

ELEMENTS DE CORRIGE DE L'EPREUVE DE MECANIQUE DES SYSTEMES ET DES MILIEUX DEFORMABLES

PARTIE 1.

CALCUL DU REGIME D'AFFOLEMENT D'UNE DISTRIBUTION DE MOTEUR.

1.1 REGIME D'AFFOLEMENT.

Q1.1 Le mouvement du système est connu et on cherche à déterminer des efforts. Il suffit d'appliquer les théorèmes généraux de la dynamique sur des systèmes bien choisis.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au solide 3, en projection sur x_0 , donne

$$(F_{4/3} + F_{2/3}) \cdot x_0 = m_s \ddot{h} \Rightarrow F_2 = F_0 + kh + \left(\frac{m_r}{3} + m_s \right) \ddot{h}$$

Le théorème du moment dynamique au point o en projection sur z_0 pour le solide 2 donne

$$(M_o(F_{3/2}) + M_o(F_{1/2})) \cdot z_0 = \delta_o(2/0) \cdot z_0 \Rightarrow F_2 L \cos\theta - F_1 D(\alpha) = J\ddot{\theta}$$

Les paramètres h et θ sont liés par la relation exacte : $h = DC \cdot x_0 = (DO + OC) \cdot x_0 = Ly_2 \cdot x_0 = -L \sin\theta$.

L'angle θ étant supposé petit, on a alors $\ddot{\theta} = -\frac{\ddot{h}}{L}$. Enfin, les dérivées par rapport au temps de h valent

$$\dot{h} = \frac{d}{dt} h(\alpha(t)) = \frac{dh}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dh}{d\alpha} \omega \quad \text{et} \quad \ddot{h} = \frac{d^2 h}{d\alpha^2} \omega^2. \quad \text{On obtient finalement :}$$

$$F_1 = \frac{L}{D(\alpha)} \left(F_0 + kh + \left(\frac{m_r}{3} + m_s + \frac{J}{L^2} \right) \omega^2 \frac{d^2 h}{d\alpha^2} \right) \quad F_2 = F_0 + kh + \left(\frac{m_r}{3} + m_s \right) \omega^2 \frac{d^2 h}{d\alpha^2}$$

Q 1.2 On s'intéresse aux zéros des deux expressions précédentes. On commence par remarquer que, les distances L et $D(\alpha)$ étant strictement positives, F_1 et $\left(F_0 + kh + \left(\frac{m_r}{3} + m_s + \frac{J}{L^2} \right) \omega^2 \frac{d^2 h}{d\alpha^2} \right)$ ont les mêmes

zéros. Les quantités $F_0, k, h, m_r, m_s, J, L$, étant positives, F_1 et F_2 ne peuvent s'annuler que si $\frac{d^2 h}{d\alpha^2}$ est négatif.

C'est le cas uniquement sur le domaine $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$ où d'ailleurs $\frac{d^2 h}{d\alpha^2}$ est constant. Le coefficient en

regard du terme $\frac{d^2 h}{d\alpha^2}$ est plus important pour F_1 que pour F_2 , ainsi lorsque ω augmente, F_1 s'annule avant F_2 .

Le premier décollement se produit donc en A.

Q 1.3 On étudie les zéros de l'expression $\left(\begin{array}{l} F_0 + \underbrace{kh(\alpha)}_{>0, \min i \text{ pour } \alpha = \pm \pi/4} + \underbrace{\left(\frac{m_r}{3} + m_s + \frac{J}{L^2} \right) \frac{d^2 h}{d\alpha^2}}_{<0, \text{indépendant de } \alpha} \omega^2 \end{array} \right)$ sur

l'intervalle $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$. Pour ω donné, le minimum est atteint lorsque $h(\alpha)$ est minimum, soit pour $\alpha = +\frac{\pi}{4}$ et $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ qui sont les valeurs de décollement.

Q 1.4 On a $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{h_{\max}}{4}$, d'où $\omega_{\text{off}} = \sqrt{\frac{F_0 + k \frac{h_{\max}}{4}}{\left(\frac{m_r}{3} + m_s + \frac{J}{L^2}\right) \frac{24h_{\max}}{\pi^2}}}$.

1.2 INFLUENCE DU FROTTEMENT.

Q 1.5 La vitesse de glissement de (2) sur (3) vaut

$$\mathbf{V}_{B \in 2/3} = \mathbf{V}_{B \in 2/0} - \mathbf{V}_{B \in 3/0} = \underbrace{\mathbf{V}_{0 \in 2/0}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{BO}}_{-Ly_2 - r\mathbf{x}_0} \wedge (\dot{\theta} \mathbf{z}_0) - \dot{h} \mathbf{x}_0 = \underbrace{(-L\dot{\theta} \cos \theta - \dot{h})}_{\frac{d}{dt}(-L \sin \theta - h) = 0} \mathbf{x}_0 + \underbrace{(-L\dot{\theta} \sin \theta + r\dot{\theta})}_{(h+r)\dot{\theta}} \mathbf{y}_0$$

En définitive $\mathbf{V}_{B \in 2/3} = V_g \mathbf{y}_0$ avec $V_g = -\left(\frac{h+r}{L}\right) \frac{dh}{d\alpha} \omega$.

Remarque : Le point géométrique de contact B défini par $\mathbf{OB} = Ly_2 + r\mathbf{x}_0$ est mobile par rapport au solide (2). La dérivée temporelle de \mathbf{OB} dans le repère 0 n'est pas égale à la vitesse $\mathbf{V}_{B \in 2/0}$.

Q 1.6 Le théorème de la résultante dynamique en projection sur \mathbf{x}_0 pour le solide 3 donne cette fois,

$$F_{2N} = F_0 + kh + \left(\frac{m_r}{3} + m_s\right) \ddot{h}$$

et le théorème du moment dynamique en 0 en projection sur \mathbf{z}_0 pour le solide 2,

$$\mathbf{M}_0(\mathbf{F}_{2T}) \cdot \mathbf{z}_0 = (\mathbf{OB} \wedge (-F_{2T} \mathbf{y}_0)) \cdot \mathbf{z}_0 = -F_{2T} \mathbf{x}_0 \cdot (\mathbf{OC} + r\mathbf{x}_0) = -F_{2T}(h+r).$$

$$\text{d'où } L F_{2N} - (h+r) F_{2T} - F_1 D(\alpha) = J \ddot{\theta}$$

Q 1.7 Dans le cas du glissement, la loi de Coulomb s'écrit : $|\mathbf{F}_{2T}| = f F_{2N}$ et

$$\bar{\mathbf{V}}_{B \in 2/3} \cdot \bar{\mathbf{F}}_{3/2} < 0 \Rightarrow \frac{dh}{d\alpha} F_{2T} < 0$$

A l'ouverture, $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{3}, 0 \right[$, $\frac{dh}{d\alpha} > 0 \Rightarrow F_{2T} < 0$, et à la fermeture, $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{3} \right[$, $\frac{dh}{d\alpha} < 0 \Rightarrow F_{2T} > 0$.

$$\text{Q 1.8 Avec le frottement, on a } F_1 = \frac{L}{D(\alpha)} \left(F_0 + kh + \left(\frac{m_r}{3} + m_s + \frac{I}{L^2} \right) \omega^2 \frac{d^2 h}{d\alpha^2} - \underbrace{\left(\frac{h+r}{L} \right) F_{2T}}_{\substack{> 0 \text{ à l'ouverture} \\ < 0 \text{ à la fermeture}}} \right)$$

A l'ouverture, le frottement réduit la tendance au décollement en $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

A la fermeture, le frottement aggrave la tendance au décollement en $\alpha = +\frac{\pi}{4}$.

Remarque : Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système 2+3 donne l'équation,

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_s \dot{h}^2 \right)}_I = \underbrace{F_1 \cdot V_{A \in 2/0}}_{II} + \underbrace{F_{4/3} \cdot (\dot{h} x_0)}_{III} + \underbrace{F_{2/3} \cdot V_{B \in 3/2}}_{IV} \underbrace{\left(\frac{h+r}{L} \right) \dot{h}}_{IV}$$

qui permet de retrouver exactement le résultat précédent. Cette équation permet de raisonner sur l'énergie :

- A l'ouverture, le terme II est positif (la came est motrice), III est négatif (le ressort absorbe de l'énergie) et le terme de dissipation IV est négatif. Pour compenser les pertes par frottement, le terme II est plus important que dans le cas sans frottement, ce qui entraîne une augmentation de F_1 , et donc réduit la tendance au décollement.

- A la fermeture, le terme III est positif (le ressort est moteur), II est négatif, et IV est toujours négatif. Autrement dit, l'énergie apportée au système par le ressort est en partie dissipée par frottement et la partie transmise à la came est moins importante que dans le cas parfait. La force F_1 est plus faible et la tendance au décollement accrue.

Q 1.9 Avec le terme supplémentaire du au frottement, le calcul exact du zéro de F_1 devient délicat. On peut obtenir une valeur approchée en remarquant que le décollement se produit lorsque $F_{2N} \left(1 - \frac{(h+r)f}{L} \right) + \frac{J}{L^2} \ddot{h}$

s'annule. On fait l'hypothèse que $1 - \left(\frac{h+r}{L} \right) f$ est faiblement variable au voisinage de $\alpha = \pi/4$ et on fixe sa

valeur à $1 - \left(\frac{h_{\max}/4 + r}{L} \right) f = \delta$. La nouvelle valeur d'affolement vaut alors

$$\omega_{\text{eff}}^{\text{frot}} = \sqrt{\frac{F_0 + k \frac{h_{\max}}{4}}{\left(\frac{m_r}{3} + m_s + \frac{J}{\delta L^2} \right) \frac{24 h_{\max}}{\pi^2}}}$$

Tout se passe comme si le moment d'inertie J du linguet était augmenté dans un rapport $1/\delta$.

PARTIE 2.

VIBRATIONS : RESONANCES DES RESSORTS DE SOUPAPE

2.1 LE MODELE DISCRET.

☞ Q 2.1 Il y a plusieurs façons d'obtenir le résultat demandé selon que l'on applique le théorème de la résultante dynamique, le principe des puissances virtuelles ou les équations de Lagrange et selon le choix du système isolé.

Le plus simple est probablement d'appliquer le théorème de la résultante à chacune des masses m_1 à m_4 séparément, pour obtenir directement

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ku_3(t) \end{bmatrix}$$

On notera que les matrices de masse et de raideur sont symétriques.

☞ Q 2.2. Les modes propres sont les solutions non nulles du système $[K - \omega^2 M][\Phi] = [0]$. En considérant la forme modale proposée dans l'énoncé, on obtient deux fois le système de 2 équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Parmi les deux solutions propres de ce système, celle qui possède la plus petite pulsation propre est

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}} = 5 \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \frac{K}{M}} \quad \text{et} \quad [\Phi_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ (1 + \sqrt{5})/2 \\ (1 + \sqrt{5})/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

☞ Q2.3. Application numérique : avec $M = 0,037 \text{ kg}$ et $K = 20\,000 \text{ Nm}^{-1}$, on a

$$\omega_1 = 2271 \text{ rad/s} \quad ; \quad f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 361 \text{ Hz} \quad ; \quad [\Phi_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,618 \\ 1,618 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Q2.4. Le système modal s'obtient en cherchant le déplacement comme une combinaison linéaire des modes et en projetant les équations sur les modes. En introduisant la masse modale $m_1 = [\Phi_1]^T [M] [\Phi_1] = m(5 + \sqrt{5})$, la raideur modale $k_1 = [\Phi_1]^T [K] [\Phi_1] = \omega_1^2 m_1$ et la force généralisée $f_1 = [\Phi_1]^T [F] = k u_s$, la première équation modale s'écrit

$$m_1 \ddot{q}_1 + k_1 q_1 = f_1 \quad \text{soit} \quad \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \frac{k u_s}{(5 + \sqrt{5})m}$$

Q2.5. Il y a résonance sur le mode 1 lorsqu'un des harmoniques de l'excitation coïncide avec la fréquence du mode 1, $\omega_1 = n\omega$. Il vient $\frac{60\omega_1}{2\pi \cdot 3000} < n < \frac{60\omega_1}{2\pi \cdot 500}$; soit $7,22 < n < 43,77$. Il y a 36 résonances possibles pour les harmoniques 8 à 43 de l'excitation.

Q2.6. On rajoute maintenant un amortissement visqueux. En se plaçant à la vitesse $\omega = \frac{\omega_1}{8}$ et en ne retenant que le huitième harmonique de l'excitation, l'équation modale devient

$$\ddot{q}_1 + 2\mu\omega_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \frac{k h_8}{(5 + \sqrt{5})m} \cos(\omega_1 t).$$

On cherche $q_1(t)$ sous la forme $q_1 = A \cos(\omega_1 t - \frac{\pi}{2})$; d'où $A = \frac{h_8}{2\mu(5 + \sqrt{5})} \frac{2}{3 - \sqrt{5}} = 6,3 \text{ mm}$

Le déplacement des masses 1 et 4 est de 6,3 mm, celui de 2 et 3 de 10,2 mm. Comparés à la longueur du ressort, ces déplacements sont inacceptables, d'où la nécessité d'introduire un amortissement supplémentaire.

2.2 LE MODELE CONTINU

Q2.7. En appliquant le principe fondamental à un tronçon de poutre isolé, ou le principe des puissances virtuelles, on obtient l'équation du mouvement $\frac{\partial N}{\partial x} = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ où N est l'effort normal.

La relation de comportement s'écrit $N = ES \frac{\partial u}{\partial x}$; d'où finalement $c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ avec $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Q2.8. Le mouvement établi recherché est solution du système,

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(0, t) &= 0 \\ u(L, t) &= d_0 + d \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

Compte tenu de la seconde condition aux limites, la solution n'est pas 'à variables séparées'. On peut s'y ramener formellement en utilisant le principe de superposition pour dissocier la condition aux limites. En pratique, il est plus simple de chercher directement la solution établie sous la forme

$$u(x, t) = \underbrace{\frac{d_0}{L} x}_{\text{précharge}} + \underbrace{v(x) \cos(\Omega t)}_{\text{solution harmonique}}$$

et on obtient finalement $u(x,t) = \frac{d_0}{L}x + d \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{c}x\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{c}L\right)} \cos(\Omega t)$ et pour la force de réaction

$$F = N(L) = ES \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=L} = ES \left(\frac{d_0}{L} + d \frac{\frac{\Omega}{c}}{\tan\left(\frac{\Omega}{c}L\right)} \cos(\Omega t) \right)$$

Q2.9. On a résonance lorsque $u(x,t)$ et F tendent vers l'infini, soit pour $\Omega = \Omega_k = \frac{k\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ (k entier).

Pour le système discret de la première partie, on avait $\omega_1 = 5 \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{K}{M}}$, où M et K représentent respectivement la masse et la raideur du ressort de soupape. En prenant $K = \frac{ES}{L}$ et $M = \rho SL$ (soit la raideur

et la masse du modèle continu), on obtient $\omega_1 = 5 \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$; soit $\omega_1 = \underbrace{3,09}_{\text{au lieu de } \pi} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

On constate donc que le modèle discret à quatre masses approche relativement bien la première fréquence propre du modèle continu.

Q2.10. Réécrivons la force F en introduisant la première pulsation propre $\Omega_1 = \frac{\pi}{L} c$.

$$F = ES \left(\frac{d_0}{L} + d \frac{\frac{\Omega}{\Omega_1} \pi}{\tan\left(\frac{\Omega}{\Omega_1} \pi\right)} \cos(\Omega t) \right)$$

On se place dans le cas où la fréquence de l'excitation serait petite devant la première fréquence propre $\frac{\Omega}{\Omega_1} \pi \ll 1$. En développant $\frac{x}{\text{tg}(x)}$ au premier ordre, on trouve le cas statique,

$F = \frac{ES}{L} (d_0 + d \cos(\Omega t))$. En développant au deuxième ordre, on retrouve la forme proposée dans la première partie :

$$F = \underbrace{ES \frac{d_0}{L}}_{F_0} + \underbrace{\frac{ES}{L} d \cos(\Omega t)}_{ku(t)} + \underbrace{\frac{\rho SL}{3} (-\Omega^2 \cos(\Omega t))}_{\frac{m}{3} \ddot{u}(t)}$$

PARTIE 3.

MILIEUX DEFORMABLES ET ELEMENTS FINIS

3.1 RESISTANCE DES MATERIAUX.

☞ Q3.1. Le problème est isostatique. Les actions aux appuis valent $\frac{F}{3}$ en $x = 0$ et $\frac{2F}{3}$ en $x = L$. L'effort tranchant et le moment de flexion sont égaux à,

$$\begin{aligned} \text{sur }]0, 2L/3[\quad T(x) &= -\frac{F}{3} \quad \text{et} \quad M(x) = \frac{F}{3}x \\ \text{sur }]2L/3, L[\quad T(x) &= \frac{2F}{3} \quad \text{et} \quad M(x) = \frac{2F}{3}(L-x) \end{aligned}$$

☞ Q3.2. L'énergie de déformation stockée dans la poutre vaut $W = \int_0^L \underbrace{\frac{M^2}{2EI}}_{\text{Flexion}} + \underbrace{\frac{T^2}{2GS}}_{\text{Cisaillement}} dx$. Après calcul, on a

$$W_{\text{flexion}} = \frac{2F^2L^3}{243EI} \quad \text{et} \quad W_{\text{cisaillement}} = \frac{F^2L}{9}$$

☞ Q3.3. La flèche u_a sous la charge s'obtient simplement à l'aide du Théorème de Castigliano :

$$u_a = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{4FL^3}{243EI} + \frac{2FL}{9GS}$$

☞ Q3.4. On a : $I = \frac{eh^3}{12} = 1032 \text{ mm}^4$; $S = eh = 153 \text{ mm}^2$; $k = 123 \text{ 700 Nmm}^{-1}$

3.2 ESTIMATION DE LA RAIDEUR DU LINGUET PAR UNE APPROCHE ELEMENTS FINIS.

Expression de l'énergie de déformation d'un tronçon de solide

☞ Q3.5. Avec le champ de déplacements donné, les composantes cartésiennes ε_{ij} du champ de déformations valent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = z \frac{d\theta}{dx} ; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 ; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0 ; \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0 ; \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} + \theta \right) \end{aligned}$$

puis en utilisant la loi de Hooke, on obtient les contraintes σ_{ij} :

$$\sigma_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} z\theta' ; \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_{11} ; \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0 ; \sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)} (w' + \theta)$$

Q3.6. Pour qu'un tel champ de contraintes vérifie les équations d'équilibre $\text{div}\sigma = 0$ et les conditions aux limites $\sigma \cdot n = 0$ sur les faces latérales, il faut $\theta' = 0$ et $w' + \theta = 0$. Cela veut dire que, hormis le cas trivial où le déplacement est un mouvement de corps rigide ($\theta' = 0$ et $w' + \theta = 0$), le champ de contrainte ne vérifie pas les équations d'équilibre.

Q3.7. A partir des définitions, $k = \frac{d\theta}{dx}$ et $\gamma = \frac{dw}{dx} + \theta$, on a $\varepsilon_{11} = zk$ et $\varepsilon_{13} = \gamma/2$.

L'intégrale peut se décomposer en $\iiint_{\text{volume}} () dV = \int_0^L \iint_{\text{Section}} () ds dx$, et en sortant les termes constants sur les sections, on obtient : $W_{\text{def}} = \int_0^L \frac{EI}{2} k^2 + \frac{GS}{2} \gamma^2 dx$

Discrétisation, définition de l'élément.

Q3.8. Sur l'élément, les déformations généralisées s'écrivent :

$$k = \theta' = N_1' \theta_1 + N_2' \theta_2 = -\frac{1}{l} \theta_1 + \frac{1}{l} \theta_2$$

$$\gamma = w' + \theta = N_1' w_1 + N_2' w_2 + N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 = -\frac{1}{l} w_1 + \frac{1}{l} w_2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right) \theta_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l}\right) \theta_2$$

d'où finalement

$$W_{\text{def}}^e = \frac{EI}{2l} (\theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\theta_1 \theta_2) + \frac{GS}{2l} (w_1^2 + w_2^2 - 2w_1 w_2) + \frac{GS l}{6} (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_1 \theta_2) + \frac{GS}{2} (-\theta_1 w_1 + \theta_1 w_2 - \theta_2 w_1 + \theta_2 w_2)$$

Q3.9. L'énergie de déformation est une forme quadratique qui s'écrit $W_{\text{def}}^e = \frac{1}{2} \cdot [q_e]^T \cdot [K_e] \cdot [q_e]$,

où $[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{GS}{l} & & & \\ & \frac{GS l}{3} + \frac{EI}{l} & & \\ & & \frac{GS}{2} & \\ & & & \frac{GS l}{6} + \frac{EI}{l} \end{bmatrix}$ est une matrice symétrique.

Modélisation du linguet : Assemblage et résolution.

Q3.10. L'énergie de déformation des trois éléments vaut $W_{\text{def}} = \sum_{i=1}^3 W_{\text{def}}^{e_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} [q_{e_i}]^t [K_{e_i}] [q_{e_i}]$ où les $[q_{e_i}]$ sont les vecteurs des degrés de liberté élémentaires. En introduisant le vecteur $[\bar{q}] = [w_1 \theta_1 \quad w_2 \theta_2 \quad w_3 \theta_3 \quad w_4 \theta_4]^T$ de tous les degrés de liberté du modèle à trois éléments, on obtient :

$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} [\bar{q}]^T [\bar{K}] [\bar{q}] \text{ avec } [\bar{K}] = \begin{bmatrix} K_{e1}^{11} & K_{e1}^{12} & 0 & 0 \\ K_{e1}^{12} & K_{e1}^{22} + K_{e2}^{11} & K_{e2}^{12} & 0 \\ 0 & K_{e2}^{12} & K_{e2}^{22} + K_{e3}^{11} & K_{e3}^{12} \\ 0 & 0 & K_{e3}^{12} & K_{e3}^{22} \end{bmatrix}$$

(opération d'assemblage des matrices élémentaires).

On se restreint maintenant à des champs de déplacements cinématiquement admissibles en prenant w_1 et w_4 égaux à zéro. L'énergie de déformation s'écrit alors $W_{\text{def}} = \frac{1}{2} [q]^T [K] [q]$, où $[q] = [\theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad w_3 \quad \theta_3 \quad \theta_4]$ est le vecteur des degrés de liberté actifs du modèle et $[K]$ la matrice de raideur, obtenue en supprimant de $[\bar{K}]$ les lignes et les colonnes relatives à w_1 et w_4 .

Q3.11. Le travail de la force extérieure appliquée au nœud 3 vaut simplement $W_{\text{ext}} = (-F)w_3$. L'énergie potentielle du système s'écrit $P(q) = \underbrace{W_{\text{def}}}_{\text{Energie de déformation}} - \underbrace{W_{\text{ext}}}_{\text{Travail des forces appliquées}} = \frac{1}{2} [q]^T [K] [q] - [q]^T [F]$.

La minimisation de l'énergie potentielle sur les champs de déplacements admissibles conduit au système linéaire,

$$[K][q] = [F], \text{ soit } \begin{bmatrix} * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La raideur cherchée est le rapport w_3/F .

PARTIE 4.

ETUDE DE L'ÉCHANGE THERMIQUE ENTRE LE BLOC MOTEUR ET LE LIQUIDE DE REFROIDISSEMENT.

4.1. DETERMINATION DU PROFIL DES VITESSES DE L'ÉCOULEMENT LAMINAIRE.

On cherche, dans cette partie à déterminer le profil des vitesses entre deux plaques parallèles.

Le système d'équations.

☞ Q4.1. Pour un fluide visqueux incompressible l'équation de continuité se réduit à

$$\operatorname{div}(\mathbf{V}) = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0$$

et l'équation de quantité de mouvement (équation de Navier et Stokes) à

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

où μ désigne la viscosité dynamique du fluide et f une force massique agissant à distance.

☞ Q4.2. A ces équations, il y a lieu de rajouter les conditions aux limites qui traduisent l'adhérence à la paroi : la vitesse du fluide à la paroi est égale à la vitesse de la paroi, ici nulle.

$$\mathbf{V}(x, y = \pm a, z) = \mathbf{0}$$

Système d'équations simplifiées.

Pour obtenir la solution laminaire établie, on fait les hypothèses suivantes :

H1 : L'écoulement est stationnaire, unidirectionnel et indépendant de la coordonnée z ;

H2 : Les forces de pesanteur sont négligées.

☞ Q4.3. Par suite, le vecteur vitesse se réduit à une composante suivant x qui ne dépend que de x et y , de même pour la pression.

$$\mathbf{V}(x, y, z, t) = V_x(x, y) \cdot \mathbf{e}_x$$

$$p(x, y, z, t) = p(x, y)$$

☞ Q4.4. Les équations se simplifient alors, et on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow V_x(x, y) = V_x(y)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow p(x, y) = p(x)$$

et pour les conditions d'adhérence

$$V_x(\pm a) = 0$$

Résolution.

☞ Q4.5. L'équation de continuité montre que la composante de vitesse ne dépend que de la coordonnée y ($V_x(x,y)=V_x(y)$). Les équations de quantité de mouvement selon les directions y et z montrent que la pression ne dépend que de x ($p(x,y)=p(x)$). Par suite en reportant dans l'équation de quantité de mouvement selon x , on obtient l'équation suivante dont les deux membres dépendent respectivement de x et de y . Ils sont donc égaux à une constante que l'on note $K \mu$.

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x) = \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}(y) = K \mu$$

L'intégration de ces deux équations différentielles ordinaires fournit une dépendance linéaire de la pression en fonction de x , et un profil de vitesse parabolique en y qui s'écrivent en tenant compte de conditions d'adhérence de la manière suivante :

$$p(x) - p(x_1) = K\mu(x - x_1)$$

$$V_x = \frac{K}{2}(y^2 - a^2)$$

En introduisant la vitesse de débit V_m on peut exprimer la constante K .

$$V_m = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a V_x(y) dy = -\frac{a^2}{3} K$$

Soit en reportant dans les expressions de p et V_x on obtient les expressions proposées :

$$V_x = A \cdot V_m \cdot \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \quad \text{et} \quad p(x) - p(x_1) = -B \cdot \frac{V_m \mu}{a^2} \cdot (x - x_1) \quad \text{avec} \quad A = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad B = 3$$

4.2. COEFFICIENT D'ÉCHANGE ET TEMPERATURE MOYENNE.

On s'intéresse maintenant à la quantité de chaleur fournie par les parois au fluide. Cette quantité de chaleur est l'intégrale sur les parois de l'apport de chaleur local q_0'' par unité de surface fourni par la paroi au fluide qui est une fonction de l'abscisse x , $q_0''(x)$.

☞ Q4.6. La loi de Fourier précise la relation linéaire entre le vecteur flux de chaleur convectif et le gradient de température

$$\mathbf{q} = -k \cdot \text{grad}(T)$$

En la reportant dans la définition de q_0'' , on obtient une expression de q_0'' en fonction du gradient de la température normale à la paroi

$$q_0'' = -\frac{1}{S} \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{S} \int k \text{grad}(T) \cdot \mathbf{n} dS = k \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\text{paroi}}$$

Soit pour les deux parois $y=\pm a$:

$$\text{en } y = a \quad q_0'' = k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_a$$

$$\text{en } y = -a \quad q_0'' = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{-a}$$

☞ Q4.7. On cherche maintenant une autre relation entre $q_0''(x)$ et le champ de température. Pour cela on écrit le bilan intégral d'énergie interne pour un domaine fixe D compris entre deux sections x et $x+dx$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D \rho u dv + \int_{\partial D} \rho u \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv + \int_{\partial D} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS$$

Le premier terme du premier membre représente la variation d'énergie interne du fluide contenu dans le domaine. Compte tenu de l'hypothèse de stationnarité il est nul.

Le second terme représente le flux d'énergie interne sortant du domaine à travers sa frontière. Compte tenu de l'étanchéité des parois latérales et en introduisant l'équation d'état $u=cT+cte$, il s'écrit de la façon suivante

$$\int_{S_{x+dx}} \rho c T V_x dS - \int_{S_x} \rho c T V_x dS$$

Il est alors naturel d'introduire la notion de température moyenne définie par

$$\rho c T_m V_m S = \int_S \rho c T V_x dS \quad \text{soit} \quad T_m = \frac{1}{V_m S} \int_S T V_x dS$$

Par suite ce second terme s'écrit : $\rho c V_m S (T_m(x+dx) - T_m(x))$ avec $S=2a L$ où L représentent la dimension du domaine dans la direction z .

Le premier terme du second membre représente la puissance des efforts de déformation. Compte tenu de l'incompressibilité du fluide, il se réduit à la dissipation visqueuse, dissipation que l'on néglige.

Le dernier terme représente les apports de chaleur par les frontières. En négligeant les transferts par diffusion longitudinale devant les apports par les parois, il s'écrit

$$\int_{S_{latérale}} q_0'' dS = 2 q_0'' dx L$$

soit finalement en reportant dans l'équation de bilan

$$q_0'' = D \cdot V_m \cdot \frac{dT_m}{dx} \quad \text{avec} \quad D = a \rho c$$

☞ Q4.7.a. $T_m = \frac{1}{V_m S} \int_S T V_x dS.$

☞ Q4.7.b. $q_0'' = D \cdot V_m \cdot \frac{dT_m}{dx} \quad \text{avec} \quad D = a \rho c$

☞ Q4.8. En rapprochant l'expression obtenue en 4.6 et la définition de h on obtient

$$q_0'' = h(T_0 - T_m) = k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_a \Rightarrow \frac{h}{k} = \frac{\partial T / \partial y \Big|_a}{T_0 - T_m}$$

Le gradient de température à la paroi s'obtient à partir de la forme du profil des températures

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_a = (T_m - T_0) \frac{f'(1)}{a}$$

Par suite on a

$$\frac{h}{k} = - \frac{f'(1)}{a}$$

ce qui montre que le coefficient h est indépendant de la position x .

☞ Q4.9. En reportant l'expression de q_0'' en fonction de h dans le bilan d'énergie, on obtient une équation différentielle ordinaire du premier ordre à coefficients constants qui gère l'évolution de la température moyenne en fonction de x .

$$a \rho c V_m \frac{dT_m}{dx} = -h(T_m - T_0)$$

Cette équation s'intègre immédiatement et on obtient en introduisant le nombre de Nusselt : $Nu = \frac{h \cdot 4a}{k}$

$$T_m - T_0 = (T_{m1} - T_0) \cdot \exp\left(-\frac{Nu k}{(2a)^2 \rho c V_m} (x - x_1)\right)$$

☞ Q4.10. On en déduit enfin la quantité de chaleur Q fournie par la paroi au fluide.

$$Q = \int_{x_1}^x 2q_0'' L dx = 2L \int_{x_1}^x -h(T_m - T_0) dx$$

soit après intégration

$$Q = 2Lh \frac{(2a)^2 V_m \rho c}{Nu \cdot k} (T_{ml} - T_0) \left[\exp\left(-\frac{Nuk}{(2a)^2 V_m \rho c}\right) - 1 \right]$$

Cette dernière expression permet d'estimer le débit à imposer dans le circuit de refroidissement en fonction de la quantité de chaleur à évacuer, des paramètres géométriques et de la température moyenne du liquide de refroidissement. Il reste néanmoins à déterminer la valeur du coefficient de convection h (ou du nombre de Nusselt) qui dépend du profil de température dans la section et par suite du profil des vitesses.

4.3. EQUATIONS QUI GERENT L'EVOLUTION DU CHAMP DE TEMPERATURE.

Equation de la chaleur.

☞ Q4.11. L'équation locale d'énergie interne pour un fluide visqueux incompressible s'écrit

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + V_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - p \frac{\partial V_j}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad \text{avec} \quad \tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{et} \quad q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

Cette équation exprime les apports d'énergie interne dus respectivement aux effets de compressibilité (énergie de déformation), aux dégradations d'énergie par effets visqueux et aux apports de chaleur par conduction.

☞ Q4.12. On fait les mêmes hypothèses que pour le champ des vitesses : Hypothèse de stationnarité et d'homogénéité dans la direction z . La température et l'énergie interne ne dépendent alors que des variables d'espace x et y .

$$T(x, y, z, t) = T(x, y) \quad \text{et} \quad u(x, y, z, t) = u(x, y)$$

Le vecteur flux de chaleur et le tenseur des effets visqueux se simplifient de la manière suivante

$$\mathbf{q} = -k \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, 0 \right)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tau_{xy} = \mu \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

Et compte tenu de l'équation d'état qui exprime u en fonction de T , l'équation d'énergie interne se réduit à :

$$\rho c V_x \frac{\partial T}{\partial x} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)^2$$

C'est l'équation de la chaleur associée à ce problème. C'est une équation aux dérivées partielles qui reste trop compliquée pour être résolue directement.

Simplification de l'équation de la chaleur.

On se propose par une analyse d'ordre de grandeur de ne garder que les termes les plus significatifs. Pour cela, on introduit :

- comme échelles de vitesse et de variation de vitesse, la vitesse de débit $O(V_x) = O(\Delta_y V_x) = V_m$;
- comme échelles de longueur, une échelle longitudinale caractéristique de la longueur du conduit $O(\Delta x) = l$ et une échelle transversale caractéristique de la hauteur du conduit $O(\Delta y) = a$;
- comme échelles de température, une échelle de variation longitudinale $O(\Delta_x T)$ et une échelle de variation transversale $O(\Delta_y T)$.

☞ Q4.13. Les deux échelles de température ne sont pas indépendantes. En effet les variations longitudinale et transversale de la température sont liées par la relation :

$$q_0'' = k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_a = \rho c a V_m \frac{dT_m}{dx}$$

Cette dépendance se traduit par une relation entre les échelles de variations de la température :

$$\frac{\Delta_x T}{\Delta_y T} = \frac{kl}{\rho c a^2 V_m}$$

Q4.14. On peut maintenant expliciter l'ordre de grandeur de chacun des termes de l'équation de la chaleur en fonction des échelles V_m , l , a et $O(\Delta_y T)$. Soient

$$O\left(\rho c V_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) = \rho c V_m \frac{\Delta_x T}{l} = \frac{\Delta_y T \cdot k}{a^2}$$

$$O\left(k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = k \frac{\Delta_x T}{l^2} = \frac{\Delta_y T \cdot k^2}{\rho c a^2 V_m l}$$

$$O\left(k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = k \frac{\Delta_y T}{a^2}$$

$$O\left(2\mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2\right) = \mu \frac{V_m^2}{a^2}$$

Q4.15. Si on compare le terme de diffusion transversale, $\left(k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$, au terme de diffusion longitudinale, $\left(k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)$, en effectuant leur rapport, il apparaît un nombre sans dimension : le nombre de Peclet.

$$\frac{O\left(k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)}{O\left(k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)} = \frac{V_m l}{k/\rho c} = Pe$$

Par suite si Pe est très supérieur à 1 on peut négliger le terme de diffusion longitudinale vis à vis du terme de diffusion transversale.

Dans notre cas le nombre de Peclet est de l'ordre de 10^6 de sorte que le terme de diffusion longitudinale est négligeable. Par ailleurs le terme visqueux est également négligeable, de sorte que l'équation de la chaleur se réduit à l'équation suivante :

$$\rho c V_x \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Il faut rajouter à cette équation la condition de paroi:

$$T(x, \pm a) = T_0$$

et la condition de symétrie:

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, y = 0) = 0$$

En considérant que T_0 est une constante, ce système d'équations peut se réécrire avantageusement avec des conditions aux limites homogènes.

$$V_x \frac{\partial T - T_0}{\partial x} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T - T_0}{\partial y^2}$$

$$T(x, \pm a) - T_0 = 0$$

$$\frac{\partial T - T_0}{\partial y}(x, y = 0) = 0$$

☞ Q4.16 Introduisons maintenant dans l'équation différentielle aux dérivées partielles la condition de profil des températures pleinement établi et le profil parabolique des vitesses obtenu précédemment. On obtient en séparant les termes fonctions de x des termes fonctions de y l'équation suivante :

$$\frac{dT_m}{dx} \frac{1}{T_m - T_0} \frac{a^2}{k/\rho c} \frac{3}{2} V_m = \frac{f''}{f(1 - (y^2/a^2))} = C^{te} \equiv \lambda$$

Ces deux termes dépendent de variables indépendantes, ils sont donc égaux à une constante que l'on note λ . On obtient ainsi deux équations différentielles ordinaires. La première gère l'évolution longitudinale de la température moyenne, c'est celle que l'on a trouvée dans la seconde partie. La seconde permet de déterminer la fonction de forme $f(y/a)$.

☞ Q4.17 En rapprochant les formulations de l'équation en T_m on obtient λ en fonction de Nu .

$$\lambda = -\frac{3}{8} Nu$$

Estimation du nombre de Nusselt.

La valeur du nombre de Nusselt qui comme nous l'avons vu, est liée à la fonction f , $Nu = -4f'(1)$, est alors obtenue par intégration de l'équation différentielle qui gère l'évolution de f . Cette équation,

$f' = f'(1) \cdot f \frac{3}{2} (1 - y^2/a^2)$, est une équation différentielle du second ordre non linéaire à coefficients non

constants. Son intégration n'est pas immédiate et peut être réalisée par la méthode itérative suivante : on se donne une forme de fonction f_0 pour f qui vérifie les différentes conditions aux limites et de normalisation de f , on l'introduit dans le second membre de l'équation différentielle, on intègre, on demande à la solution de vérifier à son tour les conditions aux limites et de normalisation de f , et on recommence la démarche.

Après une itération, la valeur du nombre de Nusselt obtenue est de 7,6. C'est déjà une très bonne approximation de la valeur finale qui est de 7,54.

Commentaires sur l'épreuve de Mécanique des systèmes et des milieux déformables.

Sur le thème du moteur thermique, l'épreuve était constituée de quatre parties qui faisaient référence à la dynamique des solides indéformables, aux vibrations des systèmes discrets et des systèmes continus, à la résistance des matériaux et aux éléments finis, à la mécanique des fluides et à la thermique. De façon générale, toutes les parties ont été abordées par les candidats. Mais la troisième partie a été la plus appréciée et la mieux traitée, environ 91 % des candidats l'ont abordée de façon significative. Enfin, nous devons souligner que la plupart des copies sont bien rédigées avec une bonne mise en évidence des résultats et des démarches. Rappelons que cette qualité est toujours très appréciée par les correcteurs.

La première partie concernait l'étude du régime d'affolement d'une distribution. Bien que simple, elle n'a été que très moyennement traitée. La détermination des efforts que l'on retrouvait à deux endroits dans l'énoncé, a été généralement bien faite. On peut néanmoins s'inquiéter qu'un nombre non négligeable de candidats oublient les termes d'inertie dans le principe fondamental de la dynamique. L'étude du décollement et du régime d'affolement a souvent été abordée rapidement et de façon succincte ce qui a généré des conclusions aberrantes. Les candidats qui l'ont abordée avec calme et rigueur ont bien réussi. Enfin, peu de candidats ont donné la vitesse de glissement demandée en 1.5. Le calcul n'était pourtant pas technique, et c'est encore le manque de rigueur qui est à incriminer ici.

Dans la seconde partie, on analysait le comportement vibratoire du ressort de soupape, à l'aide d'un modèle discret, puis d'un modèle continu. Ces deux approches étaient relativement indépendantes. La mise en équation du modèle discret pouvait être faite par les théorèmes généraux ou par la méthode de Lagrange. Les deux méthodes ont été appliquées par les candidats qui ont su en général bien prendre en compte le fait que le déplacement de la dernière masse était imposé. Parmi les copies, nous avons été surpris de voir certains candidats afficher des matrices de masse et de raideur non symétriques et poursuivre ainsi le problème. La recherche de la première valeur propre était simple et ne nécessitait aucun moyen informatique si on utilisait la forme modale proposée. Certains candidats l'ont résolue par des moyens de calcul formel ou numérique, traduisant ainsi un manque évident de recul vis à vis de l'approche modale d'un problème de vibration linéaire. En ce qui concerne la modélisation continue (simple poutre en traction compression), la majorité des candidats ayant abordé cette partie ont donné l'équation aux dérivées partielles demandée, mais seulement quelques-uns ont su trouver la solution demandée. En effet, les conditions aux limites ne permettaient pas une résolution par une simple séparation de variables, et nombre de candidats semblent penser que c'est une méthode générale de résolution.

La troisième partie comportait un exercice très classique de RdM, quelques questions relatives à l'élasticité linéaire, et la construction d'un élément fini de poutre avec cisaillement transverse. Dans l'ensemble, cette partie a été de loin la mieux traitée. On a pu constater avec satisfaction que le niveau moyen des candidats en éléments finis était plutôt bon. Les échecs sur cette partie ont pour la plupart été occasionnés par de simples erreurs de calculs ou une mauvaise organisation dans l'établissement des matrices. On note tout de même qu'un nombre non négligeable de candidats semblent ignorer totalement les méthodes énergétiques en RdM.

Dans la dernière partie, on cherchait à estimer le coefficient de convection forcée associé à un écoulement établi en conduite schématisé, par un écoulement entre deux plans.

Elle présentait deux étapes. La première, très classique, était consacrée au calcul du profil parabolique des vitesses. Elle a été relativement bien traitée par les candidats qui l'ont abordée. Néanmoins, on rencontre encore des candidats qui ne font pas le lien entre l'équation de la quantité de mouvement, l'équation de Navier-Stokes et l'équation d'Euler. En ce qui concerne l'approche thermique, elle n'a été abordée que par un nombre limité de candidats. Même la première question concernant la condition à la paroi qui n'est que la projection de la loi de Fourier sur la normale, n'a été traitée correctement que par quelques candidats. Par ailleurs, l'analyse des ordres de grandeur d'une équation physique en vue de la simplifier ne semble pas une démarche habituelle chez les candidats. Souvent, les équations restent des expressions mathématiques qui sont loin de traduire une réalité ou un comportement physique. Ainsi le traitement d'un problème reste trop souvent l'application d'un formulaire. On ne saurait que recommander aux candidats de prendre du recul vis à vis de l'expression mathématique des équations.

Quelques statistiques sur l'épreuve

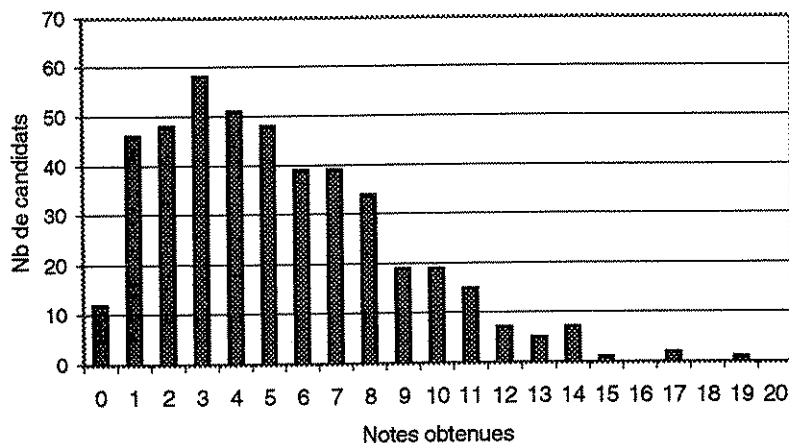
En moyenne, les candidats ont obtenu 28% de leur note sur la partie 1, 15% sur la partie 2, 41% sur la partie 3 et 16% sur la partie 4.

En ce qui concerne les moyennes obtenues pour les différentes parties, la moyenne a été de 27/100 pour la partie 1, de 18/100 pour la partie 2, de 40/100 pour la partie 3 et de 12/100 pour la partie 4.

Enfin, la partie 1 a été abordée de façon significative par 88 % des candidats, la partie 2 par 55%, la partie 3 par 91% et la partie 4 par 45 %.

Bruno COCHELIN
Gilles ROBERT

Moyenne : 5,55



Le graphe des notes obtenues ne prend pas en compte les demi-points. C'est ainsi que les 12 candidats qui ont obtenu une note inférieure à 1 sont comptabilisés dans la colonne "0".