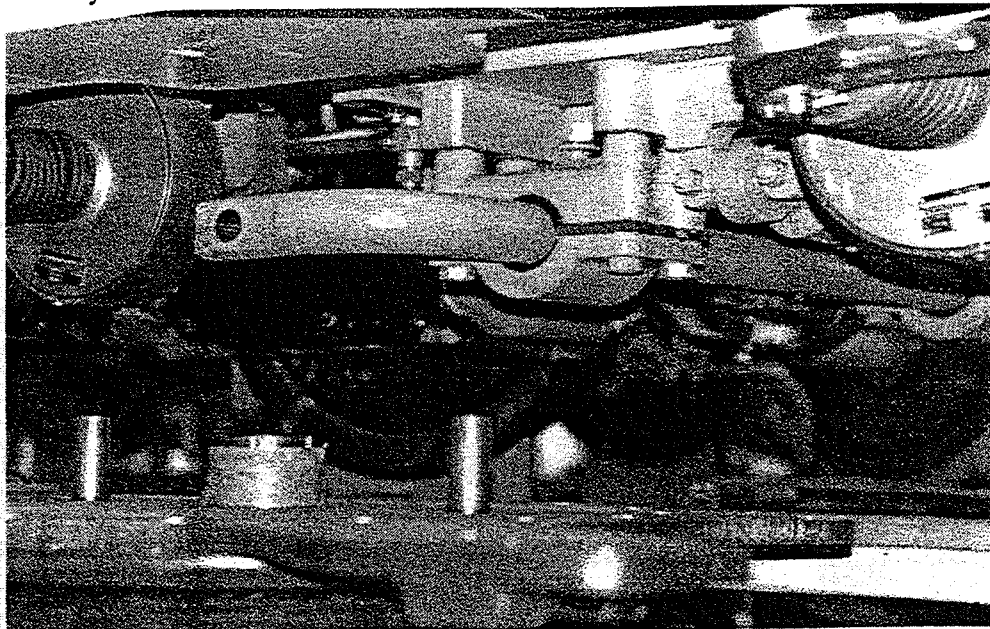
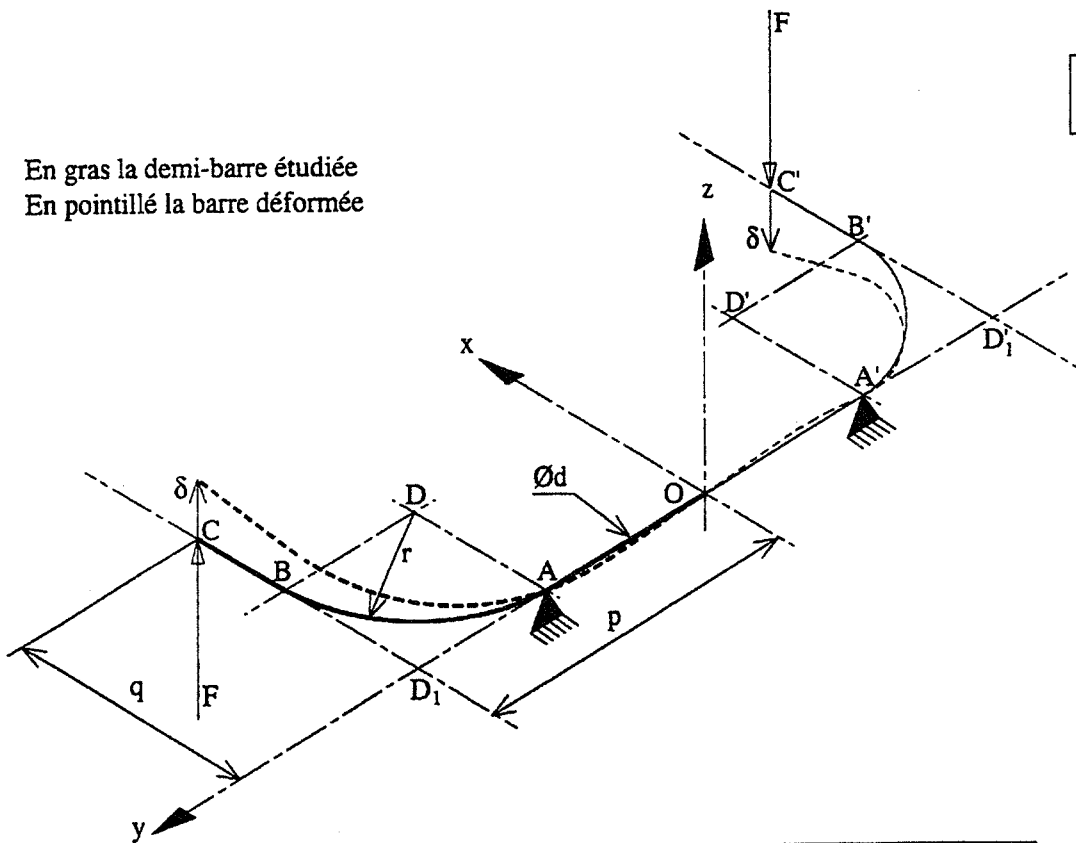


Figure 2-2

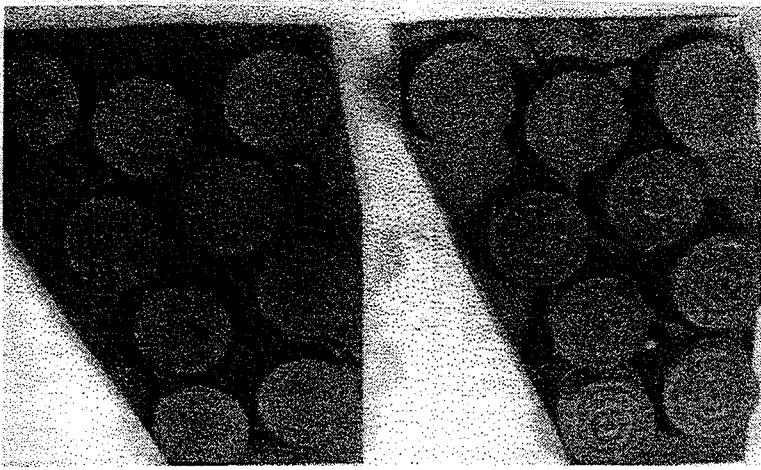


Figures 3

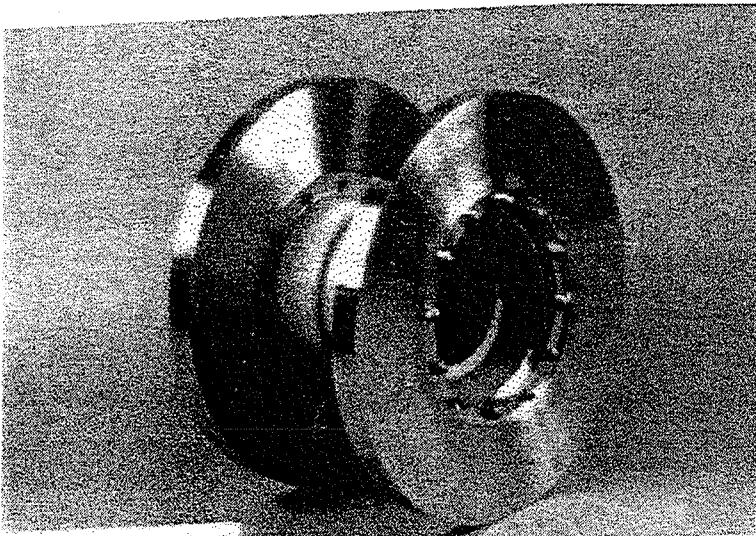
En gras la demi-barre étudiée
En pointillé la barre déformée



Figures 5-1



Garnitures frittées



Double disque TGV – Bogie porteur

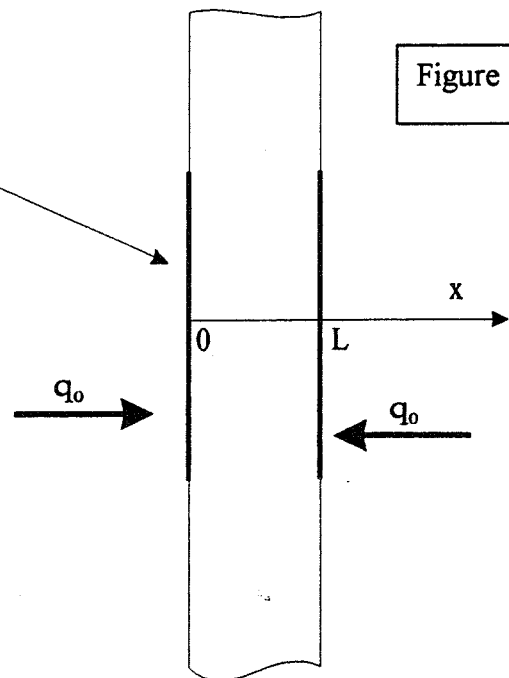
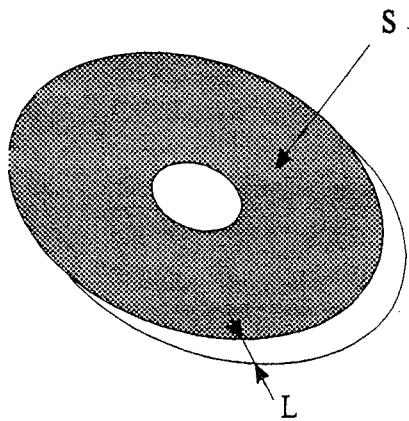


Figure 5-2