

SESSION DE 1999**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés****section : mécanique**

épreuve de mécanique des systèmes et des milieux déformables

Durée : 8 heures

*Calculatrice électronique de poche - y compris programmable et alphanumérique
- à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228
du 28 juillet 1986.*

Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.

Auto-moteur vibreur d'oliviers

Le problème porte sur l'étude d'un auto-moteur vibreur d'oliviers, machine agricole destinée à la cueillette des olives. Ce dispositif a pour fonction de faire vibrer l'arbre par l'intermédiaire d'une pince mécanique qui enserre le tronc. Les olives qui se détachent de l'arbre sont ensuite récupérées sur un filet disposé sur le sol.

Le vibreur auto-moteur est constitué de trois sous-ensembles principaux :

- le porteur qui est un engin à deux roues motrices et une roue girouette, permettant le déplacement dans l'exploitation. Il porte les sous-ensembles bras et pince vibrante ;
- le bras télescopique à commande hydraulique, qui ajuste la position de la pince autour de l'arbre, grâce aux deux degrés de mobilité (allongement du bras télescopique, montée ou descente du bras par rotation autour d'un axe horizontal) ;
- une pince sur laquelle est embarqué le générateur de vibrations. Lorsque celle-ci est positionnée autour de l'arbre, elle enserre ensuite le tronc de l'olivier par le biais de deux coussins en élastomère qui le protègent. Les vibrations permettant la cueillette des olives sont générées par la rotation d'une masse excentrée (cf. document DT4), mise en mouvement par un moteur hydraulique (cf. coupe AA, document DT3b), lié au mors droit de la pince. Dans la phase de vibrations, l'ensemble mors gauche, mors droit et caisson constitue un système rigidifié par l'action des vérins hydrauliques 1.19 et 1.22 du document DT3a.

Le problème est structuré en trois parties indépendantes :

- Première partie :

On se propose de rechercher dans cette partie :

- a) d'une part, les efforts dans les liaisons dont on observe que les solutions constructives qui les réalisent sont sources de défaillances de la machine ;
- b) d'autre part, la caractérisation des conditions de vibrations des principaux éléments du système participant à la chaîne dynamique de vibrations.

Compte tenu de la longueur de l'étude, cette partie se limitera dans le cadre du sujet à une mise en équation du système. Pour cette première partie, il est recommandé d'utiliser les théorèmes généraux de la dynamique.

- Deuxième partie :

La résolution de la première partie étant particulièrement lourde, on se propose de simplifier le modèle d'étude pour ce qui concerne le domaine vibratoire. Dans cette deuxième partie, on recentrera donc l'étude sur l'ensemble pince et arbre, dont on recherche la réponse dynamique à la sollicitation du générateur de vibrations, afin d'en pressentir les conditions optimales de fonctionnement.

Le traitement de cette deuxième partie exploitera la méthode de Lagrange. Elle met en oeuvre deux modèles pour réaliser l'étude vibratoire du système pince-arbre :

- a) le premier modèle décrit précisément la pince et considère l'arbre de façon grossière ;
- b) tandis que le second modèle se focalise quant à lui sur une représentation assez fine de l'arbre, mais considère la pince de façon grossière.

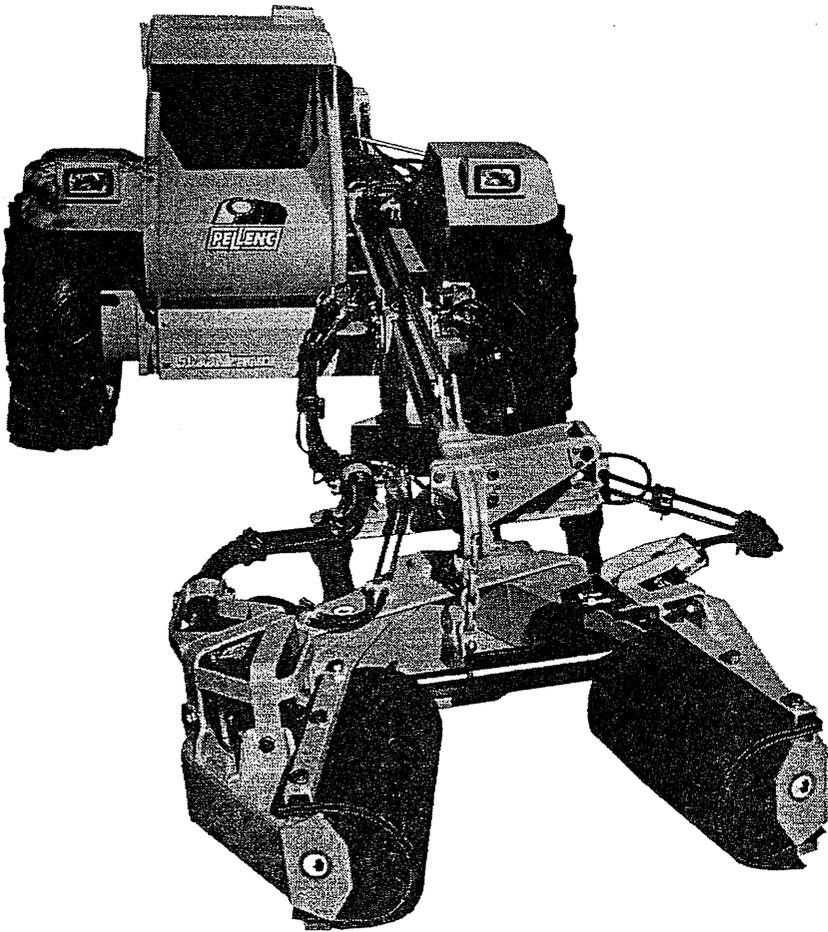
- Troisième partie :

Les actionneurs du vibreur auto-moteur sont hydrauliques. Compte tenu de la morphologie de l'engin et des conditions d'utilisation, les longueurs de tuyaux d'alimentation sont importantes (cf. documents DT1 et DT2). On se propose, dans cette troisième partie, d'étudier les conditions d'alimentation du moteur hydraulique générateur de vibrations. L'étude de mécanique des fluides se rapportera à l'écoulement incompressible d'un fluide visqueux dans les conduites d'alimentation.

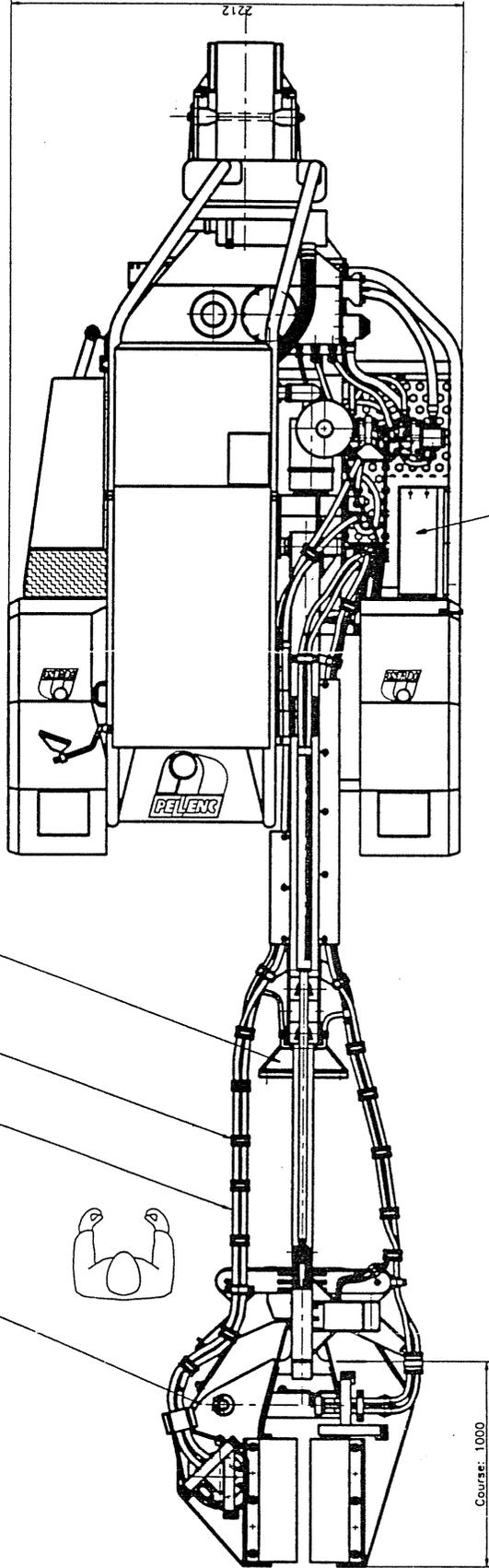
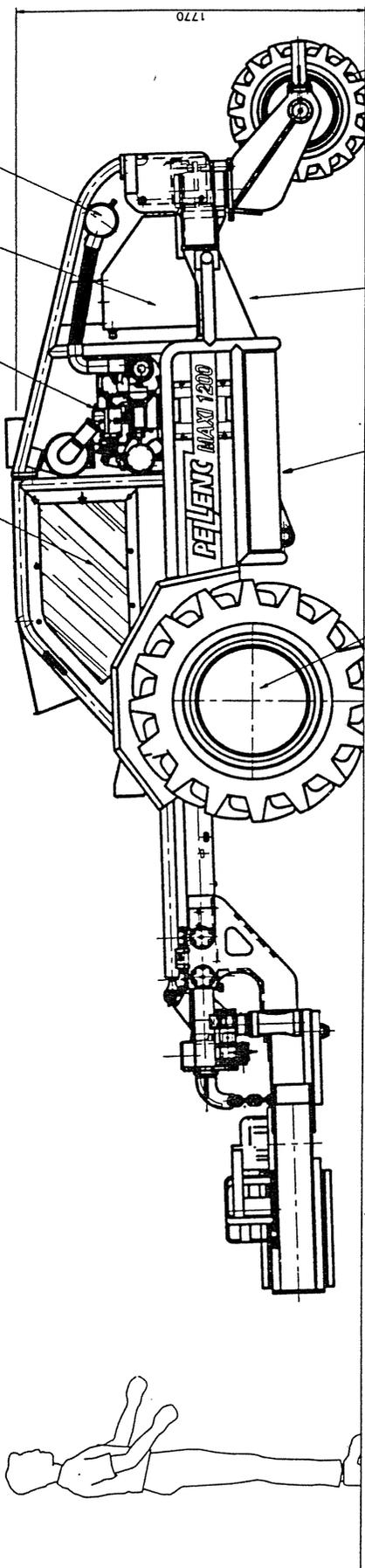
Ces trois parties sont indépendantes, et d'égale importance. **Elles doivent impérativement être rédigées sur des copies séparées.** Les données numériques sont fournies au fur et à mesure des besoins.

Tournez la page S.V.P.

Document DT1



L 114



- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13
- 14
- 15
- 16
- 17
- 18

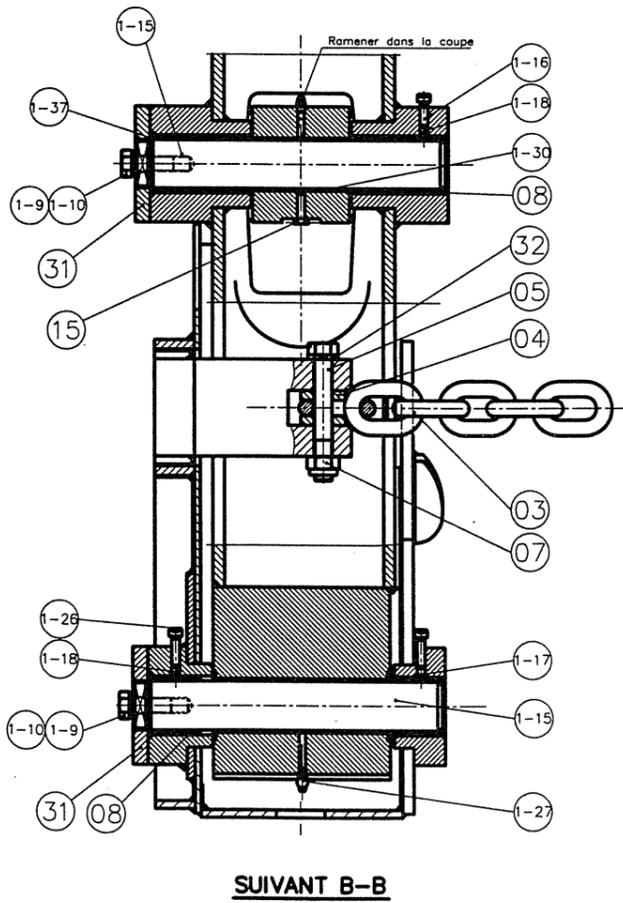
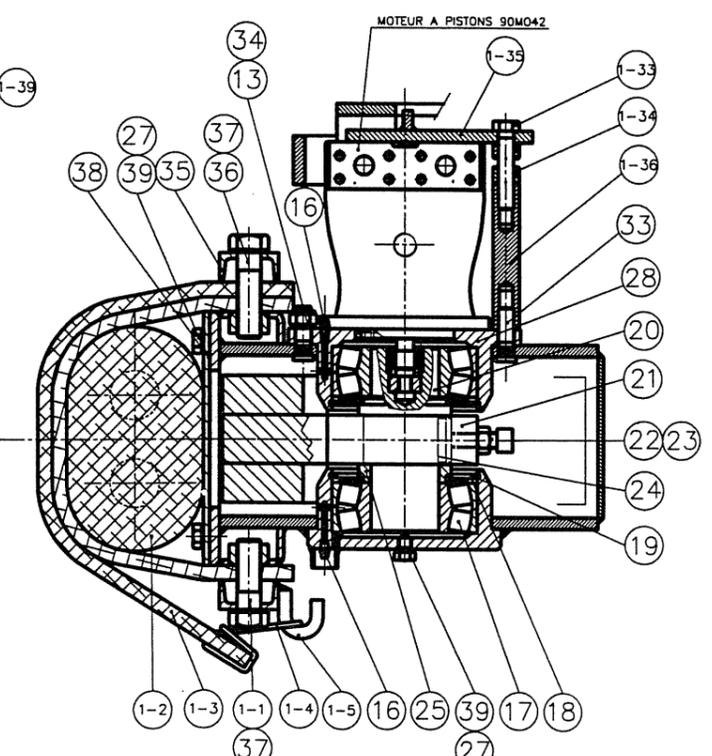
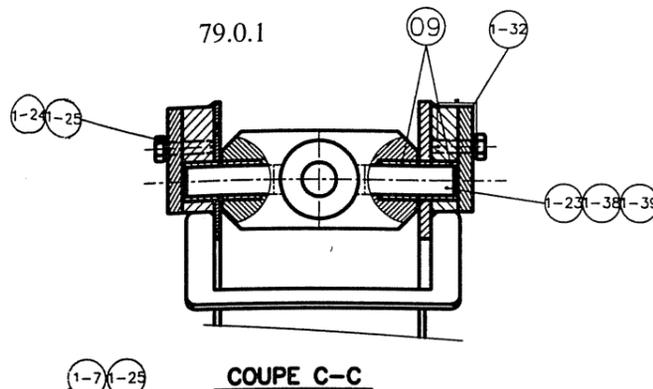
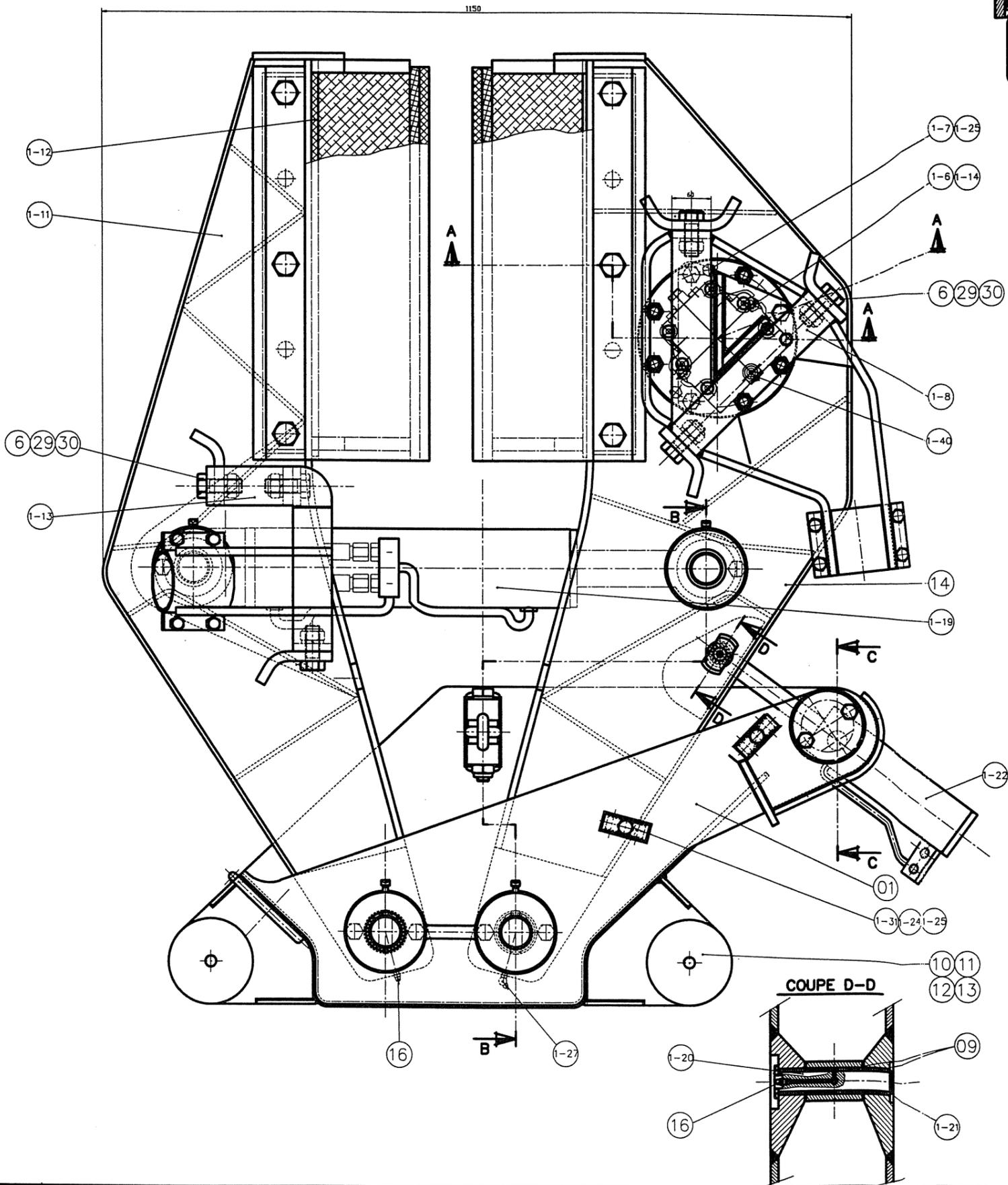
Tournez la page S.V.P.

DT3a

79.0.1

DT3b

J. 5727-Ba



SUIVANT A-A

SUIVANT B-B

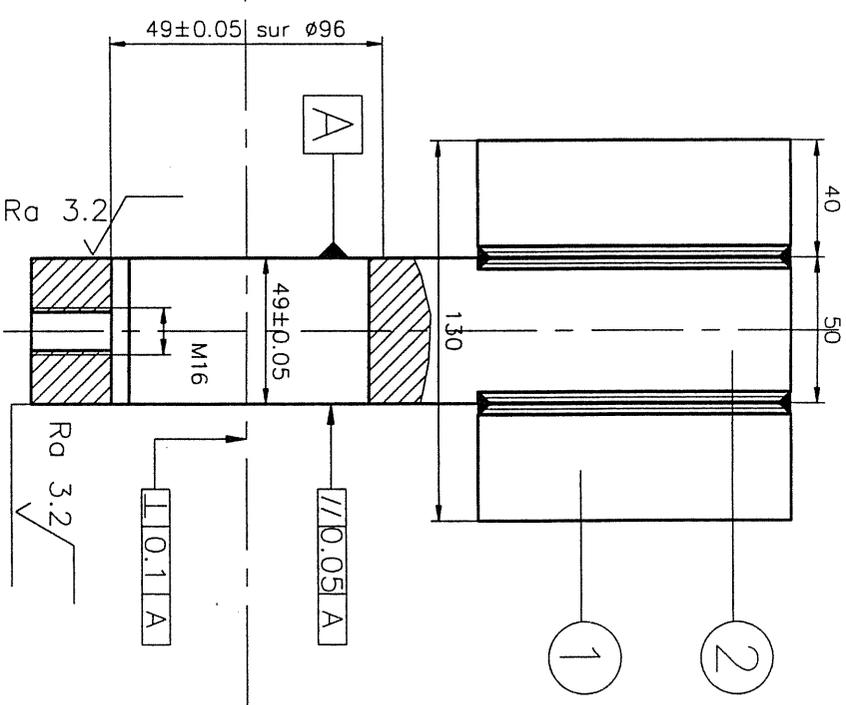
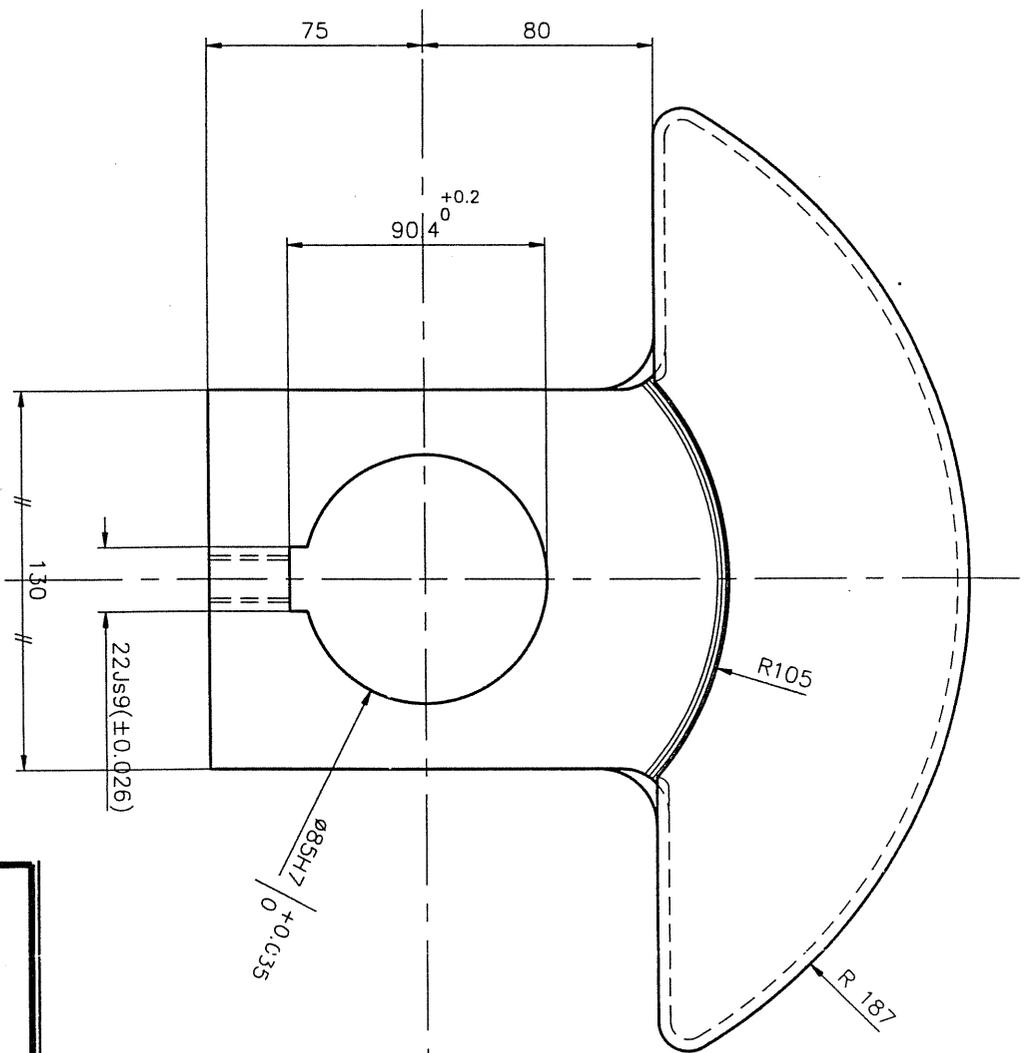
NOTA: Toutes les soudures continues $a=0.7 \times \text{épaisseur tôle la plus petite}$ à assembler, sauf indications spécifiques

MASSE THEORIQUE DE LA PINCE: 540 Kg

14951-E		1ER EXTENSION DU PLAN 14950	
Code Abrégé	INTITULE	MATIERE	VERIFICATION
Descripteur	ENSEMBLE	PIECE IDENT. PNE 600-97	Non
ED-1	2/2	DATE: 12/08/97	N° BE: 32-14951
Autres	DATE	NON	MODIFICATION
Édité	DATE	NON	MODIFICATION
Édité	DATE	NON	MODIFICATION
PELLENG S.A. 84122 PERRUS Cedex (France)			

14950-E		ENSEMBLE PINCE M.F.600 97	
Code Abrégé	INTITULE	MATIERE	VERIFICATION
Descripteur	ENSEMBLE	PIECE IDENT. PNE 600-97	Non
ED-1	2/2	DATE: 12/08/97	N° BE: 32-14950
Autres	DATE	NON	MODIFICATION
Édité	DATE	NON	MODIFICATION
Édité	DATE	NON	MODIFICATION
PELLENG S.A. 84122 PERRUS Cedex (France)			

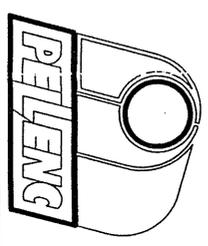
DT4



MASSE EXCENTREE

Vérifié par: **ROLLAND**
 Indice: _____ Date: **02/05/95**

N°REF		14511		TRAITEMENT		Peinture jaune PELLENC	
Code Akregg		SV/PMFGME		MATIERE			
Dessinateur		DUSSART		ENSEMBLE		PMF 600	
Echelle		1/2		Tolerance Ge.		+/- 0.05	
N°plan		BE		N°plan		BE	
DATE		20/04/94		DATE		20/04/94	
MODIFICATION				DATE		NOM	
PELLENC S.A. 84122 PERTUIS Cedex (France)							



Soudures continues

Ce plan est la propriété inaliénable de PELLENC S.A. - Il ne peut être communiqué utilisé ou exploité sans autorisation écrite de PELLENC S.A.

Partie I

(Mécanique générale)

Le modèle de mécanique générale proposé dans cette partie, comporte de nombreuses hypothèses simplificatrices. Le schéma retenu est le suivant : (documents : DM 1 et DM 2).

Description du modèle

- S_0 est le sol, auquel on associe le repère galiléen R_0 dont l'axe (O_0, \vec{z}_0) est vertical ascendant.
- S_1 est le tracteur-porteur, lié à S_0 par une liaison glissière d'axe $(O, \vec{y}_{0,1})$ et un système ressort-amortisseur qui modélise le comportement des pneus (ressort de raideur k_1 , amortisseur de coefficient d'amortissement b_1).

Le paramètre du mouvement de S_1/S_0 est Y , défini par : $\vec{O}_0\vec{O}_1 = Y \vec{y}_{0,1}$.

- S_2 est le bras, lié à S_1 par une liaison pivot d'axe $(O_2, \vec{y}_{1,2})$, avec $\vec{O}_1\vec{O}_2 = l_1 \vec{x}_{0,1}$.

Le paramètre du mouvement de S_2/S_1 est θ , défini par : $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

- S_3 est la pince, liée à S_2 par une liaison glissière d'axe $(O_2, \vec{x}_{2,3})$. Cette pince est constituée de deux mors (munis des coussins de protection), rigidifiés par un vérin lors du serrage.

Le paramètre du mouvement de S_3/S_2 est X , défini par : $\vec{O}_2\vec{G}_3 = X \vec{x}_{2,3}$; $\vec{G}_3\vec{O}_3 = l_3 \vec{x}_{2,3}$.

- S_4 est un rotor qui porte la masse excentrée (balourd), génératrice des vibrations ; il est lié à S_3 par une liaison pivot d'axe $(O_4, \vec{z}_{3,4})$.

Le paramètre du mouvement de S_4/S_3 est Φ , défini par : $\Phi = (\vec{y}_3, \vec{y}_4)$

$$\vec{O}_3\vec{O}_4 = -d \vec{y}_3 ; \vec{O}_4\vec{G}_4 = e \vec{y}_4 .$$

- S_5 est le tronc de l'arbre, lié à S_0 par une liaison pivot d'axe $(O^*, \vec{x}_{0,5})$ et un système ressort-amortisseur qui modélise le comportement du tronc (ressort de raideur k^* , amortisseur de coefficient d'amortissement b^*).

Le paramètre du mouvement de S_5/S_0 est β , défini par : $\beta = (\vec{z}_0, \vec{z}_5)$.

S_5 est lié à S_3 par une liaison rotule de centre $O_3 = O_5$; $\vec{O}_0\vec{O}^* = d_0 \vec{x}_0$; $\vec{O}^*\vec{O}_5 = l_5 \vec{z}_5$.

Hypothèses

Les liaisons sont parfaites, sauf au niveau de la liaison rotule entre S_3 et S_5 où l'on admet une loi de comportement donnée par : $\vec{M}_{3/5}(O_3) = -\lambda \vec{\Omega}_5^3$. En outre, l'action des ressorts (raideur k_1 et k^*) est nulle quand Y et β sont nuls (pas de précontrainte). Enfin, le rotor S_4 est entraîné par un moteur hydraulique qui exerce un couple $\vec{C}_{m_{3/4}} = C_m \vec{z}_4$, assurant une vitesse de rotation uniforme ($\Phi' = \text{cste} = \Omega$).

N.B. On simplifiera les calculs en linéarisant, c'est à dire en supposant les paramètres petits (sauf X et Φ) ainsi que leurs dérivées par rapport au temps (sauf $\Phi' = \Omega$).

Données de géométrie des masses

S_1 : masse m_1 ; centre de masse $G_1 = O_1$.

S₂ : masse m₂ ; centre de masse G₂ = O₂ ; (hypothèse simplificatrice).

S₃ : masse m₃ ; centre de masse G₃.

Le plan (G₃, \vec{x}_3 , \vec{z}_3) est un plan de symétrie.

S₄ : masse m₄ ; centre de masse G₄.

L'opérateur d'inertie de S₄ en G₄ s'écrit : $\overline{\overline{I}}_{G_4} = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{R_4}$

S₅ : masse m₅ ; centre de masse G₅ = O₅.

Le plan (O^{*}, \vec{x}_5 , \vec{z}_5) est un plan de symétrie.

Questions

I.1. Travail préparatoire

I.1.1. Cinématique

Etablir les relations de liaison entre les paramètres.
Donner les résultats linéarisés.

I.1.2. Cinétique

- Calculer le torseur dynamique de S₁ en O₁, exprimé dans la base 1.
 - Calculer le torseur dynamique de S₂ en O₂, exprimé dans la base 2.
 - Calculer le torseur dynamique de S₃ en G₃, exprimé dans la base 2.
 - Calculer le torseur dynamique de S₄ en G₄, exprimé dans la base 4.
 - Calculer le torseur dynamique de S₅ en O^{*}, exprimé dans la base 5.
- Donner les résultats linéarisés.

I.1.3. Dynamique : Lois de comportement

Ces lois traduisent le comportement de certains éléments en fonction des paramètres et (ou) de leurs dérivées.

- Exprimer la loi de comportement des ressorts k₁ et k^{*}.
- Exprimer la loi de comportement des amortisseurs b₁ et b^{*}.
- Exprimer la loi de comportement de la liaison rotule entre S₃ et S₅.

I.2. Etude du mouvement

Dans cette partie, on s'intéresse aux mouvements du système soumis à des vibrations induites par la masse excentrée. On se propose d'utiliser les théorèmes généraux de la dynamique pour écrire les équations nécessaires à cette étude.

I.2.1. Avant tout calcul et compte tenu du travail préparatoire, expliquer la méthode utilisée pour atteindre l'objectif :

- Préciser clairement les systèmes isolés et la manière d'obtenir les équations ;
- Donner le nombre d'équations à écrire ainsi que les inconnues (cinématiques et dynamiques) qu'elles font intervenir.

I.2.2. Ecrire maintenant les équations obtenues par les théorèmes généraux :

Compte tenu de l'aspect calculatoire important de la partie cinétique de ces équations, on se contentera d'explicitier complètement la partie "actions mécaniques extérieures" au système isolé, tandis qu'on se limitera à une écriture symbolique formelle représentative de la partie cinétique.

Il n'est pas demandé d'éliminer certaines inconnues pour se ramener aux seules équations de mouvement.

I.3. Donner l'expression du torseur de la liaison S₃ / S₄.

Tournez la page S.V.P.

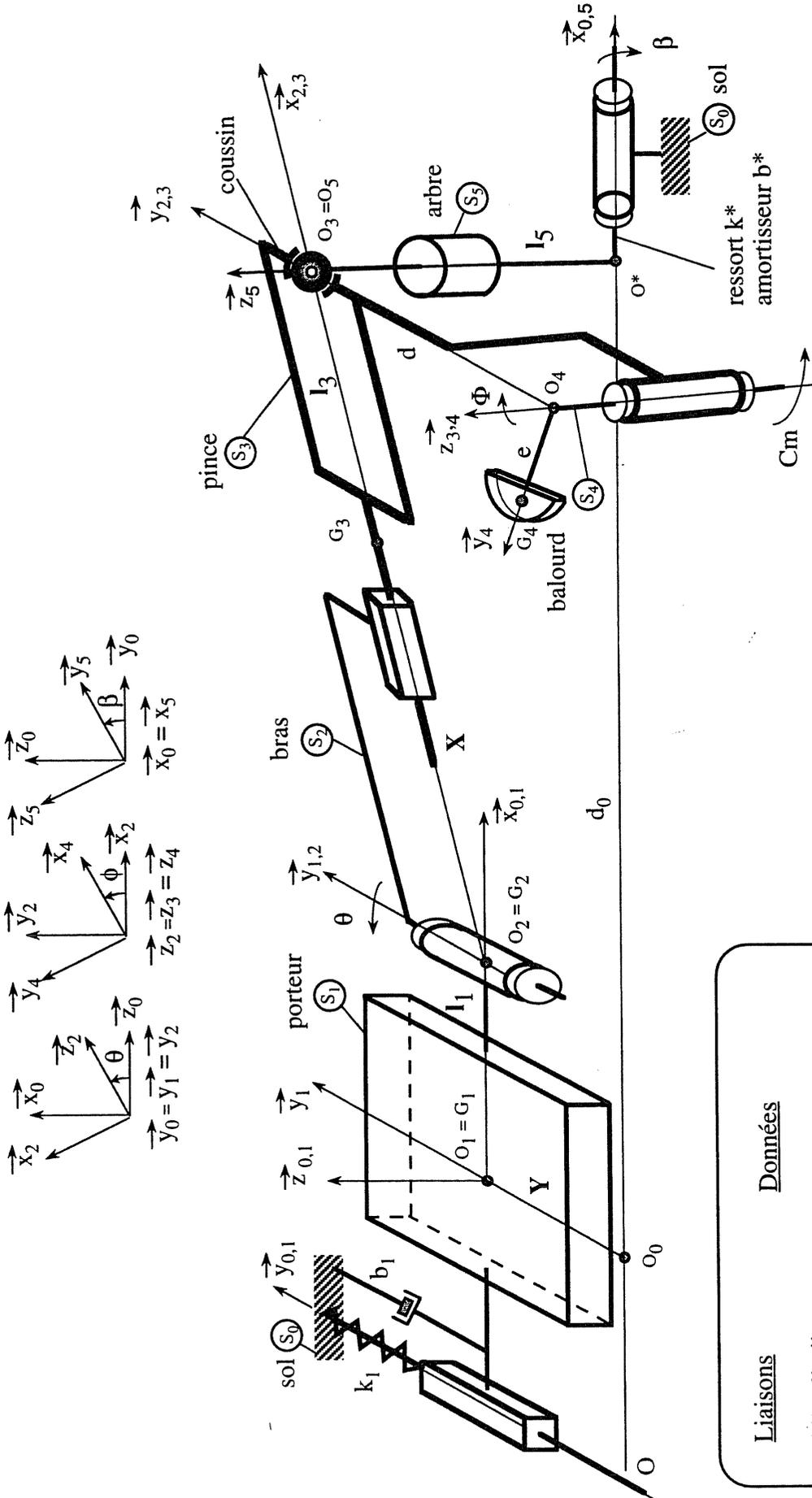


Figure : I.1

Liaisons	Données
0/1 glissière	$O_0 O^* = d_0$
1/2 pivot	$O_1 O_2 = l_1$
2/3 glissière	$G_3 O_3 = l_3$
3/4 pivot	$O_3 O_4 = d$
3/5 rotule	$O_4 G_4 = e$
0/5 pivot	$O^* O_5 = l_5$

Document : DM 2

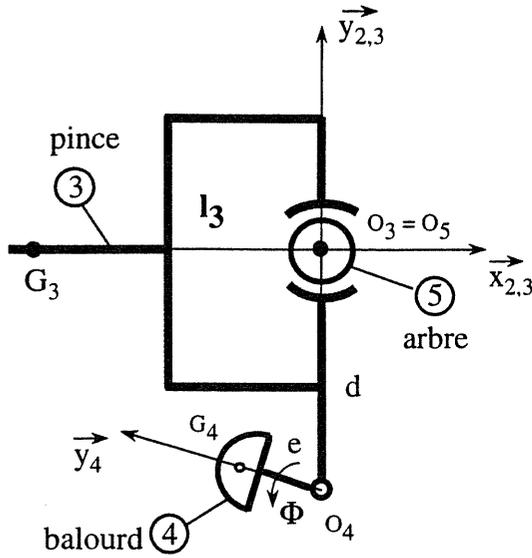


Figure : I.2

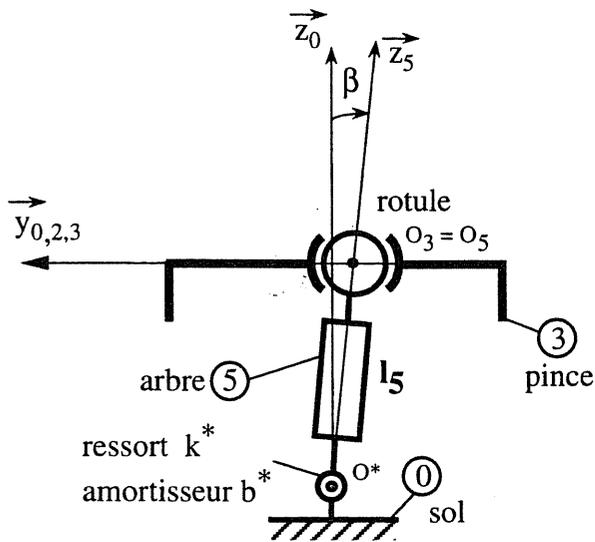


Figure : I.3

Tournez la page S.V.P.

Partie II

(Etude vibratoire de la pince et de l'arbre)

II.1. Etude vibratoire de la pince

Nous proposons de nous intéresser dans cette partie à l'étude vibratoire du système, constitué de la pince serrant dans ses mors un tronc d'olivier. La pince est suspendue à l'extrémité du bras télescopique, par l'intermédiaire de silent-blocs. Le bras est supposé rigide et immobile par rapport à un référentiel lié au sol. Un moteur hydraulique, assemblé rigidement sur le mors droit de la pince, assure le mouvement de rotation uniforme d'un excentrique destiné à générer une excitation vibratoire sur l'ensemble constitué de la pince et de l'arbre.

La modélisation proposée pour cette partie de l'étude est définie par les hypothèses suivantes (cf. figure II.1 du document DM3) :

- tous les mouvements considérés s'effectuent dans un même plan horizontal ;
- la pince, constituée du caisson et de ses deux mors, est modélisée par un solide indéformable, de centre de masse G, de masse M_p et d'inertie I_{GZ} ;
- l'excentrique est assimilé à une masse concentrée M_e située à un rayon e de l'axe de rotation du moteur hydraulique, tournant à une vitesse uniforme Ω ;
- l'arbre est modélisé par une masse concentrée M_a , assujettie rigidement aux mors de la pince. Il est muni en outre d'un ressort de raideur k_a afin de modéliser son comportement lorsque sa section est déplacée par rapport à sa position d'équilibre ;
- les deux silent-blocs sont identiques, de masse négligeable par rapport à celle de la pince, chacun d'eux est modélisé par un ressort de raideur k_s .

Le paramétrage proposé pour l'étude de cette partie est le suivant :

- trois paramètres du mouvement : x , y et α , définis par :

$$\overrightarrow{O_0O} = x \overrightarrow{x_0} + y \overrightarrow{y_0} \quad \text{et} \quad \alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x})$$

- cinq longueurs caractéristiques de la géométrie de la pince, définies par :

$$\overrightarrow{OG} = l_1 \overrightarrow{x} \quad ; \quad \overrightarrow{OA} = l_4 \overrightarrow{x}$$

$$\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC} = l_2 \overrightarrow{y}$$

$$\overrightarrow{OD} = l_3 \overrightarrow{x} - l_2 \overrightarrow{y}$$

$$\overrightarrow{DE} = e \overrightarrow{u} \quad ; \quad (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}) = \Omega t$$

- deux repères (R_0 est un repère galiléen lié au sol et R est le repère lié à la pince), coïncidants lorsque la pince est en position de repos :

$$R_0 = (O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}) \quad ; \quad R = (O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$$

II.1.1. Etablir l'expression de l'énergie cinétique du système (constitué de la pince, de l'excentrique, des silent-blocs et du tronc d'arbre) dans son mouvement par rapport à R_0 .

II.1.2. Etablir l'expression de l'énergie potentielle élastique du système dans son mouvement par rapport à R_0 .

II.1.3. Etablir l'expression des équations linéarisées du mouvement, en se basant sur l'hypothèse que les paramètres du mouvement ainsi que leurs dérivées temporelles successives sont du même ordre de grandeur, et que le mouvement de rotation du système demeure de faible amplitude au cours du temps. On présentera ce système d'équations différentielles sous forme matricielle.

II.1.4. Quelle hypothèse doit on formuler pour restreindre le système précédemment obtenu (à la question II.1.3) à un système d'équations différentielles du second ordre, à coefficients constants.

II.1.5. On souhaite maintenant déterminer de façon simplifiée les pulsations et fréquences propres des oscillations libres et non amorties du système autour de sa position d'équilibre, en reprenant l'hypothèse formulée à la question précédente (II.1.4). Quelle condition supplémentaire doit-on imposer pour obtenir le découplage des modes de translation (suivant \vec{x}) et de rotation du système ? Déterminer dans ce cas la pulsation propre et la fréquence propre de ce mouvement de translation. Etablir ensuite les pulsations et fréquences propres des deux autres mouvements. Effectuer ensuite l'application numérique.

Les données numériques relatives aux questions II.1.1 à II.1.6 sont :

$$l_1 = 0,35 \text{ m} ; l_2 = 0,41 \text{ m} ; l_3 = 0,96 \text{ m} ; l_4 = 1,06 \text{ m} ; e = 0,12 \text{ m} ;$$

$$M_p = 590 \text{ kg} ; M_a = 50 \text{ kg} ; M_e = 25 \text{ kg} ;$$

$$I_{GZ} = 135 \text{ kg.m}^2 ;$$

$$k_a = 5.10^7 \text{ N.m}^{-1} ; k_s = 15.10^3 \text{ N.m}^{-1} ;$$

$$\Omega = 210 \text{ rd.s}^{-1}.$$

II.2. Etude vibratoire de l'arbre et de la pince

Dans l'étude précédente (partie II.1), l'arbre est simplement modélisé par un système équivalent constitué d'une masse concentrée et d'un ressort. Nous proposons maintenant de considérer l'arbre comme un milieu continu purement élastique, longiligne, modélisé par une poutre rectiligne (en l'absence de chargement), de longueur L , de section circulaire et constante (diamètre d), encastrée dans le sol à sa base. La pince, ici modélisée par une masse concentrée M_p , est assujettie au tronc de l'arbre à une altitude H du sol. Elle est le siège d'un chargement périodique appliqué dans le plan parallèle au sol d'altitude H (cf. figure II.2 du document DM3).

On adoptera dans cette partie les hypothèses suivantes :

- lors de la déformation, toute section droite reste droite et perpendiculaire à la ligne moyenne ;
- on néglige les déformations dues au cisaillement ;
- on néglige l'action du poids, ainsi que toute charge répartie ;
- on considérera que l'énergie cinétique de rotation des sections de la poutre reste négligeable devant l'énergie cinétique de translation ;
- on néglige les effets d'amortissement du matériau.

On recherche dans cette partie une solution approchée du premier mode (mode fondamental) par la méthode de Rayleigh.

Démarche d'application de la méthode :

* on suppose que l'on peut découpler le déplacement dans l'espace et dans le temps :

$$u(z,t) = \phi(z).q(t)$$

* on choisit un paramètre cinématique, par exemple le déplacement du point d'application de l'effort concentré ;

* lorsqu'on ne connaît pas la déformée exacte, on approxime $\phi(z)$ par l'expression de la déformée statique ;

* on calcule ensuite l'énergie cinétique du système en fonction du paramètre cinématique ;

* on calcule l'énergie potentielle élastique du système en fonction du paramètre cinématique ;

* enfin on écrit l'équation du mouvement en fonction du paramètre cinématique.

Tournez la page S.V.P.

II.2.1. Déterminer l'expression de la déformée statique de la poutre sollicitée transversalement dans un plan horizontal d'altitude H par rapport à l'encastrement, par un effort constant : $\vec{F} = -M_e \Omega^2 \vec{x}$. Cette déformée sera exprimée en fonction du paramètre cinématique (le déplacement du point d'application de l'effort concentré).

II.2.2. Déterminer l'énergie cinétique du système dans son mouvement par rapport au sol, en fonction du paramètre cinématique.

II.2.3. Déterminer l'énergie potentielle élastique du système dans son mouvement par rapport au sol, en fonction du paramètre cinématique.

II.2.4. Déterminer l'équation du mouvement, les premières pulsation et fréquence propres des oscillations libres du système constitué de la poutre et de la masse concentrée autour de sa position d'équilibre. Effectuer ensuite l'application numérique.

II.2.5. Déterminer la réponse dynamique du système constitué de la poutre et de la masse concentrée, en régime de vibrations forcées, sollicité transversalement dans le plan perpendiculaire à la poutre situé à une altitude H de l'encastrement, par un effort $\vec{F} = -M_e \Omega^2 \cos(\Omega t) \vec{x}$.

II.2.6. Proposer une démarche d'amélioration de la présente méthode afin d'obtenir les n premiers modes d'oscillations libres du système.

Les données numériques relatives aux questions II.2.1 à II.2.5 sont :

$$L = 3 \text{ m} ; H = 0,4 \text{ m} ; d = 0,2 \text{ m} ; e = 0,12 \text{ m} ;$$

$$M_e = 25 \text{ kg} ; M_p = 590 \text{ kg} ; \rho = 600 \text{ kg.m}^{-3} ;$$

$$E = 11.10^9 \text{ Pa} ;$$

$$\Omega = 210 \text{ rd.s}^{-1}.$$

Document : DM3

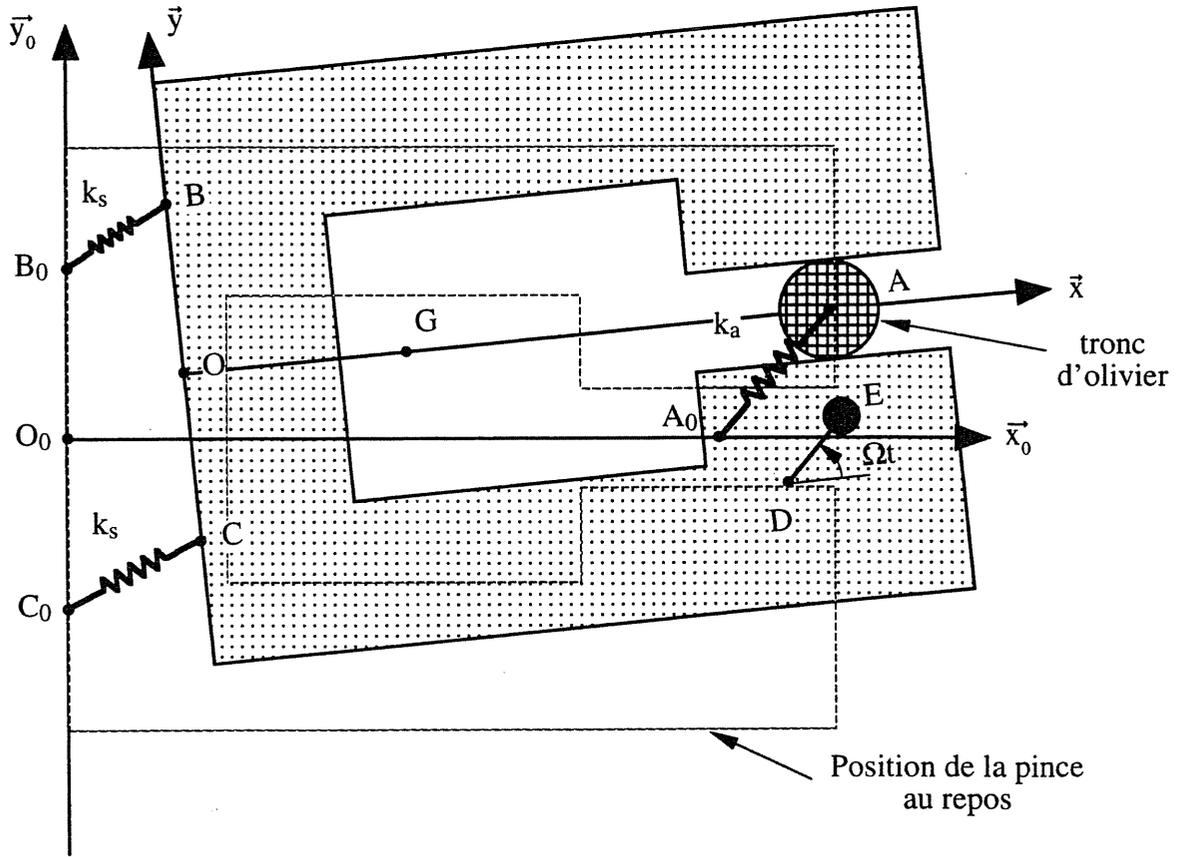


Figure II.1 : première modélisation de la pince et de l'arbre

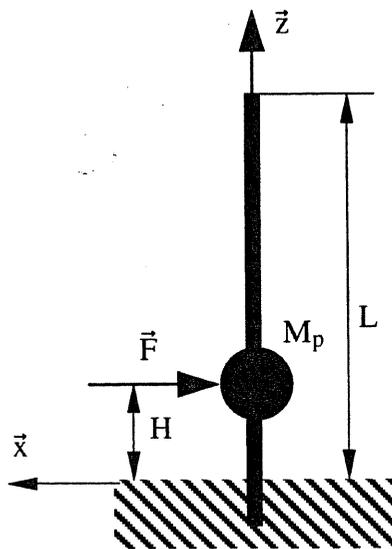


Figure II.2 : seconde modélisation de la pince et de l'arbre

Partie III

(Mécanique des Fluides)

Le moteur hydraulique (M_H) qui actionne la masse excentrée est alimenté, au moyen d'une conduite (C), à partir de la pompe (P_H), (cf schéma de principe Figure III.1). La conduite (C), dont on a précédemment signalé la grande longueur, est supposée cylindrique rigide, quasi-rectiligne de longueur $L=10$ m et de diamètre intérieur $D=2R=16$ mm.

On souhaite étudier l'écoulement du fluide dans la conduite et calculer les pertes de charges régulières dans celle-ci. Soient respectivement p_0, p_1, p_2 les pressions statiques qui règnent dans les sections d'entrée de la conduite, d'entrée et de sortie du moteur hydraulique.

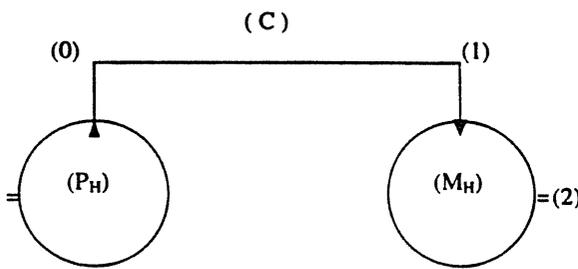


Figure III.1

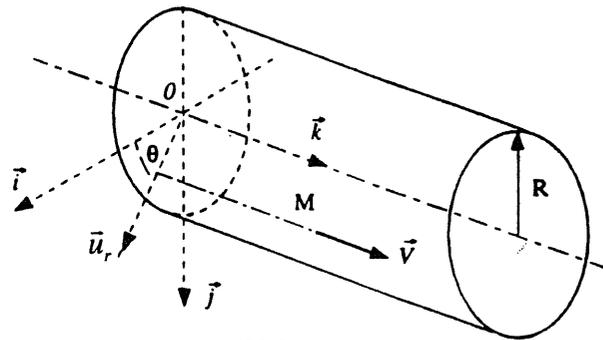


Figure III.2

Le fluide utilisé est incompressible et visqueux de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ , qui sont des données physiques constantes.

En un point M de l'écoulement, on note par : $\vec{V} = \{v_i\}_{i=1,2,3}$ la vitesse particulière et par p la pression statique. Le tuyau (C) étant horizontal, de faible diamètre $\left(\frac{D}{L} \ll 1\right)$, on considère que, compte tenu des valeurs élevées du champ de pression statique, on peut négliger les effets de la pesanteur.

On va déterminer les pertes de charges régulières dans la conduite en se plaçant successivement dans les deux cas principaux d'écoulement que sont le régime laminaire et le régime turbulent.

III.1. Dans cette première partie on suppose que l'écoulement établi est stationnaire et le régime laminaire.

Soit $R_o = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ le repère orthonormé direct fixe et soit $R_c = \{M; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}\}$ le repère local cylindrique. θ est l'angle polaire entre les vecteurs \vec{i} et \vec{u}_r . Un point courant M de l'écoulement est repéré par (figure III.2) : $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{k}$

Dans ce modèle les lignes de courant sont constituées par des filets rectilignes parallèles à l'axe $(O; \vec{k})$ de la conduite. On exprime donc pour la vitesse particulière :

$$\vec{V} = v_3 \vec{k} \quad \text{avec} \quad v_3 = w(r, \theta, z)$$

On rappelle que les opérateurs différentiels $\vec{\nabla}$ et Δ s'expriment par :

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{u}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

III.1.1. Exprimer la condition d'incompressibilité ; en déduire que le champ des vitesses \vec{V} est invariant par translation suivant \vec{k} .

En raison de la symétrie de révolution de l'écoulement autour de l'axe $(O; \vec{k})$, w est invariant par rotation θ autour de cet axe. Compte tenu de ces propriétés, écrire les équations du mouvement du fluide dans le repère R_c .

III.1.2. En déduire les deux équations différentielles qui décrivent respectivement les évolutions du champ des vitesses particulières et de la pression statique dans la conduite.

Soit $\frac{\delta p}{L}$ la chute linéique de pression, avec $\delta p = p_1 - p_0$, montrer que la pression statique s'exprime simplement en fonction notamment de $\frac{\delta p}{L}$. Etablir l'expression qui donne le profil des vitesses w dans une section droite de la conduite.

Exprimer la vitesse moyenne ($V_m = w_m$) en fonction de $\frac{\delta p}{L}$, μ et R . Montrer que $V_m = w_d = \frac{w_{\max}}{2}$ où w_d est la vitesse débitante et w_{\max} la vitesse maximum.

III.1.3. Etablir la relation qui exprime, en fonction de $\frac{\delta p}{L}$, μ et R , le débit volume q_v de fluide qui passe par unité de temps à travers une section droite de la conduite. Commenter le résultat obtenu.

III.1.4. Après avoir isolé un volume de contrôle, limité par la surface élémentaire cylindrique d'axe $(O; \vec{k})$, de rayon r et de longueur dz , on demande de faire un bilan des forces et d'en déduire l'expression de la contrainte tangentielle τ en fonction de r et du gradient de pression $\frac{dp}{dz}$. Analyser ce résultat et en déduire l'expression de la contrainte tangentielle à la paroi τ_p (contrainte de cisaillement à la paroi) en fonction de R et $\frac{\delta p}{L}$. En déduire la force de frottement exercée par le fluide sur la conduite.

III.1.5. On définit la grandeur sans dimension λ , appelée coefficient de perte de charge

$$\text{ou aussi coefficient de résistance de la conduite par : } \lambda = - \frac{\left(\frac{\delta p}{L}\right) D}{\frac{1}{2} \rho V_m^2}$$

Donner l'expression de λ en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement Re .

III.2. Dans cette deuxième partie on envisage le cas d'un écoulement à caractère turbulent. En chaque point d'un tel écoulement la vitesse particulière fluctue très rapidement. On adopte la décomposition suivante pour chaque composante v_i : $v_i = \bar{v}_i + v'_i$

où \bar{v}_i représente la vitesse moyenne définie par : $\bar{v}_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} v_i(t') dt'$. C'est donc une moyenne temporelle réalisée sur un intervalle de temps Δt très grand en comparaison avec la durée d'une fluctuation. On considérera que cette grandeur moyenne est indépendante du temps, l'écoulement est alors dit stationnaire en moyenne. On définit de même \bar{p} .

L'écoulement moyen est supposé de type unidirectionnel tel que $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$: et $\bar{v}_3 = w(r)$. On définit respectivement la vitesse moyenne \bar{w} dans la section droite s de la conduite, la vitesse de frottement v_τ et le coefficient de perte de charge λ par les expressions :

$$\bar{w} = \frac{1}{s} \int_s w(r) ds \quad ; \quad v_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad ; \quad \lambda = \frac{-\frac{d\bar{p}}{dz} D}{\frac{1}{2} \rho \bar{w}^2}$$

τ_p étant la contrainte de cisaillement à la paroi.

On suppose que la paroi de la conduite est lisse. Dans ce cas la loi de vitesse $w(r)$ est donnée par : $\frac{w(r)}{v_\tau} = C_1 \ln\left(\frac{y v_\tau}{\nu}\right) + C_2$ (ln est le logarithme népérien)

où $y = R - r$ est une variable repérée à partir de la paroi, ν est la viscosité cinématique du fluide. C_1 et C_2 sont des constantes.

III.2.1. Déterminer le rapport $\frac{\bar{w}}{v_\tau}$ en fonction de v_τ, ν, R, C_1 et C_2 .

III.2.2. L'équation d'équilibre en régime laminaire établie en 1.4 s'écrit de façon analogue en régime turbulent $\frac{d\bar{p}}{dz} = -\frac{2\tau_p}{R}$; montrer alors que $\frac{\bar{w}}{v_\tau}$ peut s'exprimer simplement en fonction de $\lambda^{1/2}$.

III.2.3. En déduire que λ satisfait à une équation du type $\lambda^{-1/2} = f(\text{Re}, \lambda^{1/2}, C_1, C_2)$. Re est le nombre de Reynolds de l'écoulement, exprimé en fonction de la vitesse moyenne, de D et de ν .

III.2.4. Le traitement des écoulements turbulents en conduites rugueuses peut être mené de façon analogue en faisant usage alors d'une loi de vitesse \bar{w} modifiée qui prend en compte la rugosité relative équivalente $\frac{\varepsilon}{D}$ du tuyau.

En fait, Colebrook a établi une équation qui permet d'englober dans une même relation les deux cas possibles (cas lisse, cas rugueux). On a :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon}{3,71D} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right] \quad (\log \text{ est le logarithme décimal}).$$

Dans la pratique, on utilise les abaques du diagramme de Moody (figure III.3).

Vérifier que cette expression est effectivement en bon accord avec le cas "lisse". On précisera alors les valeurs des constantes. Quelle observation peut-on faire pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds ?

III.3. Le moteur hydraulique a une cylindrée de 42 cm^3 et il doit tourner avec une fréquence de rotation N égale à 30 Hz . Déterminer la vitesse débitante.

La pression statique en sortie du moteur hydraulique est de 24 bar et la pression statique p_o délivrée par la pompe à l'entrée de la conduite est de 432 bar .

Quand le système est en fonctionnement le fluide qui circule dans la conduite subit un échauffement. On va considérer que sa masse volumique ρ n'est pratiquement pas affectée par ce phénomène et donc qu'elle demeure constante égale à 882 kg/m^3 . La viscosité dynamique μ (et donc la viscosité cinématique ν) qui est fonction principalement de la température et dans une moindre mesure de la pression, évolue. On considère que initialement à la température de référence $T = 20^\circ \text{C}$ on a : $\nu_{20} = 11 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Au bout d'un laps de temps de fonctionnement, la température de l'huile se stabilise au voisinage de $T = 60^\circ \text{C}$. Sa viscosité cinématique vaut alors $\nu_{60} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Sachant que la rugosité relative équivalente de cette conduite est de l'ordre de 10^{-3} , on demande de déterminer dans chacun des cas la valeur du coefficient de perte de charge. Il est conseillé d'utiliser le diagramme de Moody.

En déduire la valeur de la chute de pression correspondante dans la conduite.

Estimer la puissance nette maximum fournie par le fluide au moteur hydraulique.

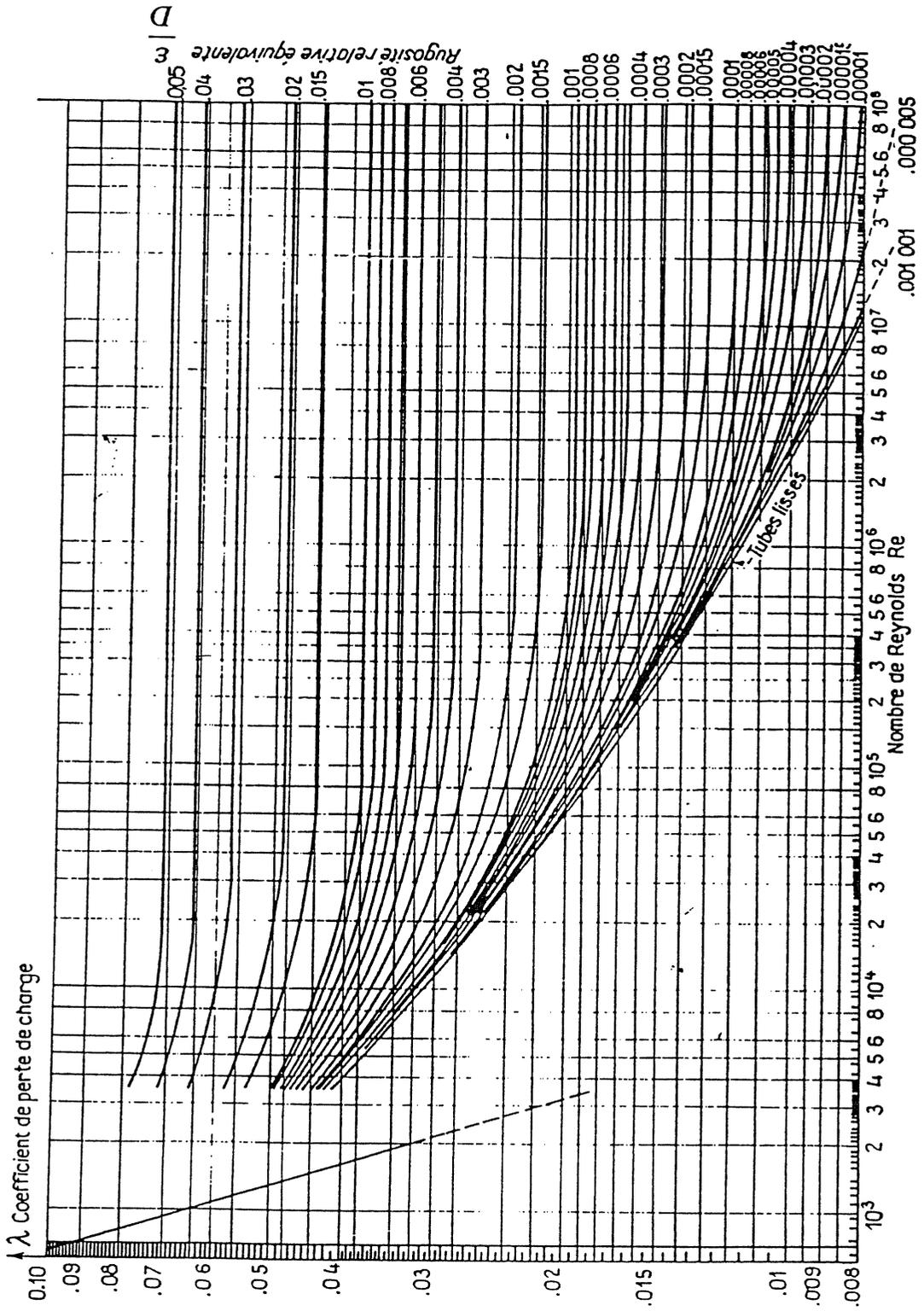


Figure III.3.