

PREMIERE PARTIE : MECANIQUE DES SOLIDES INDEFORMABLES

DETERMINATION DES CONSIGNES D'ASSERVISSEMENT

La programmation de la rotation du sous-ensemble 1 par rapport au massif-bâti 0 - c'est à dire l'angle $\psi(t)$ et ses dérivées - permet d'atteindre une accélération simulée de l'ordre de 15g en environ 2 secondes.

Le rôle des asservissements de roulis et de tangage est de maintenir colinéaires l'axe (C, \bar{z}_3) de la nacelle (axe de la colonne vertébrale du pilote) et l'axe de la résultante des actions de contact exercée par la nacelle 3 sur le pilote. Ceci impose des relations (ou consignes) entre l'angle $\theta(t)$ et la dérivée $d\psi/dt$ d'une part, et l'angle $\alpha(t)$ et les dérivées $d\psi/dt$ et $d^2\psi/dt^2$ d'autre part.

L'action exercée par la nacelle 3 sur le pilote de masse m_p est modélisée au point C par le torseur $[A_{3p}]$ de résultante \vec{R} et de moment \vec{M}_C noté, $[A_{3p}] = [\vec{R} = X.\bar{x}_3 + Y.\bar{y}_2 + Z.\bar{z}_3 ; \vec{M}_C]$.

1.1. Théorème de la résultante dynamique appliqué au pilote, en projections sur b_1

$$m_p \cdot \vec{\Gamma}_{cdg, p0} = \vec{P}_P + \vec{R}_{3p}$$

$$\text{avec : } \vec{R}_{3p} = X.\bar{x}_3 + Y.\bar{y}_2 + Z.\bar{z}_3$$

$$X = Y = 0,$$

$$\bar{z}_3 = \sin \alpha.\bar{x}_1 + \cos \alpha.\bar{z}_2 = \sin \alpha.\bar{x}_1 - \cos \alpha.\sin \theta.\bar{y}_1 + \cos \alpha.\cos \theta.\bar{z}_0$$

$$\text{et : } \vec{P}_P = m_p.g.\bar{z}_0$$

$$\vec{\Gamma}_{cdg, p0} = d_0/dt(\vec{V}_{O', 30})$$

$$\vec{V}_{C, 30} = \vec{V}_{C, 10} = \vec{V}_{O, 10} + \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{OC}$$

$$/ \bar{x}_1 \quad m_p R \ddot{\psi} \quad = \quad Z \sin \alpha \quad 1$$

$$/ \bar{y}_1 \quad m_p R \dot{\psi}^2 \quad = \quad - Z \cos \alpha \sin \theta \quad 2$$

$$/ \bar{z}_0 \quad 0 \quad = \quad Z \cos \alpha \cos \theta + m_p g \quad 3$$

$$2 \text{ et } 3 \quad \theta = \text{Arctan}(R\dot{\psi}^2/g) \quad 23$$

$$1, 3 \text{ et } 23 \quad \alpha = - \text{Arctan}[R\ddot{\psi}/(g^2 + R^2\dot{\psi}^4)^{1/2}]$$

1.2. Accélération simulée ou totale, module noté A

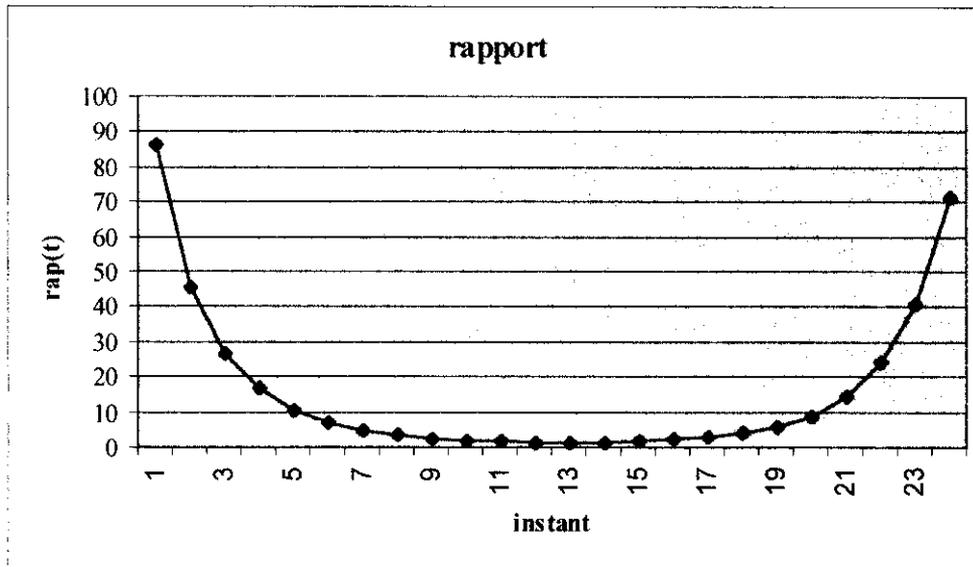
$$A^2 = g^2 + R^2(\dot{\psi}^4 + \ddot{\psi}^2)$$

$$\text{par identification : } a = 1, b = c = R^2$$

$$\text{pour } \ddot{\psi} = 0 \text{ et } A = 15 \text{ g, il vient : } \dot{\psi} = 4,389 \text{ rad/s}$$

1.3. Terme pondérant dans l'accélération simulée

Comparer $\dot{\psi}^4$ et $\ddot{\psi}^2$ en formant le rapport $\dot{\psi}^4/\ddot{\psi}^2$



ETUDE DES EQUILIBRAGES STATIQUE ET DYNAMIQUE

1.4. Equilibrage statique de l'ensemble E

Centre de gravité sur l'axe de rotation (O, \vec{z}_0) , x_G et y_G nuls

L'ensemble E comprend les éléments $E = \{1, 2, 3', 4, 5\}$; avec $3' = \{3 + \text{pilote}\}$

$$m_T \begin{vmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{vmatrix} = m_v \begin{vmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{vmatrix} + m_c \begin{vmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{vmatrix} + m_b \begin{vmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{vmatrix} + m_3 \begin{vmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{vmatrix} + m_4 \begin{vmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{vmatrix} + m_5 \begin{vmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Intégrer les particularités de l'ensemble, $x_4 = -x_5$ et $y_4 = y_5$

Masse totale $m_T = m_v + m_c + m_b + m_2 + m_3 + m_4 + m_5$

Les coordonnées et masses grisées sont nulles.

$$4 \quad m_4 = m_5$$

$$5 \quad m_i = 3593 \text{ kg pour } i = 4 \text{ ou } 5$$

1.5. Coordonnée z_G de l'ensemble E

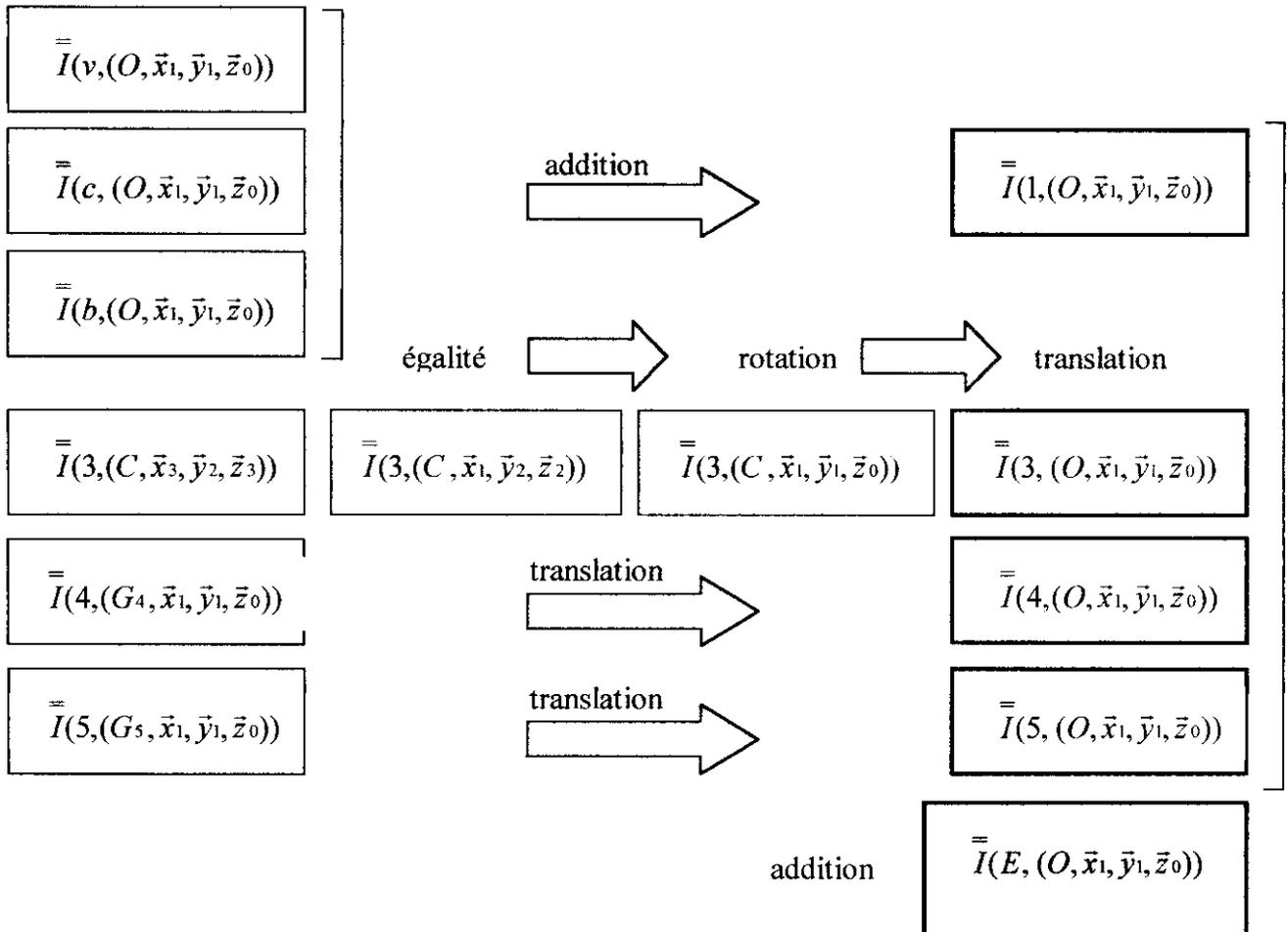
$$6 \quad z_G = [m_v \cdot z_v + m_4 (z_4 + z_5)]/m_T$$

1.6. Equilibrage dynamique de l'ensemble E

Axe (O, \vec{z}_0) principal d'inertie

Les produits d'inertie D et E de l'ensemble $\{1-2-3-4-5\}$ dans la matrice relative au repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ doivent être annulés.

Démarche de détermination de la matrice $\bar{I}(E, (O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0))$:



1.7. La matrice $\bar{I}(1, (O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0))$ est diagonale.

Les solides 3', 4, 5 contribuent en D et/ou E pour l'ensemble $E = \{1, 3', 4, 5\}$.

Pour le solide 3' :

rotation d'axe (C, \bar{x}_1) et contribution en D. Pas de contribution en E et F.

$$- D'_3 = \bar{y}_1 \cdot (\bar{I}(3, (O, \bar{x}_1, \bar{y}_2, \bar{z}_2)) \cdot \bar{z}_0)$$

$$- D'_3 = (B_3 - A_3) \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$$

translation de vecteur \overline{CO} . Pas de contribution en D, E et F.

$$- D''_3 = -D'_3 - m_3 \cdot y_C \cdot z_C, \text{ avec } z_C = 0$$

Pour les solides 4 et 5 :

translation de vecteur $\overline{G_iO}$ et contribution en D et E. Pas de contribution en F.

$$D'_i = D_i + m_i \cdot y_i \cdot z_i$$

$$E'_i = E_i + m_i \cdot x_i \cdot z_i, \text{ pour } i = 4 \text{ ou } 5 \text{ et avec } D_i = E_i = 0$$

Pour l'ensemble E, il vient donc :

$$0 = D = m_4 \cdot y_4 \cdot z_4 + m_5 \cdot y_5 \cdot z_5 + (A_3 - B_3) \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \quad 7$$

$$0 = E = m_4 \cdot x_4 \cdot z_4 + m_5 \cdot x_5 \cdot z_5 \quad 8$$

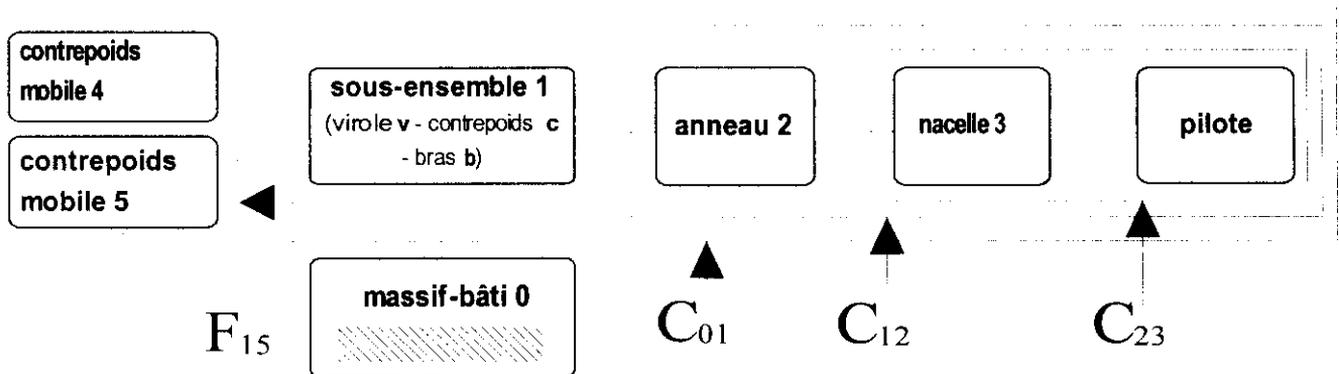
8 et $m_4 = m_5$ et $x_4 = -x_5$ donnent $z_4 = z_5$

7 et $y_4 = y_5$ donnent $z_4 = z_5 = (B_3 - A_3) \cdot \sin 2\theta / 4 \cdot m_i \cdot y_i$ avec $i = 4$ ou 5

$\dot{\psi} = 4,389$ rad/s, il vient : $z_i = 11,85 \cdot 10^{-3}$ mm

APPROCHE DE LA DETERMINATION DE LA MOTORISATION

1.8. Détermination des composantes



$F_4 = F_{14}$ (même raisonnement pour $F_5 = F_{15}$)

Théorème de la résultante dynamique appliqué à 4 (resp. 5), en projection sur \bar{z}_0

$$\bar{d}_{40} \cdot \bar{z}_0 = \bar{F}_{ext/4} \cdot \bar{z}_0$$

- motorisation F_4 , contribution
- liaison 14
- action aérodynamique
- poids 4, contribution

$C_\alpha = C_{23}$

Théorème du moment dynamique appliqué au sous-ensemble $3' = \{3 + pilote\}$, au point C, en projection sur \bar{y}_2

$$\bar{\delta}_{C,3'0} \cdot \bar{y}_2 = \bar{M}_{C,ext/3'} \cdot \bar{y}_2$$

- motorisation C_α , seule contribution
- liaison 23
- action aérodynamique
- poids 3 et P

avec : $\bar{\delta}_{C,3'0} \cdot \bar{y}_2 = (d_0/dt \bar{L}_{C,3'0}) \cdot \bar{y}_2$

$$\vec{L}_{C,3'0} = \vec{I}(3', R_2) \cdot \vec{\Omega}_{3'0}$$

$$C_0 = C_{12}$$

Théorème du moment dynamique appliqué au sous-ensemble $2' = \{2 + 3 + \text{pilote}\}$, au point C, en projection sur \vec{x}_2

$$\vec{\delta}_{C,2'0} \cdot \vec{x}_2 = \vec{M}_{C, \text{ext}/2'} \cdot \vec{x}_2$$

- motorisation C_0 , seule contribution
- liaison 12
- action aérodynamique
- poids 2, 3 et P

$$\text{avec : } \vec{\delta}_{C,2'0} = \vec{\delta}_{C,3'0} + \vec{\delta}_{C,20} \text{ et } \vec{\delta}_{C,20} = \vec{0}$$

$$\vec{\delta}_{C,3'0} \cdot \vec{x}_2 = (d_0/dt \vec{L}_{C,3'0}) \cdot \vec{x}_2$$

$$\vec{L}_{C,3'0} = \vec{I}(3', R_2) \cdot \vec{\Omega}_{3'0}$$

$$C_\psi = C_{01}$$

Théorème du moment dynamique appliqué à E, au point O, en projection sur \vec{z}_0

$$\vec{\delta}_{C,E0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}_{O, \text{ext}/E} \cdot \vec{z}_0$$

- motorisation C_ψ , seule contribution
- liaison 01
- action aérodynamique
- poids 1, 2, 4 et 5, 3 et P

$$\text{avec : } \vec{\delta}_{O,E0} = \vec{\delta}_{O,50} + \vec{\delta}_{O,40} + \vec{\delta}_{O,3'0} + \vec{\delta}_{C,20} + \vec{\delta}_{O,10} \text{ et } \vec{\delta}_{C,20} = \vec{0}$$

$$\text{et : } \vec{\delta}_{O,50} \cdot \vec{z}_0 = \vec{\delta}_{G5,50} \cdot \vec{z}_0 + (\vec{OG}_5 \wedge m_5 \cdot \vec{\Gamma}_{G5,50}) \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}_{G5,50} \cdot \vec{z}_0 = (d_0/dt \vec{L}_{G5,50}) \cdot \vec{z}_0 = d_0/dt(\vec{L}_{G5,50} \cdot \vec{z}_0)$$

$$\vec{L}_{G5,50} \cdot \vec{z}_0 = (\vec{I}(5, (G_5, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)) \cdot \vec{\Omega}_{50}) \cdot \vec{z}_0, \text{ identique pour 4}$$

$$\text{et : } \vec{\delta}_{O,3'0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{\delta}_{C,3'0} \cdot \vec{z}_0 + (\vec{OC} \wedge m_3 \cdot \vec{\Gamma}_{C,3'0}) \cdot \vec{z}_0$$

$$\text{et : } \vec{\delta}_{O,10} \cdot \vec{z}_0 = (d_0/dt \vec{L}_{O,10}) \cdot \vec{z}_0 = d_0/dt(\vec{L}_{O,10} \cdot \vec{z}_0)$$

$$\vec{L}_{O,10} \cdot \vec{z}_0 = (\vec{I}(1, (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)) \cdot \vec{\Omega}_{10}) \cdot \vec{z}_0$$

1.9. Expression de F_4 (même raisonnement pour F_5)

$$m_4 \ddot{z}_4 = F_4 + m_4 g$$

$$\text{avec : } z_4 = (B_3 - A_3) \cdot \sin 2\theta / 4 \cdot m_4 y_4$$

$$F_4 = -m_4 g + (\ddot{\theta} \cos 2\theta - \dot{\theta}^2 \sin 2\theta)(B_3 - A_3) / 2 y_4$$

$$\text{Où : } y_4 = R \cdot \cos 30^\circ \text{ et } \theta = \text{Arctan}(R \dot{\psi}^2 / g)$$

Q.1.8

Q.1.7

1.10. Expression de C_ψ

$$C_\psi = [C_1 + m_3 \cdot R^2 + B_3 \cdot \sin 2\theta + A_3 \cdot \cos 2\theta + 2(C_i + m_i \cdot r^2)] \dot{\psi}$$

$$\begin{aligned} &+ B_3 (\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}\dot{\theta} \cdot \cos\theta) \\ &+ (B_3 - A_3) \cdot \dot{\psi}\dot{\theta} \cdot \sin 2\theta \end{aligned}$$

1.11. Puissance P_ψ

$P_\psi = C_\psi \cdot \ddot{\psi}$, très légèrement supérieure à 1 MW à l'instant 21.

DEUXIEME PARTIE : MECANIQUE DES SOLIDES DEFORMABLES

DIMENSIONNEMENT DU BRAS B – POUTRE A SECTION VARIABLE

Nous nous proposons dans cette section de réfléchir sur le dimensionnement du bras qui soutient la nacelle. En se plaçant dans le repère tournant $(O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$, il peut être modélisé en première approche par une simple poutre encastree libre de section rectangulaire évolutive de largeur $b(x)$ et de hauteur $a(x)$ avec $b = \alpha a$. Les efforts qui le sollicitent sont le poids et les efforts d'inertie associés à la nacelle et au bras lui-même.

Nous nous plaçons dans les hypothèses de la résistance des matériaux, et, dans un premier temps, nous négligeons les efforts dus au bras en ne conservant que ceux induits par la nacelle. Ces derniers sont majorés en considérant les valeurs de l'accélération radiale et azimutale maximales. De sorte que le bras est considéré comme soumis en C à la force :

$$\vec{F}_{\max} = m_3 R (\dot{\psi}_{\max}^2 \bar{X} + \ddot{\psi}_{\max} \bar{Y}) - m_3 g \bar{Z}$$

où le repère de travail est redéfini comme suit : $(O, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) = (O, -\bar{y}_1, -\bar{x}_1, -\bar{z}_1)$.

Le but de l'étude est de déterminer la loi d'évolution de la section de la poutre qui induit une contrainte normale maximale constante et d'en déduire la déformée.

2.1. Torseur des actions de cohésion

Dans une section droite de la poutre, à une abscisse x , le torseur des actions de cohésion s'écrit :

$$\{T_{\text{coh}}\}_{G(x)} = \left\{ \begin{array}{l} m_3 R (\dot{\psi}_{\max}^2 \bar{X} + \ddot{\psi}_{\max} \bar{Y}) - m_3 g \bar{Z} \\ m_3 (R-x) R \ddot{\psi}_{\max} \bar{Z} + m_3 g (R-x) \bar{Y} \end{array} \right\}_{G(x)}$$

2.2. Contrainte normale maximale

Sous les hypothèses de la résistance des matériaux, nous pouvons appliquer le principe de superposition des sollicitations, ce qui nous donne :

$$\sigma_{\max}(x) = \frac{N}{S} + \frac{Mfz}{ba^3} \frac{a}{12} + \frac{Mfy}{ab^3} \frac{b}{12}$$

avec $N = m_3 R \dot{\psi}_{\max}^2$, $Mfz = m_3 (R-x) R \ddot{\psi}_{\max}$, $Mfy = m_3 g (R-x)$.

2.3. Détermination de α

En considérant que les contributions maximales des deux composantes du moment fléchissant sur la contrainte normale comme identiques, le rapport α est donné par la relation :

$$\frac{Mfz}{ba^3} \frac{a}{12} = \frac{Mfy}{ab^3} \frac{b}{12} \Rightarrow \alpha = \frac{g}{R \ddot{\psi}_{\max}}$$

L'application numérique donne $\alpha = 0,367$.

2.4. Détermination de l'évolution $a(x)$ de la hauteur de la poutre

En construction, pour obtenir des structures légères, on peut considérer que la contrainte normale maximale doit être la même dans chaque section et égale à la résistance pratique R_p . Ceci nous permet d'obtenir l'évolution $a(x)$ de la hauteur de la poutre.

A partir de la relation reliant la résistance pratique et la contrainte normale maximale, nous obtenons :

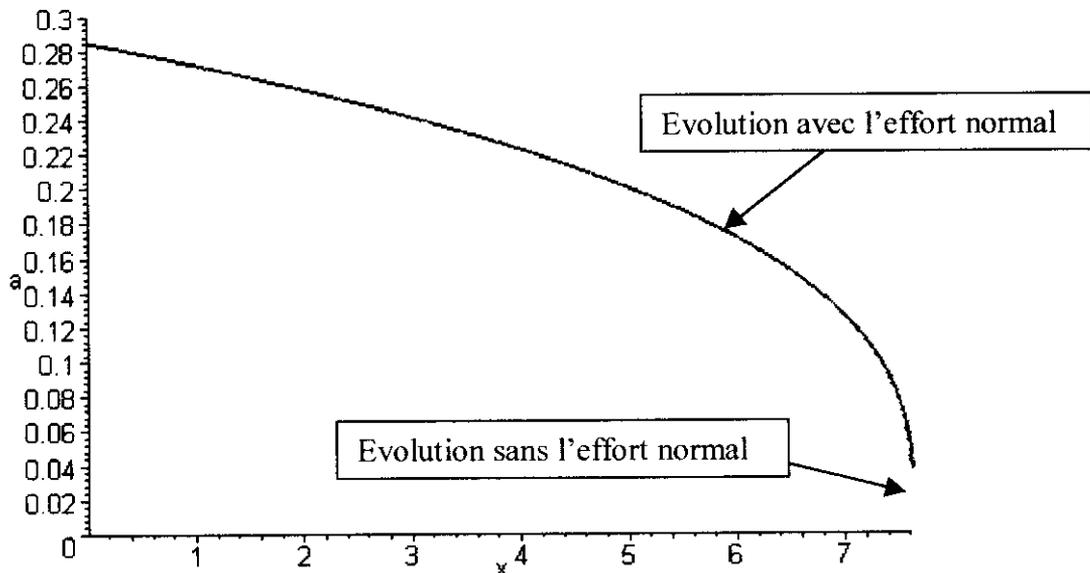
$$\alpha a^3 R_p = m_3 R \dot{\psi}_{\max}^2 a + 12 m_3 R \ddot{\psi} (R - x)$$

ce qui donne comme expression pour les constantes :

$$A = \frac{m_3 R \dot{\psi}_{\max}^2}{\alpha R_p}; B = \frac{12 m_3 R \ddot{\psi}}{\alpha R_p}$$

L'application numérique donne : $A = 1,361 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$; $B = 2,966 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$.

La loi d'évolution est une parabole donnée sur la figure ci-dessous.



2.5. Détermination de l'évolution $a(x)$ de la hauteur de la poutre si nous négligeons l'effort normal

En négligeant l'effort normal dans l'expression de la question précédente, nous trouvons la relation :

$$\alpha a^3 R_p = 12 m_3 R \ddot{\psi} (R - x)$$

Ce qui nous donne : $B = \frac{12 m_3 R \ddot{\psi}}{\alpha R_p}$

Nous constatons que l'influence la prise en compte ou non de l'effort normal sur la dimension $a(x)$ de la section est inférieure à 3% sur près de 90% de la longueur de la poutre. La différence majeure est à l'extrémité de la poutre où, quand on ne prend pas en compte l'effort normal, nous obtenons une section nulle, ce qui n'est pas envisageable d'un point de vue dimensionnement.

Cependant, afin de simplifier les calculs, nous considérons dans la suite que cette évolution est celle obtenue sans la prise en compte de l'effort normal. Ceci peut se justifier dans la phase d'avant projet.

2.6. Détermination de la flèche à l'extrémité de la poutre due au moment fléchissant porté par les directions \vec{Y} et \vec{Z}

A partir de la relation liant le rayon de courbure au moment fléchissant et des conditions liées à l'encastrement en 0, nous obtenons :

- pour la flèche à l'extrémité due au moment fléchissant porté par la direction \vec{Z} .

$$v(R) = \frac{3}{5} \frac{(m_3 \ddot{\psi}_{\max} R)^{-1/3}}{\alpha E \left(\frac{12}{\alpha R_p} \right)^3} R^5$$

D'où la valeur de $H = \frac{3}{5}$.

L'application numérique conduit au résultat suivant : $v(R) = 4,68 \cdot 10^{-3}$ m.

- pour la flèche à l'extrémité due au moment fléchissant porté par la direction \vec{Y}

$$v(R) = - \frac{3g}{5\alpha^2 R \ddot{\psi}_{\max}} \frac{(m_3 \ddot{\psi}_{\max} R)^{-1/3}}{\alpha E \left(\frac{12}{\alpha R_p} \right)^3} R^5$$

D'où la valeur de $H = - \frac{3g}{5\alpha^2 R \ddot{\psi}_{\max}}$.

L'application numérique conduit au résultat suivant : $v(R) = 12,7 \cdot 10^{-3}$ m.

On constate que la flèche à l'extrémité due au moment fléchissant porté par la direction \vec{Y} est 3 fois plus importante que celle due au moment fléchissant porté par la direction \vec{Z} .

2.7. Vérification des hypothèses de la résistance des matériaux

Nous avons réalisé le calcul des dimensions de la section en faisant l'hypothèse que la contrainte normale maximale doit être la même dans chaque section et égale à la résistance pratique R_p . Nous devons donc vérifier que les dimensions transversales de la poutre sont faibles devant la dimension longitudinale.

Nous avons une dimension transversale maximum de 0,28 m pour une dimension longitudinale de 7,62 m. Ce qui nous donne un rapport des dimensions de 27, ce qui permet de vérifier l'hypothèse où le rapport L/H doit être d'au moins 10.

Nous admettons aussi que l'hypothèse de Bernoulli est vérifiée. Nous faisons donc l'hypothèse simplificatrice du champ de déplacement, c'est à dire que la section droite de la poutre avant déformation reste plane et normale à la tangente à la ligne moyenne après déformation.

La variation lente de la section peut être remise en cause, mais en première approche, elle est acceptable, il en est de même pour l'hypothèse de St Venant.

2.8. Estimation du moment fléchissant induit par les efforts d'inertie de la poutre à l'encastrement

L'expression du moment fléchissant induit par les efforts d'inertie de la poutre est donnée par la relation :

$$dMf = dm \ddot{\psi} x^2 \Rightarrow Mf_{inertie} = \int_0^R \rho \alpha \ddot{\psi} \left(\frac{12m_3 R \ddot{\psi}_{max}}{\alpha R_p} \right)^2 (R-x)^2 x^3 dx$$

Ce qui nous donne après calculs : $Mf_{inertie} = 0,216 \cdot 10^6 \text{ Nm}$. Nous devons donc comparer ce résultat à celui du moment fléchissant induit par la nacelle donné par l'expression : $Mf_{nacelle} = m_3 R^2 \ddot{\psi}_{max}$. L'application numérique donne : $Mf_{nacelle} = 0,316 \cdot 10^6 \text{ Nm}$. Nous obtenons donc des valeurs qui ont le même ordre de grandeur aussi l'hypothèse de négliger les effets d'inertie n'est pas vérifiée.

2.9. Conclusion quant aux hypothèses et vis à vis de la solution technologique retenue.

La masse de la poutre est donné par la relation :

$$m = \int_0^R \rho \alpha \left(\frac{12m_3 R \ddot{\psi}_{max}}{\alpha R_p} \right)^2 (R-x)^2 dx = \frac{3}{5} \alpha \rho \left(\frac{12m_3 R \ddot{\psi}_{max}}{\alpha R_p} \right)^2 R^3$$

L'application numérique donne $m = 1050,7 \text{ kg}$. On trouve donc une masse inférieure à celle du treillis, mais le calcul n'est pas fiable étant donné la question précédente. On préférera donc passer à une solution treillis qui permettra d'augmenter l'inertie sans être trop pénalisant pour la masse du bras.

Afin de traiter l'étude de la structure treillis, nous allons utiliser la méthode des éléments finis sur les barres et en rappeler les bases.

2.10. Application du principe des travaux virtuels à une structure sollicitée uniquement en traction-compression

Dans un premier temps, nous appliquons le principe des travaux virtuels au treillis. Nous discrétisons ensuite cette forme intégrale en éléments linéiques à deux nœuds de type barre et calculons la matrice de rigidité élémentaire associée à l'élément (dans un repère local). Puis nous recherchons la matrice de passage permettant d'exprimer la matrice de rigidité en fonction des degrés de liberté globaux. Enfin, nous développons l'assemblage pour la structure complète dont nous explicitons les calculs pour le premier cadre défini figure n°2.6.

Le principe des travaux virtuels s'écrit : $W_i^* + W_e^* = W_a^*$ avec les hypothèses suivantes :

- les phénomènes d'origine thermique sont négligés ;
- les efforts et les liaisons sont indépendants du temps ;
- petites perturbations.

Le travail des efforts extérieurs vaut : $W_e^* = \int_{\Omega} f_d u^* d\Omega + \int_{\delta\Omega} F_d u^* dS$ dans le cas général

avec f_d les forces de volume et F_d les forces surfaciques, u^* le champ de déplacement virtuel cinématique admissible et Ω le domaine. En appliquant cette relation aux structures à barres, nous obtenons $W_e^* = \sum_i N_i u_i^*$ où N_i représente les sollicitations dans les barres.

Le travail des efforts intérieurs vaut : $W_i^* = - \int_{\Omega} \text{trace}(\sigma \varepsilon(\bar{u})) d\Omega$. Dans le cas des structures à

barres, nous obtenons $W_i^* = - \int_0^L ES \frac{du}{dx} \frac{du^*}{dx} dx$.

Le travail des quantités d'accélération vaut : $W_a^* = \int_{\Omega} \rho \frac{d^2 u}{dt^2} u^* d\Omega$. Dans le cadre de notre étude, il est nul car nous nous plaçons à vitesse constante.

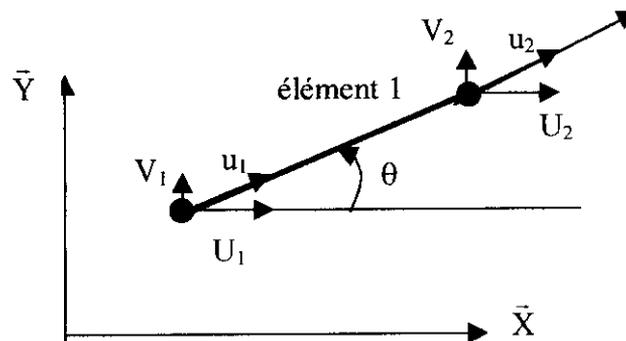
2.11. Détermination de la matrice de rigidité de l'élément barre dans son repère local

Nous choisissons un champ de déplacement $u(x)$ qui s'exprime en fonction des déplacements des nœuds (1) et (2) sous la forme : $u(x) = u_1 \left(\frac{L-x}{L}\right) + u_2 \frac{x}{L}$ pour $0 \leq x \leq L$, de même, nous adoptons une approximation similaire pour le champ de déplacement virtuel. Ceci nous permet le calcul du travail des efforts intérieurs et la détermination de la matrice de rigidité, d'où :

$$[K] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.12. Calcul de la matrice de passage du repère local au repère global

Afin de permettre la construction de la matrice de rigidité globale qui sera construite dans le repère de la structure, nous allons déterminer la matrice de passage du repère local au repère global.



Pour l'élément de barre à deux nœuds, nous obtenons :

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

2.13 Ecriture de la matrice de raideur élémentaire dans le repère global de la structure

Dans le repère global, chaque déplacement de nœud possède deux composantes U_i et V_i , d'où la matrice $[K]$ pour l'élément :

$$[K] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de raideur élémentaire dans le repère global est donné par $[K_e] = {}^T[R][K][R]$, soit :

$$[K_e] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

2.14. Construction de la matrice de rigidité globale de la structure plane du bras

Dans la structure plane donnée, nous avons 10 nœuds et 16 éléments. Tout d'abord pour chacun des éléments, il faut déterminer sa longueur et son repérage par l'angle θ défini ci-dessus. Ainsi pour chaque élément, nous pourrions déterminer la matrice de raideur élémentaire dans le repère global.

Ensuite, Il faut construire la table des connexions des nœuds afin de voir comment va se réaliser l'assemblage des différentes matrices.

Enfin, nous pouvons construire la matrice de raideur globale de la structure. Nous obtiendrons une matrice 20×20 car chaque nœud a deux composantes de déplacement.

Ceci conduit à des calculs longs et fastidieux aussi afin de mettre en œuvre la méthode, nous nous limiterons à l'assemblage des éléments constituant le premier cadre et pour la structure complète, un logiciel sera utilisé.

2.15. Ecriture de la matrice de rigidité de l'assemblage du premier cadre

Le premier cadre comporte 4 nœuds et 4 éléments.

Nous savons que le cadre s'inscrit dans un carré de côté 1,905 m ce qui nous permet de déterminer toutes les longueurs et tous les angles.

Détermination des grandeurs pour les éléments 1 et 4.

L'angle d'inclinaison de la barre 4 est identique à celui de la barre 1 au signe près :

$\theta_4 = 5,35^\circ$ et $\theta_1 = -5,35^\circ$. Leurs longueurs sont identiques : $L_1 = L_4 = 1,913$ m.

Détermination des grandeurs pour l'élément 2.

L'angle d'inclinaison de la barre 2 vaut : $\theta_2 = 90^\circ$ et sa longueur $L_2 = 1,548$ m.

Détermination des grandeurs pour l'élément 3.

L'angle d'inclinaison de la barre 3 vaut : $\theta_3 = 148,51^\circ$ et sa longueur $L_3 = 2,57$ m.

Écriture de la table des connexions des nœuds.

Élément	Nœud origine	Nœud extrême
1	1	2
2	2	3
3	1	3
4	3	4

A partir de ceci, nous pouvons construire la matrice de rigidité globale résultant de l'assemblage des éléments du premier cadre. Nous obtenons une matrice 8*8.

$$[K_{\text{cadre}}] = ES \begin{bmatrix} \frac{\cos^2 \theta_1}{L_1} + \frac{\cos^2 \theta_3}{L_3} & \frac{\cos \theta_1 \sin \theta_1}{L_1} + \frac{\cos \theta_3 \sin \theta_3}{L_3} & \frac{\sin^2 \theta_1}{L_1} + \frac{\sin^2 \theta_3}{L_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos \theta_1 \sin \theta_1}{L_1} + \frac{\cos \theta_3 \sin \theta_3}{L_3} & \frac{\cos^2 \theta_1}{L_1} & \frac{\cos \theta_1 \sin \theta_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sin^2 \theta_1}{L_1} + \frac{\sin^2 \theta_3}{L_3} & \frac{\cos \theta_1 \sin \theta_1}{L_1} & \frac{\cos^2 \theta_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos^2 \theta_4}{L_4} + \frac{\cos^2 \theta_3}{L_3} & \frac{\cos \theta_4 \sin \theta_4}{L_4} + \frac{\cos \theta_3 \sin \theta_3}{L_3} & \frac{\sin^2 \theta_4}{L_4} + \frac{\sin^2 \theta_3}{L_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \theta_4 \sin \theta_4}{L_4} + \frac{\cos \theta_3 \sin \theta_3}{L_3} & \frac{\cos^2 \theta_4}{L_4} & \frac{\cos \theta_4 \sin \theta_4}{L_4} & \frac{\cos^2 \theta_4}{L_4} & \frac{\cos^2 \theta_4}{L_4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sin^2 \theta_4}{L_4} + \frac{\sin^2 \theta_3}{L_3} & \frac{\cos \theta_4 \sin \theta_4}{L_4} & \frac{\cos^2 \theta_4}{L_4} & \frac{\cos \theta_4 \sin \theta_4}{L_4} & \frac{\sin^2 \theta_4}{L_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos^2 \theta_4}{L_4} & \frac{\cos \theta_4 \sin \theta_4}{L_4} & \frac{\cos^2 \theta_4}{L_4} & \frac{\cos \theta_4 \sin \theta_4}{L_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \theta_4 \sin \theta_4}{L_4} & \frac{\cos \theta_4 \sin \theta_4}{L_4} & \frac{\cos \theta_4 \sin \theta_4}{L_4} & \frac{\sin^2 \theta_4}{L_4} \end{bmatrix}$$

2.16. Calcul de la contrainte normale maximale dans la barre la plus sollicitée en traction

A partir du tableau des résultats du calcul par la méthode des éléments finis, nous pouvons déterminer que la barre 4 est la plus sollicitée en traction avec un effort normal qui vaut 242900 N.

La section des barres étant tubulaire, nous trouvons une contrainte normale qui vaut : $\sigma = 281,15 \text{ Mpa}$. Nous avons donc un coefficient de sécurité de 1,8.

2.17. Calcul de la contrainte normale maximale dans la barre la plus sollicitée en compression

A partir du tableau des résultats du calcul par la méthode des éléments finis, nous pouvons déterminer que la barre 15 est la plus sollicitée en compression avec un effort normal qui vaut -86500 N.

La section des barres étant tubulaire, nous trouvons une contrainte normale qui vaut : $\sigma_c = -100,12 \text{ Mpa}$. La contrainte due à la charge critique d'Euler est beaucoup plus élevée donc il n'y a pas de problèmes de flambage.

2.18. Conclusions quant à l'optimisation de la géométrie du treillis

A partir des résultats obtenus, on constate que les dimensions des barres pourraient être optimisées. Il peut être envisagé que les barres ne soient pas toutes de section équivalente ce qui permettrait de gagner en masse du bras. Cependant, les calculs réalisés ne prennent pas en compte tous les cas de calculs et de plus la modélisation plane peut être remise en cause par rapport à la structure réelle. Un calcul sur une structure en trois dimensions est nécessaire afin d'affiner les résultats sur les contraintes.

TROISIEME PARTIE : MECANIQUE DES FLUIDES

ESTIMATION DE LA FORCE DE TRAINEE SUR LA NACELLE

POSITION DU PROBLEME

Dans cette partie, on cherche à estimer les actions de l'air environnant sur la nacelle. Le problème n'est pas simple. La première difficulté est attachée au fait que la nacelle a un mouvement circulaire, de sorte qu'elle parcourt sa trajectoire plusieurs fois. Ainsi, après un premier passage, la nacelle rencontre un milieu en mouvement aléatoire correspondant à son propre sillage. La seconde difficulté vient du fait que la nacelle n'a pas un mouvement stationnaire. Son mouvement suit une loi horaire plus ou moins complexe. Cela impose la résolution d'un problème de mécanique des fluides non-stationnaire, ce qui n'est jamais trivial.

On se propose, dans cette étude, de tenir compte de la seconde difficulté en s'affranchissant de la première qui demanderait une mise en œuvre de moyens considérables.

Pour cela, nous allons schématiser le problème par celui d'une sphère en mouvement rectiligne dans un milieu initialement au repos. Dans un premier temps nous estimerons la force de traînée associée à un mouvement uniforme, puis nous essaierons de prendre en compte l'accélération de la nacelle.

3.1. Force de traînée

De façon générale la force de traînée sur un corps en mouvement dans un fluide peut être séparée en deux composantes : une composante de pression et une composante de frottement.

Q3.1. En effet, l'action du fluide sur le corps en mouvement résulte de l'intégrale du vecteur contrainte sur toute la surface du corps en contact avec le fluide. Localement, ce vecteur contrainte peut être décomposé en une composante normale, essentiellement induite par la pression et une composante tangentielle provoquée par la viscosité que l'on peut qualifier de frottement.

Q3.2. D'un point de vue théorique, la composante de pression qui est en général prédominante, est liée à la déflexion des lignes de courant par le corps. Par suite, un simple calcul "fluide parfait", en modélisant les décollements s'il y a lieu, peut permettre d'estimer cette composante. Par contre, la composante de frottement nécessite un calcul complet en fluide visqueux. Ce calcul est en général très lourd à mettre en œuvre.

Q3.3. En pratique, on effectue des essais sur maquette en soufflerie. La traînée totale s'obtient en utilisant une balance qui permet de mesurer la force de résistance à l'écoulement incident. La composante de pression peut s'obtenir par une mesure de la répartition de pression autour du corps. La mesure de la pression statique est relativement facile à mettre en œuvre en pratiquant de petits trous en paroi. En ce qui concerne la composante de frottement, elle s'obtient alors par différence.

3.2. Force de traînée associée à un mouvement uniforme

On considère que la nacelle, modélisée par une sphère, se déplace avec un mouvement uniforme dans un fluide visqueux. Une telle configuration est caractérisée par un ensemble de paramètres. Certains paramètres caractérisent le corps, sa géométrie a (son rayon), son mouvement V_c (sa vitesse). D'autres caractérisent le fluide, sa masse

volumique ρ , sa viscosité μ . Par suite la force de traînée qui s'exerce sur le corps est fonction de ces paramètres caractéristiques.

Q3.4. L'analyse dimensionnelle (Théorème de Vaschy-Buckingham) affirme que cette fonction, cette relation mathématique, ne dépend pas du système d'unités dans lequel on travaille, et cette analyse en déduit presque naturellement que l'expression mathématique qui relie ces paramètres ne les fait intervenir que sous la forme de rapports sans dimension. Dans notre cas, compte tenu des paramètres caractérisant notre configuration, cette relation peut s'écrire :

$$f\left(\frac{F_x}{\rho V_c^2 a^2}, \frac{\rho V_c a}{\mu}\right) = 0$$

On en déduit alors immédiatement l'expression demandée qui sert de définition au coefficient de traînée, C_x

$$F_x = C_x \left(\frac{\rho V_c 2a}{\mu}\right) \cdot \frac{1}{2} \rho V_c^2 \cdot \pi a^2$$

La fonction C_x reste indéterminée et elle peut être très compliquée. Elle est souvent déterminée par des essais. Elle reflète tous les mécanismes décrits précédemment qui dépendent du régime d'écoulement qui s'établit autour de l'objet.

Q3.5. La figure montre cette évolution en fonction des régimes de l'écoulement qui sont caractérisés par le nombre de Reynolds. Pour les faibles nombres de Reynolds, $Re < 1$, le C_x s'approche de la ligne $24/Re$ déterminé par Stokes. Autour de $2 \cdot 10^5$ on observe une chute brutale du C_x qui traduit le passage laminaire turbulent de la couche limite au point de décollement. La nature turbulente de la couche limite tend à la stabiliser et rejette plus loin son point de décollement, diminuant ainsi le coefficient de traînée. Le passage laminaire turbulent est bien sûr influencé par la rugosité de la surface.

Q3.6. Dans notre cas la valeur du nombre de Reynolds est de $Re \approx 6.5 \cdot 10^6$. Le régime de l'écoulement est donc turbulent. Le coefficient de traînée correspondant vaut environ $C_x \approx 0.2$ et la force de traînée $F_x \approx 980 \text{ N}$.

Par rapport aux autres forces mises en jeu, forces d'inertie par exemple, cette force est très faible. On peut facilement la négliger en première approximation.

3.3. Influence de la nature accélérée du mouvement

On cherche maintenant à estimer l'influence de l'accélération de la nacelle sur la force de traînée. Cette force est naturellement fonction du mouvement de l'air autour de la nacelle.

Formulation du problème

La formulation du problème regroupe les équations de conservation et l'expression des conditions aux limites.

Equations de conservation

Q3.7. Dans notre cas, nous pouvons considérer l'air comme un fluide incompressible. En effet le nombre de Mach est très faible.

$$\text{Mach} = V/c = 34/340 = 0.1$$

Par suite les effets de compressibilité peuvent être négligés.

Q3.8. L'équation locale de conservation de la masse se réduit alors à :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0$$

Q3.9. L'équation de quantité de mouvement locale pour un fluide visqueux et incompressible ou équation de Navier et Stokes s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta V_i \quad \text{avec } i = 1, 2, 3$$

Ces équations aux dérivées partielles sont non linéaires et couplées. Elles sont beaucoup trop complexes pour être utilisées telles quelles pour une simple estimation de la force de traînée (même si on introduit la symétrie axiale du problème). On cherche donc à les simplifier en faisant les hypothèses suivantes :

H1. On peut penser que l'accélération de la nacelle va créer une surpression à l'amont par rapport à l'aval. Par suite, la nature de la traînée devrait être plutôt de type pression. En conséquence, on néglige les forces visqueuses par rapport aux forces de pression : on fait l'hypothèse de fluide parfait.

H2. On s'intéresse à l'influence de l'accélération donc à l'influence des termes non stationnaires. En conséquence, on néglige les termes non linéaires de l'accélération par rapport aux termes stationnaires.

Q3.10. Dans ces conditions l'équation de quantité de mouvement se réduit à :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{grad} p}$$

Conditions aux limites

Q3.11. Le fluide étant parfait, les conditions aux limites sur la sphère se réduisent aux conditions aux limites naturelles : continuité des vitesses normales, $\vec{V} \cdot \vec{n} = \dot{x}_c \vec{x} \cdot \vec{n}$, soit en introduisant un repère local sphérique, $\vec{n} = \vec{e}_r$, il vient $\vec{V} \cdot \vec{e}_r = \dot{x}_c \cos \theta$.

Les autres conditions aux limites concernent l'état du fluide à l'infini qui est au repos :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{V} = \vec{0} \quad , \quad p = p_{\text{atm}}$$

Bilan

Q3.12. En conclusion, on cherche à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{grad} p} \\ \vec{V} \cdot \vec{e}_r = \dot{x}_c \cos \theta \quad \text{pour } r = a \\ \vec{V} = \vec{0} \quad p = p_{\text{atm}} \quad \text{pour } r = \infty \end{array} \right.$$

Les inconnues sont le champ de vitesse \vec{V} et le champ de pression p , soient a priori 4 champs scalaires.

Théorie Potentielle

Pour réduire le nombre de champs inconnus, on introduit le potentiel des vitesses.

Q3.13. Le champ de vitesses dérive d'un potentiel. En effet, si on prend le rotationnel de l'équation de quantité de mouvement, il vient $\overline{\text{rot}}\vec{V} = \vec{0}$, d'où l'existence du potentiel

$$\exists \Phi \text{ tq } \vec{V} = \overline{\text{grad}}_x \Phi$$

Q3.14. L'évolution de Φ est alors gérée par l'équation de continuité qui devient $\Delta\Phi=0$. Φ est alors solution du système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_x \Phi = 0 \\ |\vec{x}| \rightarrow \infty \quad \Phi(\vec{x}; t) = 0 \\ \vec{x} \in \text{sphère} \quad \overline{\text{grad}}_x(\Phi) \cdot \vec{e}_r = \dot{x}_c \vec{e}_x \cdot \vec{e}_r \end{array} \right.$$

Q3.15. L'équation de quantité de mouvement devient après intégration et compte tenu de la condition à l'infini :

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p = p_{\text{atm}}$$

Cette expression est une forme généralisée de l'équation de Bernoulli.

Par suite, il suffit de déterminer le potentiel Φ à l'aide du système donné en 3.15, de le reporter dans l'équation de Bernoulli généralisée pour en déduire la pression et par intégration sur la sphère la force de traînée recherchée.

Résolution

Prise en compte de la symétrie

On cherche $\Phi(\vec{x}; t)$ où \vec{x} est la position du point d'observation par rapport au repère absolu (du laboratoire). Pour pouvoir prendre en compte la symétrie du problème, on effectue le changement de variable suivant : $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{x}_c$ où \vec{x}' est la position du point d'observation par rapport à un repère lié à la sphère.

Le potentiel Φ peut donc être considéré comme une fonction de \vec{x} ($\Phi(\vec{x}; t)$) ou de \vec{x}' ($\Phi'(\vec{x}'; t)$), et on a :

$$\Phi(\vec{x}; t) = \Phi'(\vec{x}'; t) = \Phi'(\vec{x} - \vec{x}_c; t)$$

Q3.16. En dérivant cette dernière expression par rapport à la variable d'espace il vient :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_t = \left. \frac{\partial \Phi'}{\partial x'} \right|_t \cdot \left. \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_t = \left. \frac{\partial \Phi'}{\partial x'} \right|_t$$

Par suite on a $\Delta_x \Phi = \Delta_{x'} \Phi'$ et $\overline{\text{grad}}_x \Phi = \overline{\text{grad}}_{x'} \Phi'$, et donc la fonction Φ' de \vec{x}' vérifie le même système d'équations que la fonction Φ de \vec{x} .

On peut alors introduire simplement la symétrie sphérique du problème en écrivant :

$$\Phi'(\vec{x}'; t) = \Phi'(r, \theta, \phi : t) = \Phi'(r, \theta; t)$$

Q3.17. Le système d'équations s'exprime alors dans le système de coordonnées sphériques de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \Phi' &= \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi'}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi'}{\partial \theta} \right) = 0 \\ \left. \frac{\partial \Phi'}{\partial r} \right|_{r=a} &= \dot{x}_c \cos \theta \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi' &= 0 \end{aligned} \right.$$

Résolution

La forme des conditions limites (variables séparées, dépendance en $\cos(\theta)$) suggère de rechercher la solution sous la forme : $\Phi'(r, \theta; t) = f(r) \cdot \cos \theta \cdot \alpha(t)$.

Q3.18. L'équation différentielle qui régit l'évolution de la fonction $f(r)$ s'obtient en reportant la forme recherchée dans l'équation de Φ' .

$$f'' + \frac{2}{r} f' - \frac{2}{r^2} f = 0$$

Cette équation est une équation linéaire du second ordre sans second membre. L'ensemble de ses solutions forme donc un espace vectoriel de dimension 2. Il suffit de deux solutions indépendantes pour exprimer la solution générale. L'équation étant homogène d'ordre 1, on cherche donc des solutions en puissance de r . On obtient

$$f = \frac{A}{r^2} + B \cdot r$$

Q3.19. La condition à l'infini donne $B = 0$ et la condition sur la sphère :

$$A = -\frac{\dot{x}_c a^3}{2}$$

d'où l'expression de la solution Φ' :

$$\Phi'(r, \theta; t) = A \cdot \dot{x}_c(t) \cdot \frac{\cos \theta}{r^2} \quad \text{avec} \quad A = -\frac{\dot{x}_c a^3}{2}$$

Retour à la variable absolue \vec{x}

Q3.20. On en déduit l'expression de $\Phi(\vec{x}; t)$ en fonction de ses variables naturelles :

$$\Phi(x, y, z, t) = -\frac{\dot{x}_c a^3}{2} \frac{x - x_c}{\left((x - x_c)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}}$$

Force de traînée

Q3.21. En utilisant l'équation de Bernoulli généralisée, on obtient l'expression de la pression sur la sphère. Elle se met sous la forme :

$$p(r = a, \theta, \phi; t) = p_\infty + \rho \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \dot{x}_c \cdot B \cdot \cos \theta + \frac{1}{2} \cdot \dot{x}_c^2 \cdot (C + D \cdot \cos^2(\theta)) \right)$$

avec $B = a$, $C = 1$ et $D = 3$.

Q3.22. La force de traînée engendrée par cette distribution de pression s'obtient par l'intégrale :

$$\vec{F} = \int_{\text{Sphère}} -p \cdot \vec{n} \, dS$$

Après intégration, il ne reste que le terme en dérivée seconde.

$$\vec{F} = -\frac{2}{3}\rho\pi a^3 \ddot{x}_c \vec{x}$$

Q3.23. On constate que la force de traînée induite par le mouvement accéléré de la nacelle se traduit comme un effet de masse ajoutée. En effet on peut écrire l'équation de la quantité de mouvement de la nacelle de façon suivante :

$$\left(M + \frac{2}{3}\rho\pi a^3 \right) \cdot \ddot{x}_c = F_{\text{moteur}}$$

Tout ce passe comme si la masse de la nacelle était augmentée de

$$m_a = \frac{2}{3}\rho\pi a^3$$

Cette quantité représente, en quelque sorte, la masse du fluide qui est accélérée lors du mouvement de la nacelle. Dans notre situation, pour l'accélération maximale nous obtenons :

$$m_a \approx 8 \text{ Kg}$$

ce qui est négligeable par rapport à la masse de la nacelle.

Commentaires des correcteurs de l'épreuve « Mécanique des systèmes et des milieux déformables »

Le problème portait sur l'étude d'une centrifugeuse, équipement destiné à tester et entraîner les pilotes d'avions de chasse. Cet équipement qui comprend une nacelle articulée à l'extrémité d'un bras en rotation, restitue pour le pilote les mouvements de roulis et de tangage. Ce support a permis d'aborder différents thèmes, couvrant une large palette de connaissances de base du mécanicien. L'épreuve était constituée de trois parties, mécanique du solide indéformable, mécanique du solide déformable et mécanique des fluides. De façon générale, les deux premières parties ont été les plus abordées.

Nous souhaitons souligner une qualité moyenne de la rédaction des copies. De futurs enseignants doivent savoir mettre en évidence, les démarches et les résultats, rédiger des phrases courtes d'introduction et de conclusion et présenter un travail propre avec une mise en page et une orthographe décente.

Cette première partie comportait trois sections qui se sont révélées également sélectives.

Dans la section 1, la traduction complète du principe fondamental de la dynamique est inutile pour la recherche des expressions de θ et α . Le calcul du moment dynamique ne devient utile qu'à la question 10 et se trouve largement facilité par les réflexions conduites aux questions 6 et 8. La résolution débute par la détermination préalable de l'équation vectorielle utile, qui seule sera ensuite traduite.

Dans la section 2, après équilibrage statique, l'équilibrage dynamique est assuré si l'axe (O, \vec{z}_0) est principal d'inertie pour l'ensemble E. Il n'est donc pas nécessaire que la matrice $I(E, (O, b_i))$ soit diagonale. Traduire la nullité des produits d'inertie D et E n'impose pas un calcul complet de cette matrice. La résolution débute par la détermination préalable des termes utiles, qui seuls seront ensuite exprimés.

Dans la section 3, la question 8 prépare, dans le but de le minimiser, le calcul attendu à la question 9. Une réponse à la détermination des composantes ne peut se limiter à l'énoncé du principe fondamental de la dynamique. Doivent apparaître les hypothèses de l'étude, l'équation vectorielle, la projection retenue. La démarche de calcul de C_ψ est décrite pour la résolution en 9.

La seconde partie concernait l'étude de dimensionnement du bras support de la nacelle avec deux approches, l'une en avant-projet avec une poutre à section évolutive et l'autre basée sur une structure treillis, par la méthode des éléments finis. La section 21 a été bien traitée par les candidats. Un certain nombre de candidats calculent l'évolution de la section de la poutre et pour le calcul de la flèche, prennent ensuite une inertie constante ou une section circulaire. Nous pouvons constater aussi que les hypothèses de la résistance des matériaux sont mal connues. La section 22 a été traitée par 27% des candidats, ce qui a surpris les correcteurs. Ceux qui l'ont abordée ont de bons résultats. Beaucoup ne savent pas écrire le principe des travaux virtuels. Il y a des confusions entre le réel et le virtuel. La construction des matrices de raideur est bien comprise mais l'assemblage des matrices l'est beaucoup moins. De plus, nous constatons avec regret que les applications numériques ne sont pas faites et que les candidats ont peu de notions d'ordre de grandeur.

La dernière partie cherchait à estimer la force de traînée sur la nacelle. Elle était constituée de trois sections. Les deux premières s'adressaient aux connaissances générales des candidats en mécanique des fluides. Elles ont été très moyennement traitées par les candidats

qui les ont abordées. Pour les candidats, la notion de traînée n'est pas toujours évidente, et l'analyse dimensionnelle, outil fondamental dans une approche de modélisation en mécanique des fluides, se réduit presque toujours à la vérification de l'homogénéité d'une formule. Enfin un grand nombre de candidats refusent d'effectuer l'estimation de la traînée déduite du C_x . La troisième section a été mieux traitée par les candidats qui l'ont abordée. Il faut néanmoins noter que la référence au nombre de Mach pour justifier l'hypothèse d'incompressibilité n'est fournie que par un petit tiers des candidats. En conclusion, il apparaît que les candidats ont peu de connaissances générales en mécanique des fluides et ne possèdent pas les bases de modélisation.

Quelques statistiques sur l'épreuve

La moyenne des notes de l'épreuve est de 6,03.

En moyenne, les candidats ont obtenu 49% de leur note sur la partie 1, 36% sur la partie 2 et 15% sur la partie 3. Enfin la partie 1 a été abordée par 95% des candidats, la partie 2 par 89% et la partie 3 par 67%.

