

épreuve de mécanique des systèmes et des milieux déformables

durée : 8 heures

"Le matériel autorisé comprend toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante", conformément à la circulaire n° 99-018 du 1-02-1999.

Le sujet comporte trois parties complètement indépendantes. Il est recommandé de leur consacrer respectivement 1/3, 1/3 et 1/3 de la durée totale de l'épreuve.

Les réponses aux ***trois parties*** doivent être rédigées sur ***trois ensembles de copies séparés***.
Ces trois ensembles de copies seront remis en fin d'épreuve dans une copie-chemise.

	Introduction et présentation du mécanisme	pages 2 et 3
Première partie :	Mécanique des solides indéformables Section 11 : Consignes d'asservissement Section 12 : Equilibrages statique et dynamique Section 13 : Motorisation <i>Ces trois sections sont partiellement indépendantes.</i>	pages 4 à 10
Deuxième partie :	Mécanique des solides déformables Section 21 : Dimensionnement du bras - poutre à section évolutive Section 22 : Dimensionnement du bras - solution treillis - éléments finis <i>Ces deux sections sont partiellement indépendantes.</i>	pages 11 à 18
Troisième partie :	Mécanique des fluides Section 31 : Force de traînée - introduction Section 32 : Force de traînée - mouvement uniforme Section 33 : Force de traînée - mouvement accéléré <i>Ces trois sections sont partiellement indépendantes.</i>	pages 19 à 24

Le texte du sujet comporte 24 pages numérotées de 1 à 24.

Introduction

L'évolution des performances des avions de chasse génère des conditions de vol toujours plus sévères. Un pilote en situation d'exercice doit pouvoir supporter des accélérations de l'ordre de "10g" (g, accélération de la pesanteur). Dans ces conditions, le sang peut avoir tendance à quitter le cerveau et à s'accumuler dans les membres inférieurs entraînant alors une perte de connaissance connue sous l'appellation de "voile noir".

Les valeurs de ces *accélérations*, leur *vitesse d'établissement* et la *durée du maintien* imposent d'étudier les réactions de l'organisme. Les pilotes se testent et s'entraînent à bord d'une centrifugeuse, nacelle articulée à l'extrémité d'un bras en rotation qui équipe le laboratoire médical du Centre d'Etudes en Vol. Le paragraphe suivant présente ce mécanisme, support des trois parties de ce sujet.

La centrifugeuse restitue pour la nacelle les mouvements de roulis et de tangage. Dans la nacelle la surveillance du pilote est assurée par des équipements qui enregistrent des modifications physiologiques. Par exemple, lorsque au cours de l'entraînement la rampe d'accélération fait passer l'*accélération simulée* de g au voisinage de 15g en environ 2 secondes, il devient possible de constater une déformation du squelette ainsi qu'une descente du cœur dans la poitrine de l'ordre de 10 centimètres.

Présentation du mécanisme

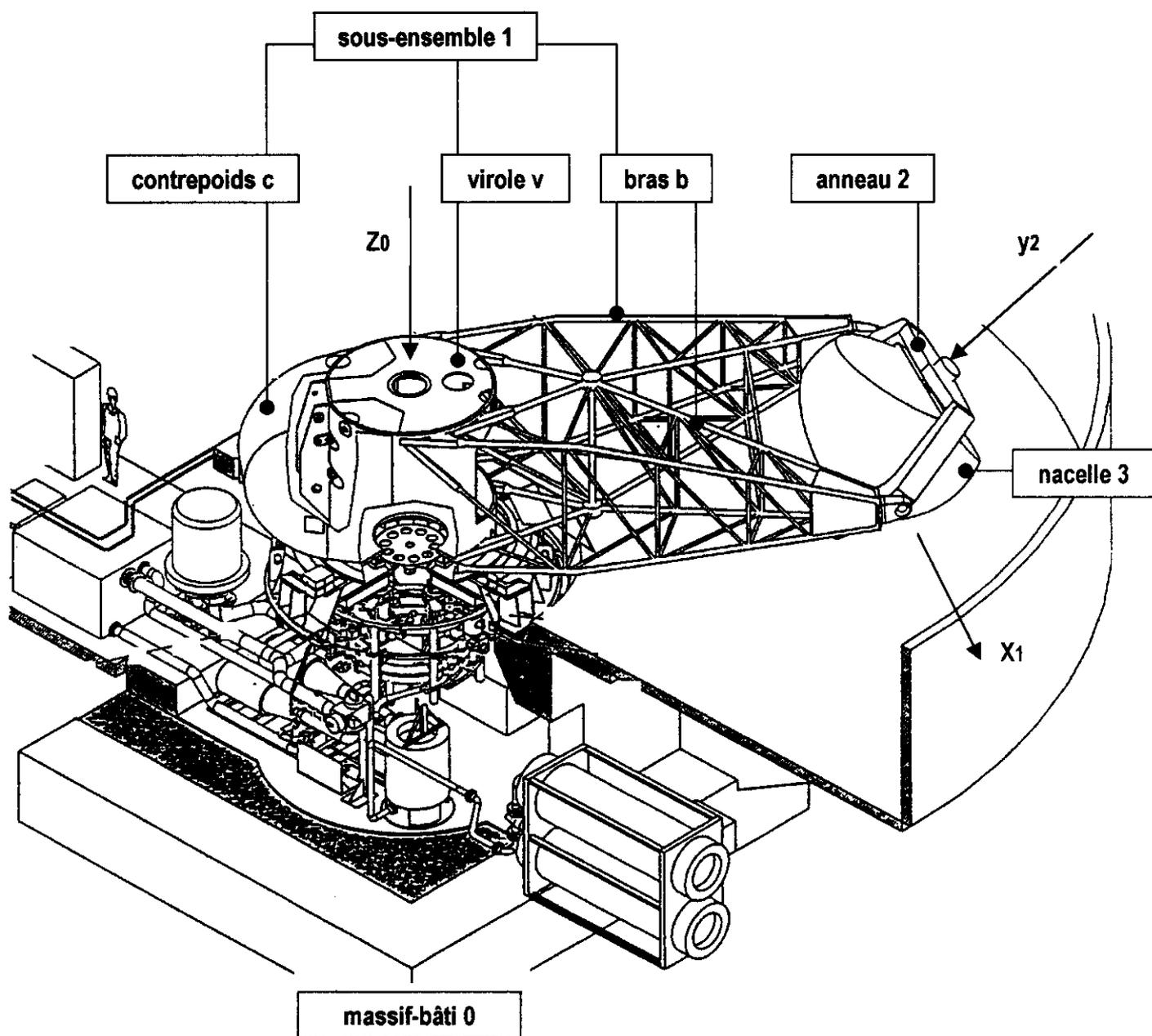
Le plan de situation de la page 3 présente la centrifugeuse qui se compose de quatre éléments principaux :

- une nacelle instrumentée 3, d'un volume d'environ 10 m³, équipée d'un siège pour le pilote ;
- un anneau 2, interposé entre la nacelle et le bras, autorisant les rotations autour de deux axes orthogonaux ;
- un sous-ensemble 1 en rotation autour de l'axe vertical, équipé d'une virole v qui supporte un contrepoids c et un bras en treillis tubulaire b (plan de situation et schéma n°1.2) ;
- un massif-bâti en béton 0 sur lequel est rigidement ancré un pivot assurant le guidage en rotation de la virole (sous-ensemble 1) autour de l'axe vertical.

Aux quatre éléments précédents s'ajoutent les équipements complémentaires suivants :

- un générateur de puissance hydraulique ;
- un réducteur pouvant transmettre une puissance de l'ordre de 1MW pour le mouvement du sous-ensemble 1 par rapport à 0 ;
- une motorisation embarquée pour les mouvements de roulis et de tangage définis sur le schéma n°1.1 ;
- un système d'asservissement dont le rôle est décrit dans la section 11.

Plan de situation de la centrifugeuse



Les vecteurs de bases sont notés en caractères gras sur le plan de situation ci-dessus et sur les schémas 1.1 à 1.3 de la première partie.

Première partie : Mécanique des solides indéformables

Afin de permettre d'aborder cette première partie, les deux paragraphes suivants décrivent respectivement la modélisation cinématique avec le paramétrage associé et la géométrie des masses.

Modélisation cinématique et paramétrage :

Le schéma n°1.1 présente la modélisation cinématique et le paramétrage de la centrifugeuse.

Le repère $R_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au massif-bâti 0 et assimilé à un repère galiléen. Le champ de pesanteur est défini par $\vec{g} = + g \cdot \vec{z}_0$.

Le repère $R_1 (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est lié au sous-ensemble 1 composé de la virole v , du bras en treillis tubulaire b et du contrepoids c encastré sur la virole. La liaison 1/0 est assimilée à une liaison pivot sans jeu, d'axe (O, \vec{z}_0) . L'angle $\psi(t)$ désigne le paramètre associé au mouvement du sous-ensemble 1 par rapport au bâti 0, $\psi(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$.

Le repère $R_2 (C, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est lié à l'anneau 2. La liaison 2/1 est assimilée à une liaison pivot sans jeu, d'axe (C, \vec{x}_1) . L'angle $\theta(t)$ désigne le paramètre associé au mouvement de roulis, $\theta(t) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. La position du point C est définie par le vecteur $\vec{OC} = -R \cdot \vec{y}_1$, avec $R = 7,62$ m.

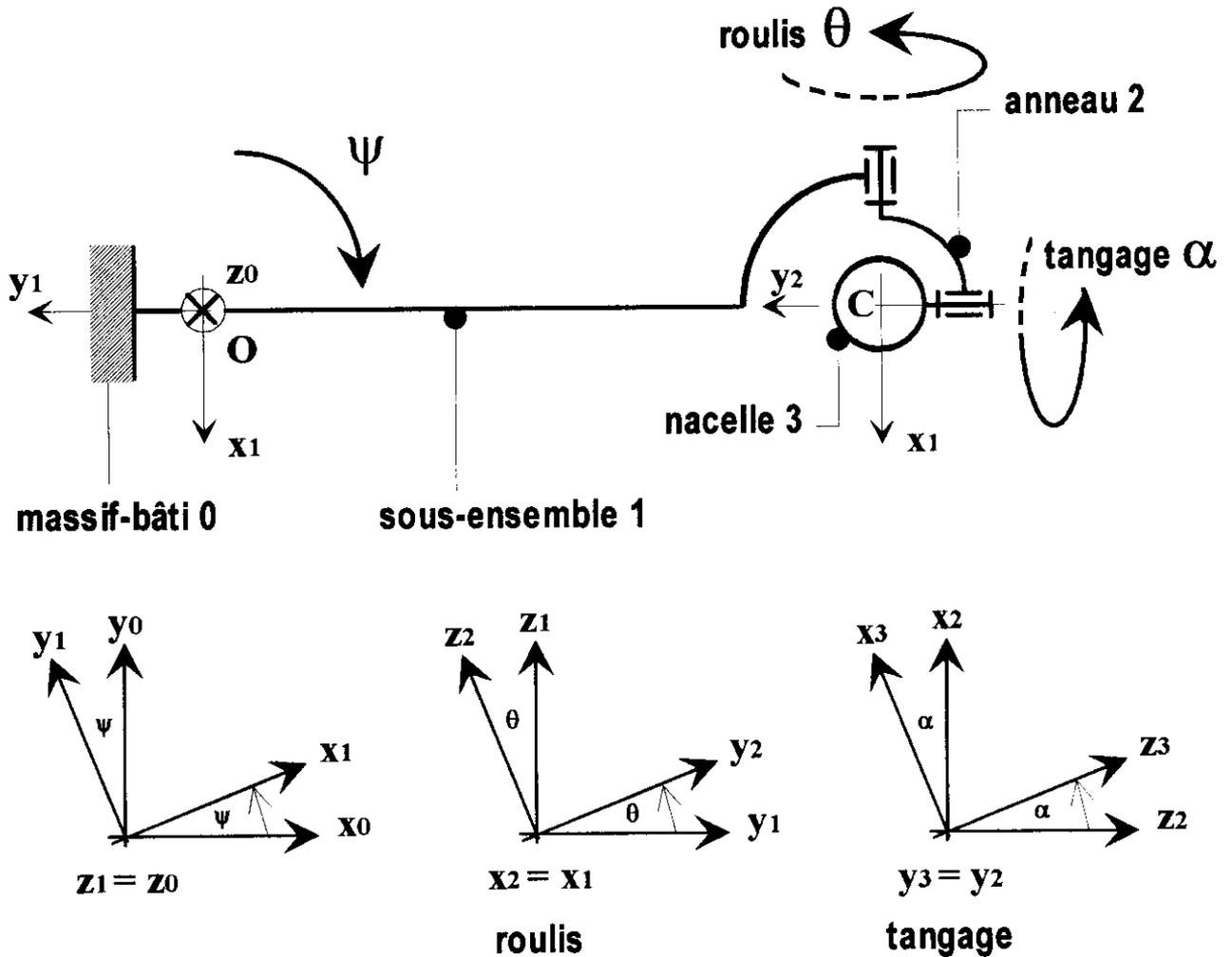
Le repère $R_3 (C, \vec{x}_3, \vec{y}_2, \vec{z}_3)$ est lié à la nacelle 3. La liaison 3/2 est assimilée à une liaison pivot sans jeu, d'axe (C, \vec{y}_2) . L'angle $\alpha(t)$ désigne le paramètre associé au mouvement de tangage, $\alpha(t) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$.

Les quatre bases $(\vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j) - j = 0 \text{ à } 3$ - sont orthonormées directes.

A l'arrêt, les angles θ et α sont nuls.

Le pilote équipé, assis alors à bord de la nacelle, regarde dans la direction \vec{x}_1 . Il occupe une position telle que l'axe de sa colonne vertébrale soit colinéaire avec \vec{z}_0 et son centre de gravité supposé confondu avec le point C, intersection des axes de roulis et de tangage.

Schéma n°1.1 : modélisation cinématique et paramétrage
 (représentation à l'arrêt - θ et α sont nuls)



Géométrie des masses :

Nacelle 3 et pilote

masse, $m_3 = 1705 \text{ kg}$
 le centre de gravité reste confondu avec le point C

matrice d'inertie, $\bar{I}(3, (C, \bar{x}_3, \bar{y}_2, \bar{z}_3)) = \bar{I}(3, (C, \bar{x}_1, \bar{y}_2, \bar{z}_2)) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}$

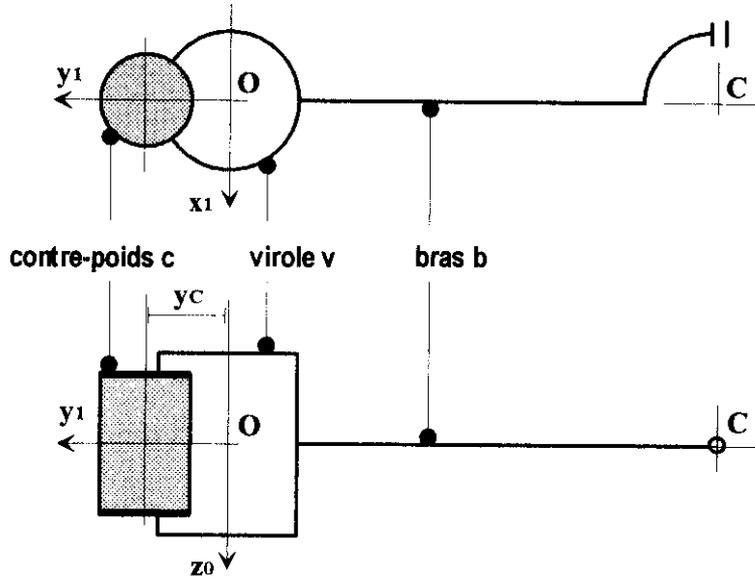
avec, $A_3 = 135 \text{ kg.m}^2$ et $B_3 = 1575 \text{ kg.m}^2$

Anneau 2 masse et inertie supposées négligeables dans cette approche

Sous-ensemble 1, composé de la virole v, du contrepoids c et du bras b
 Le schéma n°1.2 définit les trois éléments qui constituent le sous-ensemble 1.

Les valeurs approchées des moments d'inertie suivants ne sont données qu'à titre indicatif.

Schéma n°1.2 : virole v, contrepoids c et bras b constituant le sous-ensemble 1



virole

masse, $m_v = 8325 \text{ kg}$

le centre de gravité G_v est défini par $\overrightarrow{OG_v} = z_v \cdot \vec{z}_0$, avec $z_v = 0,63 \text{ m}$

$$\text{matrice d'inertie, } \overline{I}(v, (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)) = \begin{bmatrix} A_v & 0 & 0 \\ 0 & A_v & 0 \\ 0 & 0 & C_v \end{bmatrix}$$

avec, $A_v = 20625 \text{ kg.m}^2$ et $C_v = 17600 \text{ kg.m}^2$

contrepoids

masse, $m_c = 5600 \text{ kg}$

le centre de gravité G_c est défini par $\overrightarrow{OG_c} = y_c \cdot \vec{y}_1$, avec $y_c = 2 \text{ m}$

$$\text{matrice d'inertie, } \overline{I}(c, (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)) = \begin{bmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & B_c & 0 \\ 0 & 0 & C_c \end{bmatrix}$$

avec, $A_c = 25625 \text{ kg.m}^2$, $B_c = 3000 \text{ kg.m}^2$ et $C_c = 22775 \text{ kg.m}^2$

bras

masse, $m_b = 1980 \text{ kg}$

le centre de gravité G_b est défini par $\overrightarrow{OG_b} = y_b \cdot \vec{y}_1$, avec $y_b = -3,45 \text{ m}$

$$\text{matrice d'inertie, } \overline{I}(b, (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)) = \begin{bmatrix} A_b & 0 & 0 \\ 0 & B_b & 0 \\ 0 & 0 & C_b \end{bmatrix}$$

avec, $A_b = 31575 \text{ kg.m}^2$, $B_b = 6000 \text{ kg.m}^2$ et $C_b = 33775 \text{ kg.m}^2$

Section 11 : Détermination des consignes d'asservissement

La programmation de la rotation du sous-ensemble 1 par rapport au massif-bâti 0 - *c'est à dire l'angle $\psi(t)$ et ses dérivées* - permet d'atteindre une accélération simulée de l'ordre de 15g en environ 2 secondes.

Le rôle des asservissements de roulis et de tangage est de maintenir colinéaires l'axe (C, \bar{z}_3) de la nacelle (axe de la colonne vertébrale du pilote) et l'axe de la résultante des actions de contact exercée par la nacelle 3 sur le pilote. Ceci impose des relations (ou consignes) entre l'angle $\theta(t)$ et la dérivée $d\psi/dt$ d'une part, et l'angle $\alpha(t)$ et les dérivées $d\psi/dt$ et $d^2\psi/dt^2$ d'autre part.

L'action exercée par la nacelle 3 sur le pilote de masse m_p est modélisée au point C par le torseur $[A_{3p}]$ de résultante \vec{R} et de moment \vec{M}_C noté, $[A_{3p}] = [\vec{R} = X.\bar{x}_3 + Y.\bar{y}_2 + Z.\bar{z}_3 ; \vec{M}_C]$.

Q.1.1 - Déterminer la relation entre l'angle $\theta(t)$ et la dérivée $d\psi/dt$, ainsi que la relation entre l'angle $\alpha(t)$ et les dérivées $d\psi/dt$ et $d^2\psi/dt^2$ en appliquant le principe fondamental de la dynamique au pilote.

Q.1.2 - Montrer que le module de l'accélération totale (ou simulée) subie par le pilote peut s'écrire sous la forme $[a + b.(d\psi/dt)^4 + c.(d^2\psi/dt^2)^2]^{1/2}$ et donner les expressions de a, b et c. Calculer la vitesse angulaire constante $d\psi/dt$ à établir pour soumettre le pilote à la valeur annoncée 15g.

Q.1.3 - Un cas de montée en accélération de 0 à 15g, est partiellement décrit par le tableau du document I (fin de première partie). Déterminer, lors de cette montée, le terme prépondérant dans l'expression du module de l'accélération simulée.

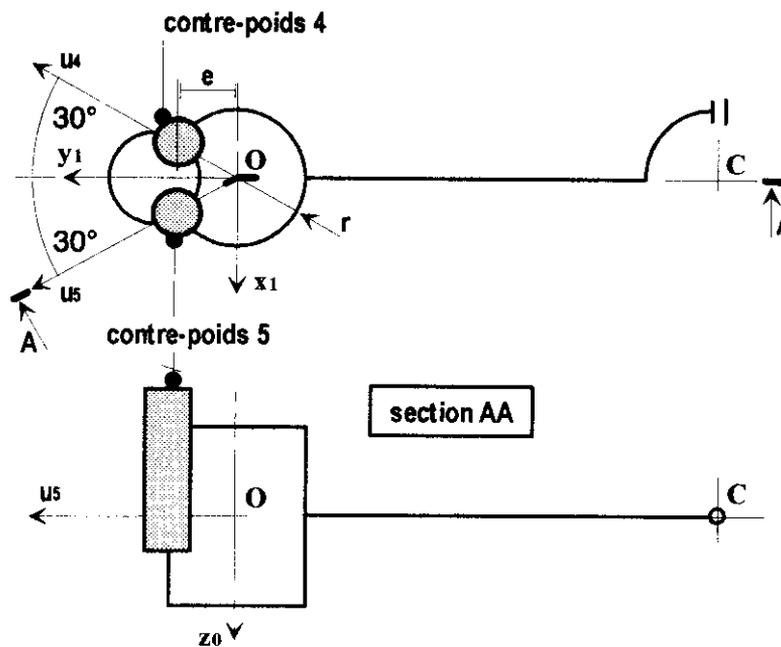
Section 12 : Etude des équilibrages statique et dynamique

La centrifugeuse comporte, en complément de l'ensemble des éléments précédemment décrits, deux contrepoids mobiles par rapport au sous-ensemble 1 et repérés 4 et 5. Ces contrepoids placés symétriquement par rapport au plan $(O, \bar{y}_1, \bar{z}_0)$ sont modélisés par des cylindres de révolution.

Les liaisons contrepoids 4 ou 5/virole 1 sont assimilées à des liaisons glissière sans jeu, de direction \bar{z}_0 .

Le schéma n°1.3 définit leurs implantations dans le repère $R_1 (O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)$ et les notations complémentaires retenues pour la géométrie des masses.

Schéma n°1.3 : sous-ensemble 1 et les deux contrepoids mobiles 4 et 5.



contrepoids mobile i
pour $i = 4$ ou 5

masse, m_i

le centre de gravité G_i est défini par $\overline{OG_i} = r \cdot \vec{u}_i + z_i \cdot \vec{z}_0$

et $\overline{OG_i} \cdot \vec{y}_1 = e$, avec $e = 1,2$ m

$$\text{matrice d'inertie, } \overline{\overline{I}}(i, (G_i, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)) = \begin{bmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & A_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{bmatrix}$$

Enfin, E désigne l'ensemble qui regroupe les éléments principaux de la centrifugeuse, 1, 2, 3, le pilote p et les contrepoids 4 et 5.

Q.1.4 - Exprimer les relations traduisant l'équilibrage statique de l'ensemble E en liaison de type pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec le massif-bâti 0. Déterminer les valeurs des masses m_4 et m_5 des deux contrepoids 4 et 5.

Q.1.5 - Exprimer la coordonnée z_G du centre de gravité de l'ensemble E en fonction des coordonnées z_4 et de z_5 .

Q.1.6 - Exprimer de façon formelle les conditions qui traduisent l'équilibrage dynamique de l'ensemble E dans sa rotation par rapport au massif-bâti 0 autour de l'axe fixe (O, \vec{z}_0) et présenter une démarche de détermination de la matrice d'inertie $\overline{\overline{I}}(E, (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0))$. Cette démarche peut être présentée sous forme d'organigramme renseigné.

Q.1.7 - Traduire les conditions exprimées à la question 1.6 (les données de géométrie des masses introduisent de fortes simplifications dans le calcul). En déduire les coordonnées z_4 et z_5 des centres de gravité des contrepoids 4 et 5. Lorsqu'un taux de rotation constant $d\psi/dt$ est établi, soumettant le pilote à la valeur annoncée 15g, calculer les valeurs de z_4 et z_5 .

Section 13 : Approche de la détermination de la motorisation

La loi de variation de $\psi(t)$ est partiellement décrite par le tableau du document I (fin de première partie).

La section 11 établit les relations entre $\theta(t)$ et la dérivée $d\psi/dt$ d'une part, et la relation entre $\alpha(t)$ et les dérivées $d\psi/dt$ et $d^2\psi/dt^2$ d'autre part.

La section 12 établit les lois d'évolution de $z_4(t)$ et $z_5(t)$.

Les cinq lois $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\alpha(t)$, $z_4(t)$ et $z_5(t)$ sont donc connues.

Le réducteur M_{01} , implanté sur le massif-bâti 0, exerce sur la virole une action modélisable par le torseur $[A_\psi]$ de résultante nulle et moment \vec{C}_ψ noté, $[A_\psi] = [\vec{0}; \vec{C}_\psi = C_\psi \cdot \vec{z}_0]$.

Le moteur M_{12} embarqué dans la liaison 2/1, implanté sur le bras 1, exerce sur l'anneau 2 une action modélisable par le torseur $[A_\theta]$ avec, $[A_\theta] = [\vec{0}; \vec{C}_\theta = C_\theta \cdot \vec{x}_1]$.

Le moteur M_{23} embarqué dans la liaison 3/2, implanté sur l'anneau 2, exerce sur la nacelle 3 une action modélisable par le torseur $[A_\alpha]$ avec, $[A_\alpha] = [\vec{0}; \vec{C}_\alpha = C_\alpha \cdot \vec{y}_2]$.

Une motorisation embarquée complémentaire assure l'équilibrage étudié dans la section 12. Un premier moteur linéaire M_{14} , implanté sur la virole, exerce sur le contrepoids 4 une action modélisable au point G_4 par le torseur $[A_4]$ avec, $[A_4] = [F_4 \cdot \vec{z}_0; \vec{0}]$. Un second moteur linéaire M_{15} , également implanté sur la virole, exerce sur le contrepoids 5 une action modélisable au point G_5 par le torseur $[A_5]$ avec, $[A_5] = [F_5 \cdot \vec{z}_0; \vec{0}]$.

Dans cette première approche, les actions aérodynamiques exercées sur la nacelle 3 d'une part et le sous-ensemble 1 d'autre part sont négligées. Les influences des poids des moteurs et des frottements dans les liaisons ne sont pas prises en compte.

Les démarches de résolution peuvent être présentées sous forme d'organigrammes renseignés, accompagnés des relations de calculs.

Q.1.8 - Proposer une démarche qui permette d'exprimer chacune des composantes F_4 et F_5 , C_α , C_θ et C_ψ en fonction de $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\alpha(t)$, $z_4(t)$, $z_5(t)$ et/ou de leurs dérivées.

Q.1.9 - Exprimer les composantes F_4 et F_5 en fonction de \ddot{z}_4 et respectivement \ddot{z}_5 , puis en fonction de $\theta(t)$ et de ses dérivées.

Q.1.10 - Exprimer la composante C_ψ en fonction de $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\alpha(t)$, et/ou de leurs dérivées.

Q.1.11 - Exprimer la puissance que doit délivrer le groupe moto-réducteur M_{01} . Evaluer la puissance à installer en utilisant les résultats présentés dans le document I.

instant n°	temps seconde	$d\psi/dt$ rad/s	$d^2\psi/dt^2$ rad/s ²	$C\psi$ mN	acc.sim. nb. de g
1	0,20	1,138	0,057	6540	1,419
2	0,25	1,142	0,096	10796	1,425
3	0,30	1,148	0,142	15872	1,435
4	0,35	1,156	0,198	22110	1,450
5	0,40	1,168	0,264	29529	1,471
6	0,45	1,183	0,344	38575	1,501
7	0,50	1,202	0,445	50040	1,542
8	0,55	1,228	0,573	64597	1,603
9	0,60	1,260	0,735	82994	1,687
10	0,65	1,302	0,940	106040	1,807
11	0,70	1,355	1,192	133834	1,973
12	0,75	1,422	1,494	166356	2,194
13	0,80	1,505	1,841	203059	2,478
14	0,85	1,607	2,224	243390	2,830
15	0,90	1,728	2,618	285256	3,243
16	0,95	1,868	2,988	325292	3,706
17	1,00	2,025	3,280	357968	4,200
18	1,05	2,217	3,444	378207	4,768
19	1,10	2,400	3,500	384370	5,330
20	1,15	2,600	3,444	378744	5,977
21	1,20	2,800	3,280	360357	6,677
22	1,25	2,975	2,988	327592	7,325
23	1,30	3,150	2,618	286389	8,034
24	1,35	3,300	2,224	242743	8,691
25	1,40	3,425	1,841	200822	9,277
26	1,45	3,550	1,494	162852	9,908
27	1,50	3,700	1,192	129872	10,721
28	1,55	3,800	0,940	102417	11,285
29	1,60	3,900	0,735	80066	11,870
30	1,65	4,000	0,573	62423	12,476
31	1,70	4,050	0,445	48478	12,785
32	1,75	4,125	0,344	37471	13,257
33	1,80	4,170	0,264	28761	13,545
34	1,85	4,200	0,198	21571	13,739
35	1,90	4,250	0,142	15469	14,066
36	1,95	4,290	0,096	9776	14,331
37	2,00	4,350	0,057	5390	14,732
38	2,05	4,360	0,029	3085	14,800
39	2,10	4,366	0,010	1798	14,840
40	2,15	4,387	0,001	1035	14,983
41	2,20	4,390	0,000	925	15,003

Document I

Deuxième partie : Mécanique des solides déformables

Section 21 : Dimensionnement du bras b - poutre à section évolutive

Nous nous proposons dans cette section de réfléchir sur le dimensionnement du bras qui soutient la nacelle. En se plaçant dans le repère tournant $(O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$, il peut être modélisé en première approche par une simple poutre encastree libre de section rectangulaire évolutive de largeur $b(x)$ et de hauteur $a(x)$ avec $b = \alpha a$ (figure n°2.1). Les efforts qui le sollicitent sont le poids et les efforts d'inertie associés à la nacelle et au bras lui-même.

Nous nous plaçons dans les hypothèses de la résistance des matériaux, et, dans un premier temps, nous négligeons les efforts dus au bras en ne conservant que ceux induits par la nacelle. Ces derniers sont majorés en considérant les valeurs de l'accélération radiale et azimutale maximales. De sorte que le bras est considéré comme soumis en C à la force :

$$\vec{F}_{\max} = m_3 R (\dot{\psi}_{\max}^2 \vec{X} + \ddot{\psi}_{\max} \vec{Y}) - m_3 g \vec{Z}$$

où le repère de travail est redéfini comme suit : $(O, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) = (O, -\bar{y}_1, -\bar{x}_1, -\bar{z}_1)$.

Le but de l'étude est de déterminer la loi d'évolution de la section de la poutre qui induit une contrainte normale maximale constante et d'en déduire la déformée.

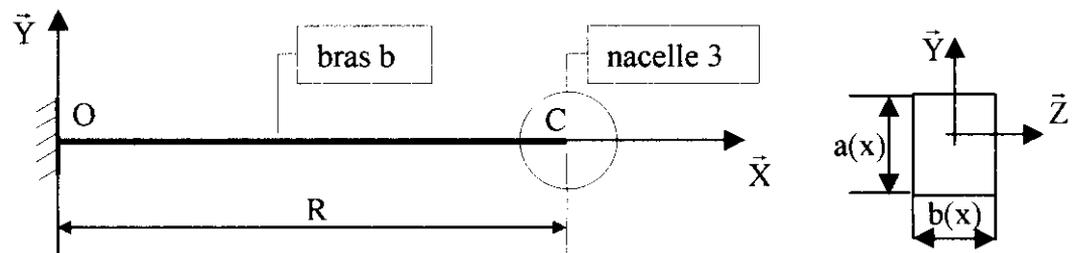


Figure n°2.1 : modélisation du bras par une poutre

Q.2.1 - Donner l'expression du torseur des actions de cohésion dans une section droite de la poutre.

Q.2.2 - En notant σ_{\max} la contrainte normale maximale dans la section, donner la relation qui relie les caractéristiques d'inertie de la section (I_y, I_z moments d'inertie - S section) aux efforts appliqués.

Q.2.3 - En considérant les contributions maximales des deux composantes du moment fléchissant sur la contrainte normale comme identiques, déterminer le rapport de proportionnalité $\alpha = b/a$.

Q.2.4 - En considérant que la contrainte normale maximale est la même dans chaque section et égale à la résistance pratique R_p , en déduire que l'évolution $a(x)$ de la hauteur de la poutre en fonction de la position x est donnée par une équation du type : $a^3(x) = A a(x) + B (R - x)$ où A et B sont des constantes que l'on précisera.

Q.2.5 - Quelle serait cette évolution si nous négligeons l'effort normal (effort porté par l'axe \vec{X}) ?

La figure n°2.2 représente l'évolution de $a(x)$ la hauteur de la poutre en prenant en compte ou non l'effort normal. Nous constatons que son influence sur la dimension $a(x)$ de la section est inférieure à 3% sur près de 90% de la longueur de la poutre. Pour simplifier les calculs, nous considérerons dans la suite que cette évolution suit l'expression obtenue en **Q.2.5**.

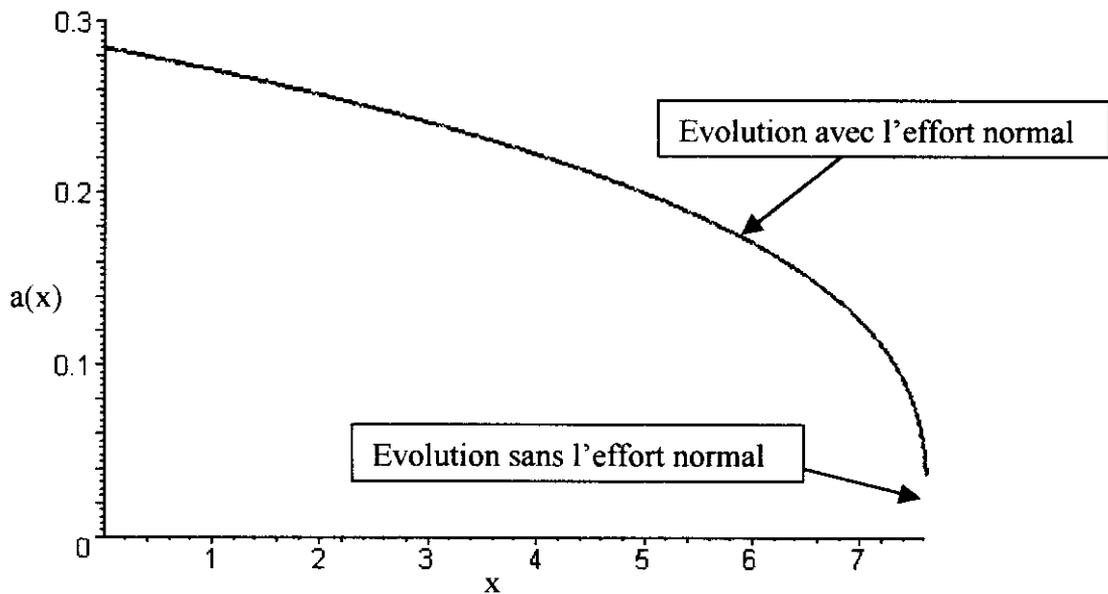


Figure n°2.2 : évolution de la hauteur en fonction de x

Q.2.6 - Déterminer la déformée de la poutre $v(x)$ due au moment fléchissant porté par l'axe \vec{Y} . Montrer que la flèche à l'extrémité de la poutre se met sous la forme :

$$v(R) = H \frac{(m_3 \psi_{\max} R)^{\frac{1}{3}} R^{\frac{5}{3}}}{\frac{\alpha E}{12} \left(\frac{12}{\alpha R_p} \right)^{\frac{4}{3}}}$$

où H est une constante que l'on précisera.

Nous proposons maintenant de vérifier la validité des hypothèses émises pour cette première approche.

Q.2.7 - Les calculs précédents ont été faits avec les hypothèses de la résistance des matériaux, peuvent-ils être considérés comme fiables ?

Q.2.8 - Estimer le moment fléchissant induit par les efforts d'inertie de la poutre à l'encastrement.

Q.2.9 - Conclure quant aux hypothèses et vis à vis de la solution technologique retenue : le treillis.

Section 22 : Dimensionnement de la solution par treillis avec la méthode des éléments finis.

Nous avons montré à la section 21 l'intérêt de la réalisation du bras par une structure treillis, qui est un assemblage de barres sollicitées uniquement en traction ou compression.

La forme du treillis retenu est illustrée par la figure n°2.3. Elle a été définie à l'aide de l'évolution de l'inertie estimée à la section précédente.

Dans cette section, nous proposons de développer une approche éléments finis pour estimer le dimensionnement de la structure composée de barres que nous supposons toutes de section identique.

Le chargement prépondérant est un effort d'inertie dû à la nacelle, que nous considérerons constant et maximal dans le plan horizontal (\vec{x}_1, \vec{y}_1) ce qui nous ramène à un problème plan. En outre, les efforts d'inertie associés au bras sont négligés ici.

La modélisation proposée pour cette section de l'étude est définie par les hypothèses suivantes (figure n°2.3) :

- le bras b est constitué d'une structure treillis plane, de longueur R ;
- un système d'axes lié à cette structure est défini par $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = (O, -\vec{y}_1, -\vec{x}_1, -\vec{z}_1)$;
- la structure est en liaison articulation en A et B et sollicitée en C et D par le chargement défini ci après ;
- le chargement prépondérant est un effort d'inertie dû à la nacelle que nous considérons constant et maximal dans le plan horizontal : $\vec{F}_C = \vec{F}_D = \frac{1}{2} m_3 R (\ddot{\psi}_{\max}^2 \vec{X} + \ddot{\psi}_{\max} \vec{Y})$;
- les barres du treillis ont une longueur l_1 , une section droite uniforme tubulaire d'aire S (diamètre D et épaisseur e) et un module d'élasticité E.

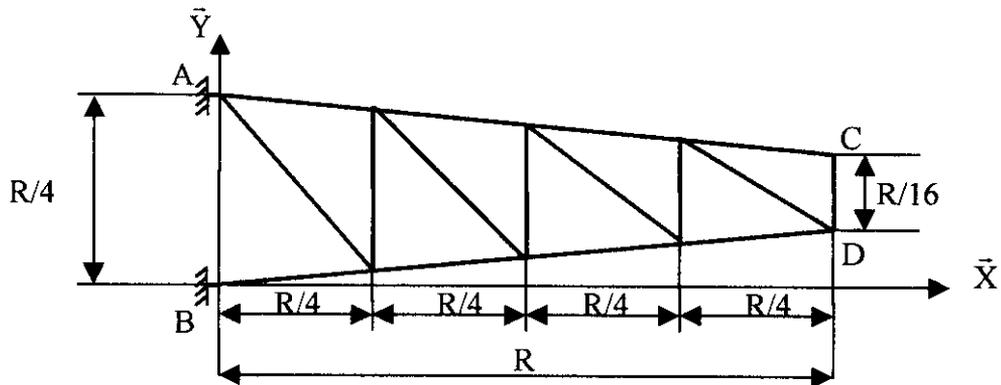


Figure n°2.3 : modélisation plane du bras par une structure treillis

Pour l'approche éléments finis, nous allons utiliser la démarche qui suit.

Dans un premier temps, nous appliquons le principe des travaux virtuels au treillis. Nous discrétisons ensuite cette forme intégrale en éléments linéiques à deux nœuds de type barre et nous calculons la matrice de rigidité élémentaire associée à l'élément (dans un repère local). Puis nous recherchons la matrice de passage permettant d'exprimer la matrice de rigidité en fonction des degrés de liberté globaux. Enfin, nous développons l'assemblage pour la structure complète dont nous explicitons les calculs pour le premier cadre défini figure n°2.6.

Q.2.10 - Appliquer le principe des travaux virtuels à une structure sollicitée uniquement en traction-compression. Les différents termes de l'expression obtenue devront être argumentés.

La discrétisation de la structure réside :

- en une décomposition en éléments de forme simple (16 éléments linéiques à deux nœuds dans cette structure) ;
- en la numérotation des différents éléments de barre et la numérotation des nœuds associés à ceux-ci (figure n°2.7).

Considérons un élément de barre de longueur L , de section S soumis à des efforts concentrés aux nœuds dans la direction de la barre. C'est un élément linéique à deux nœuds ((1) et (2)) avec un degré de liberté sur chacun de ceux-ci, caractérisant son déplacement dans son repère local (u_1, u_2) (figure n°2.4). Nous choisissons un champ de déplacement $u(x)$ qui s'exprime en fonction des déplacements des nœuds (1) et (2) sous la forme : $u(x) = u_1 \left(\frac{L-x}{L} \right) + u_2 \frac{x}{L}$ pour $0 \leq x \leq L$, de même, nous adoptons une approximation similaire pour le champ de déplacement virtuel.

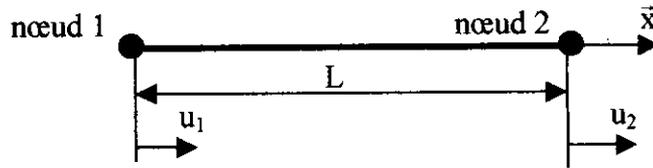


Figure n°2.4 : élément fini de barre

Q.2.11 – A partir du travail virtuel des efforts intérieurs, déterminer la matrice de rigidité, notée $[K]$, de l'élément de barre dans son repère local.

Afin de permettre la construction de la matrice de rigidité globale qui sera construite dans le repère de la structure, nous allons déterminer la matrice de passage du repère local au repère global.

Q.2.12 - Soit l'angle θ défini sur la figure n°2.5 par $\theta = (\bar{X}, \bar{x})$. Calculer la matrice de passage du repère local de l'élément au repère global, notée $[R]$.

Q.2.13 - Ecrire la matrice de raideur élémentaire $[K_e]$ dans le repère global de la structure.

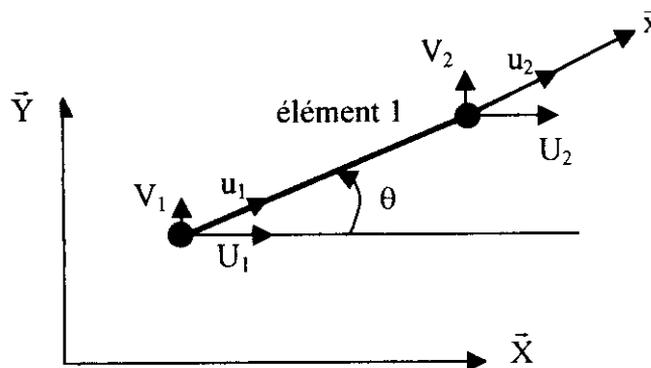


Figure n°2.5 : élément fini de barre dans le repère global

Nous pouvons maintenant développer la procédure d'assemblage des barres pour la structure complète et nous allons expliciter les calculs pour le premier cadre (figure n°2.6).

Q.2.14 - Expliquer comment peut être obtenue la matrice de rigidité globale de la structure donnée figure n°2.7. Cette démarche peut être présentée sous forme d'organigramme renseigné.

Afin de limiter les calculs, nous nous restreindrons à l'assemblage des éléments constituant le premier cadre (figure n°2.6).

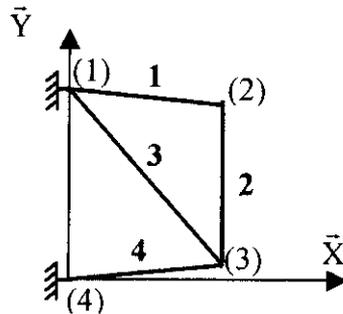


Figure n°2.6 : maillage du premier cadre

Q.2.15 - Etablir la matrice de rigidité résultant de l'assemblage des éléments du premier cadre.

A partir de la matrice de rigidité du premier cadre, nous pourrions construire celle de la structure définie figure n°2.7. Cependant cela conduirait à des calculs longs. La structure est donc reprise dans un logiciel utilisant cette méthode des éléments finis. Le maillage est réalisé par des barres et l'effort d'inertie induit par la nacelle est réparti sur les nœuds 9 et 10 (figure n°2.7). Le traitement informatique conduit aux résultats donnés dans le tableau du document II (fin de deuxième partie).

Les résultats montrent que certaines barres sont sollicitées en traction et d'autres en compression. Nous cherchons donc à vérifier leur dimensionnement pour chaque type de sollicitation.

Q.2.16 - Calculer la contrainte normale maximale dans la barre la plus sollicitée en traction. La valeur obtenue est-elle acceptable ?

Q.2.17 - Calculer la contrainte normale maximale dans la barre la plus sollicitée en compression.

La valeur obtenue est-elle acceptable vis à vis de la charge critique d'Euler ($F_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$) ?

Q.2.18 - Que pouvons nous conclure quant à l'optimisation de la géométrie du treillis pour ce type de sollicitations ?

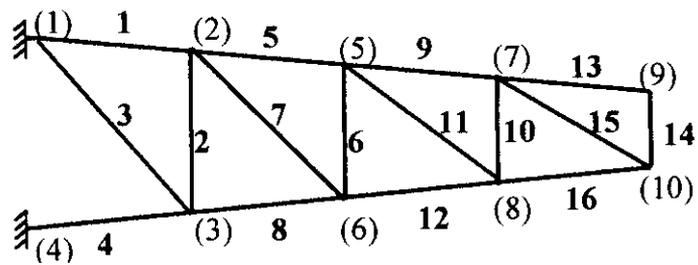


Figure n°2.7 : maillage de la structure

Les données numériques relatives aux questions de cette partie sont :

Masse de la nacelle 3	$m_3 = 1705 \text{ kg}$
Longueur du bras	$R = 7,62 \text{ m}$
Diamètre des barres	$D = 60 \text{ mm}$
Epaisseur des barres	$e = 5 \text{ mm}$
Masse volumique	$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$
Module d'Young	$E = 210000 \text{ Mpa}$
Résistance pratique	$R_p = 500 \text{ MPa}$
Vitesse maximum de rotation	$\dot{\psi}_{\max} = 4,39 \text{ rd/s}$
Accélération maximum de rotation	$\ddot{\psi}_{\max} = 3,5 \text{ rd/s}^2$

N° élément	Nœud origine Nœud extrémité	Effort normal N	Déplacement U _x mm	Déplacement U _y mm
1	1	33800	0	0
	2		-0,08	3
2	2	11000	2,3	2,9
	3			
3	3	-14900		
	1			
4	3	242900	0	0
	4			
5	2	16100	0,4	9,5
	5			
6	5	14300	4,2	9,3
	6			
7	6	-21700		
	2			
8	6	231800		
	3			
9	5	16800	1,5	20
	7			
10	7	20460	5,4	20
	8			
11	8	-37100		
	5			
12	8	214100		
	6			
13	7	99000	4	36
	9			
14	9	27150	6	36
	10			
15	10	-86500		
	7			
16	10	181200		
	8			

Document II : résultats du calcul par la méthode des éléments finis

Troisième partie : Mécanique des fluides

Position du problème : Estimation de la force de traînée sur la nacelle.

Dans cette troisième partie, on cherche à estimer les actions de l'air environnant sur la nacelle. Le problème n'est pas simple. La première difficulté est attachée au fait que la nacelle a un mouvement circulaire, de sorte qu'elle parcourt sa trajectoire plusieurs fois. Ainsi, après un premier passage, la nacelle rencontre un milieu en mouvement aléatoire correspondant à son propre sillage. La seconde difficulté est attachée au fait que la nacelle n'a pas un mouvement stationnaire. Son mouvement suit une loi horaire plus ou moins complexe. Cela impose la résolution d'un problème de mécanique des fluides non-stationnaire, ce qui n'est jamais trivial.

On se propose, dans cette étude, de ne tenir compte que de la seconde difficulté et de s'affranchir de la première qui demanderait une mise en œuvre de moyens considérables.

Pour cela, nous allons modéliser le problème, par celui d'une sphère en mouvement rectiligne dans un milieu initialement au repos (Figure 3.1). Dans un premier temps nous estimerons la force de traînée associée à un mouvement uniforme, puis dans un second temps nous essaierons de prendre en compte l'accélération de la nacelle.

Section 31 : Force de traînée

De façon générale la force de traînée sur un corps en mouvement dans un fluide peut être séparée en deux composantes : une composante de pression et une composante de frottement.

Q.3.1 - Justifier cette distinction.

Q.3.2 - D'un point de vue théorique, expliquer comment on peut obtenir ces deux composantes.

Q.3.3 - D'un point de vue expérimental, expliquer comment on peut mesurer ces deux composantes.

Section 32 : Force de traînée associée à un mouvement uniforme

Dans ce paragraphe, on considère que la nacelle se déplace avec un mouvement uniforme dans un fluide visqueux.

Q.3.4 - En utilisant l'analyse dimensionnelle, montrer que la force de traînée F_x globale qui s'oppose au mouvement de la sphère peut se mettre sous la forme suivante :

Force de Traînée = $C_x \cdot$ Dynamique \cdot Aire

$$F_x = C_x \cdot \frac{1}{2} \rho V_c^2 \cdot \pi a^2$$

où C_x est une fonction du nombre de Reynolds $Re = V_c 2a / \nu$.

En pratique, on dispose de mesures du coefficient de traînée, C_x . Sa dépendance vis à vis du nombre de Reynolds est illustrée sur la figure 3.2.

Q.3.5 - Commenter brièvement cette figure, on expliquera notamment la chute brutale du C_x pour les Reynolds de l'ordre de $5 \cdot 10^5$.

Dans le cadre de cette étude, on demande d'estimer la force de traînée pour la vitesse maximum de la nacelle.

Q.3.6 - Pensez-vous, dans le dimensionnement de la centrifugeuse, qu'il soit nécessaire de tenir compte de cette force de traînée, et pourquoi ?

Section 33 : Influence de la nature accélérée du mouvement

Formulation du problème

Avertissement : Dans ce paragraphe on donnera les expressions demandées en coordonnées cartésiennes.

Equations de conservation

On cherche maintenant à estimer l'influence de l'accélération de la nacelle sur la force de traînée. Cette force est naturellement fonction du mouvement de l'air autour de la nacelle.

Q.3.7 - Pourquoi, dans notre cas, peut-on considérer l'air comme un fluide incompressible ?

Q.3.8 - Comment s'écrit alors l'expression locale de conservation de la masse (équation de continuité) ?

Q.3.9 - Rappeler l'équation de quantité de mouvement locale pour un fluide visqueux et incompressible ?

Ces équations aux dérivées partielles sont non linéaires et couplées. Elles sont beaucoup trop complexes pour être utilisées telles quelles pour une simple estimation de la force de traînée (même si on introduit la symétrie axiale du problème). On cherche donc à les simplifier en faisant les deux hypothèses qui suivent :

H1 : On peut penser que l'accélération de la nacelle va créer une surpression à l'amont par rapport à l'aval. Par suite, la nature de la traînée devrait être plutôt de type pression. En conséquence, on néglige les forces visqueuses par rapport aux forces de pression : on fait l'hypothèse de fluide parfait.

H2 : On s'intéresse à l'influence de l'accélération donc à l'influence des termes non stationnaires. En conséquence, on néglige les termes non linéaires de l'accélération par rapport aux termes instationnaires.

Q.3.10 - Que devient, dans ces conditions l'équation de quantité de mouvement ?

Conditions aux limites

Q.3.11 - Le fluide étant parfait, exprimer la condition à la paroi de la sphère en fonction de la vitesse de la nacelle $\vec{V}_c = \dot{x}_c \cdot \vec{e}_x$.

Les autres conditions aux limites concernent l'état du fluide à l'infini qui est au repos : Vitesse nulle, et pression égale à la pression atmosphérique.

Bilan

Q.3.12 - Synthétiser l'ensemble des équations qui régissent le mouvement du milieu fluide.

Théorie potentielle

Q.3.13 - Montrer alors que le champ de vitesse dérive d'un potentiel. C'est à dire qu'il existe une fonction $\Phi(\vec{x}; t)$ telle que $\vec{V}(\vec{x}; t) = \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{x}}(\Phi)$.

Q.3.14 - Montrer que Φ est solution du système d'équations

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{x}} \Phi &= 0 \\ \left| \vec{x} \right| \rightarrow \infty & \quad \Phi(\vec{x}; t) = 0 \\ \vec{x} \in \text{sphère} & \quad \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{x}}(\Phi) \cdot \vec{e}_r = \dot{x}_c \vec{e}_x \cdot \vec{e}_r \end{aligned}$$

Q.3.15 - Montrer que le champ de pression peut s'exprimer simplement en fonction de Φ et de la pression à l'infini. L'expression obtenue est une forme généralisée de l'équation de Bernoulli.

Par suite, il suffit de déterminer le potentiel Φ à l'aide du système donné en 3.14, de le reporter dans l'équation de Bernoulli généralisée pour en déduire la pression et par intégration sur la sphère la force de traînée recherchée.

Résolution : calcul de $\Phi(\vec{x}; t)$.

Changement de variable (Figure 3.3)

On cherche $\Phi(\vec{x}; t)$ où \vec{x} est la position du point d'observation par rapport au repère absolu (du laboratoire). Pour pouvoir prendre en compte la symétrie du problème, on effectue le changement de variable suivant :

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{x}_c$$

où \vec{x}' est la position du point d'observation par rapport à un repère lié à la sphère.

Le potentiel Φ peut donc être considéré comme une fonction de \vec{x} - $\Phi(\vec{x}; t)$ - ou de \vec{x}' - $\Phi'(\vec{x}'; t)$ - et on a : $\Phi(\vec{x}; t) = \Phi'(\vec{x}'; t) = \Phi'(\vec{x} - \vec{x}_c; t)$

Q.3.16 - Montrer que la fonction Φ' de \vec{x}' vérifie le même système d'équations que la fonction Φ de \vec{x} .

En exprimant \vec{x}' en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) l'axisymétrie du problème se traduit alors par $\Phi'(\vec{x}'; t) = \Phi'(r, \theta, \phi; t) = \Phi'(r, \theta; t)$

Q.3.17 - Comment s'exprime alors le système d'équations dans ce système de coordonnées ?

Résolution

La forme des conditions limites (variables séparées, dépendance en $\cos(\theta)$) suggère de rechercher la solution sous la forme :

$$\Phi'(r, \theta; t) = f(r) \cdot \cos\theta \cdot \alpha(t)$$

Q.3.18 - Quelle est l'équation différentielle que doit vérifier la fonction $f(r)$?

Cette équation est une équation linéaire du second ordre sans second membre. L'ensemble de ses solutions forme donc un espace vectoriel de dimension 2. Par suite, il suffit de deux solutions indépendantes pour exprimer la solution générale. L'équation étant homogène d'ordre 1, on cherche donc des solutions en puissance de r .

Q.3.19 - Effectuer l'intégration, et montrer que Φ' se met sous la forme

$$\Phi'(r, \theta; t) = A \cdot \dot{x}_c(t) \cdot \frac{\cos\theta}{r^2}$$

où A est une constante que l'on précisera.

Retour à la variable absolue x .

Q.3.20 - Dédurre de la question précédente, l'expression de $\Phi(\vec{x}; t)$ en fonction de ses variables naturelles $\vec{x} = (x, y, z)$.

Force de traînée

Q.3.21 - En utilisant l'équation de Bernoulli généralisée, montrer que la pression sur la sphère se met sous la forme :

$$p(r = a, \theta, \phi; t) = p_\infty + \rho \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \dot{x}_c \cdot B \cdot \cos\theta + \frac{1}{2} \cdot \dot{x}_c^2 \cdot (C + D \cdot \cos^2(\theta)) \right)$$

où B , C et D sont des constantes que l'on précisera.

Q.3.22 - En déduire l'expression de la force de traînée engendrée par cette distribution de pression.

Q.3.23 - Montrer que pour le mouvement de la sphère tout se passe comme si la masse de la nacelle était augmentée d'une masse, m_a que l'on nomme masse ajoutée. Quelle est l'expression de cette masse ajoutée ? Quelle est la valeur numérique pour le problème qui nous préoccupe ? Conclure.

Notations :

\vec{V}_c : vecteur vitesse du centre de la sphère.

$V_c = \dot{x}_c$: valeur algébrique de \vec{V}_c .

ν : viscosité cinématique.

ρ : masse volumique du fluide.

F_x : force de traînée.

C_x : coefficient de traînée.

Re : nombre de Reynolds basé sur le diamètre de la sphère.

a : rayon de la sphère.

$\vec{x} = (x, y, z)$: position absolue du point d'observation.

$\vec{x}' = (x', y', z') = (r, \theta, \phi)$: position du point d'observation dans un repère lié à la sphère.

$\vec{x}_c = (x_c, 0, 0)$: position absolue du centre de la sphère.

$\overrightarrow{\text{grad}}_x$: opérateur gradient par rapport au repérage \vec{x} .

Δ_x : opérateur laplacien par rapport au repérage \vec{x} .

p, p_∞ : pression, pression à l'infini.

m_3 : masse de la sphère (nacelle).

Valeurs numériques :

$$V_c^{\max} = 34 \text{ m/s}$$

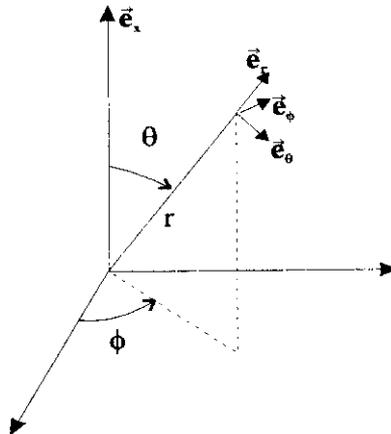
$$\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$m_3 = 1705 \text{ Kg}$$

$$\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$$

$$a = 1.44 \text{ m}$$

Formulaire : coordonnées sphériques.



$$\overrightarrow{\text{grad}}_x p = \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta \cdot A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (A_\phi)}{\partial \phi}$$

$$\Delta p = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2}$$

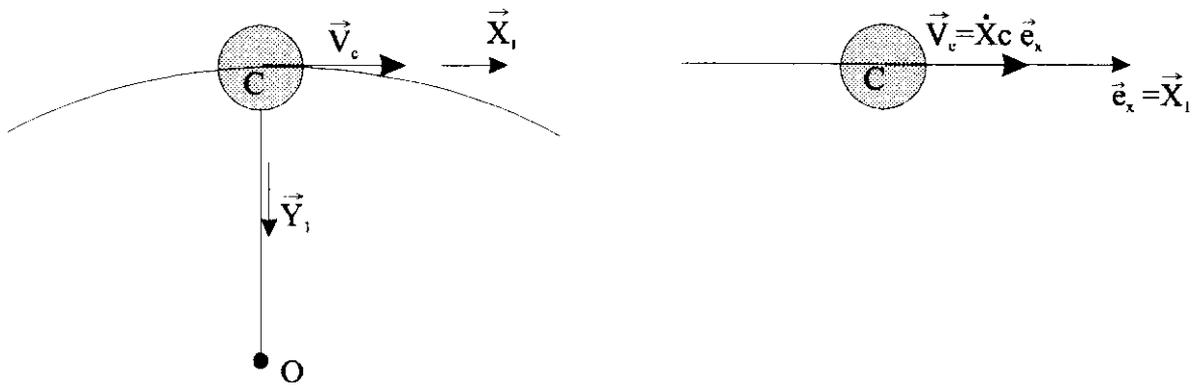


Figure 3.1 : schématisation du mouvement par un mouvement rectiligne.

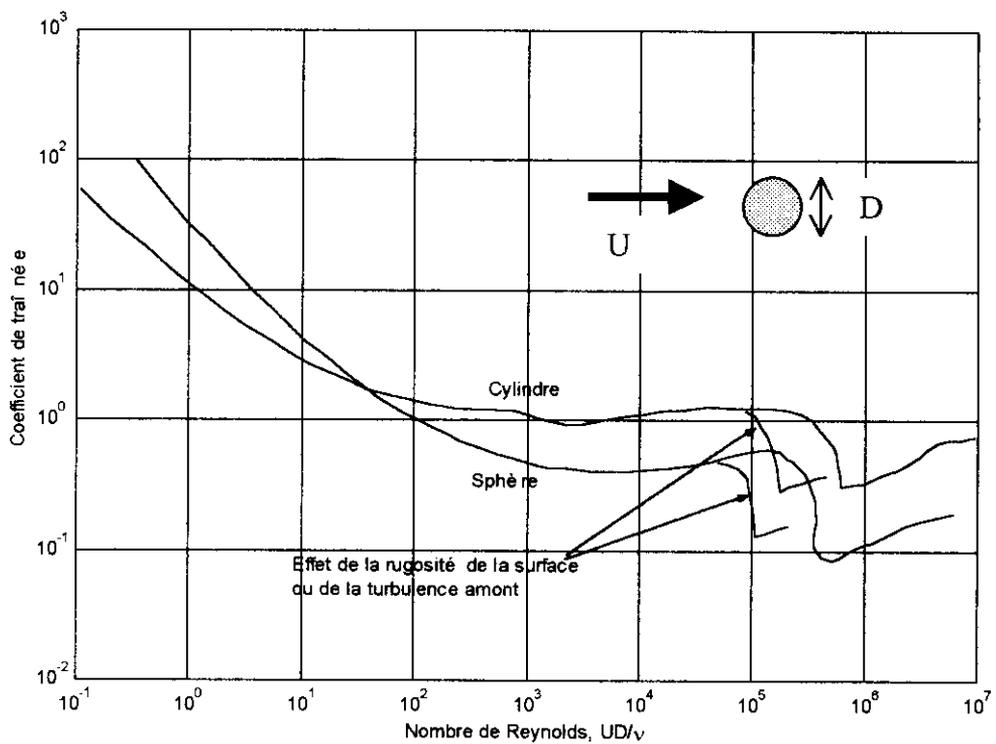


Figure 3.2 : coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds.

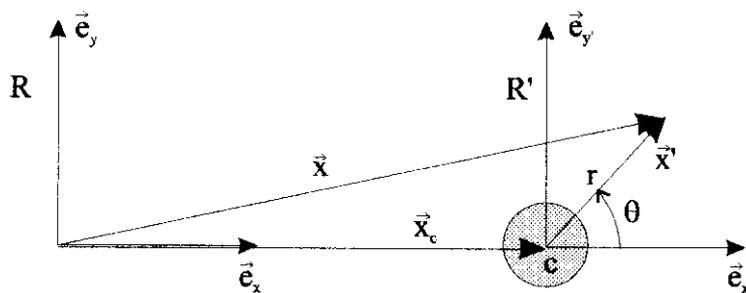


Figure 3.3 : changement de variable.