

épreuve de mécanique des systèmes et des milieux déformables

Durée : 8 heures

Aucun document n'est autorisé.

Moyens de calculs autorisés : calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable et alphanumérique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

NOTES PRÉLIMINAIRES

Le dossier comprend 18 pages de texte et de figures. Les quatre parties sont indépendantes. Il est recommandé de consacrer respectivement 25 %, 20 %, 25 %, 30 % du temps total à chacune des parties.

THEME D'ETUDE

LE MOTEUR THERMIQUE.

Les entreprises de conception de moteurs thermiques sont confrontées à de nombreux problèmes de modélisation relatifs au dimensionnement des éléments du moteur. On se propose d'aborder quelques uns de ces problèmes associés d'une part à la distribution et d'autre part au circuit de refroidissement.

Le mécanisme de distribution qui assure l'ouverture et la fermeture des soupapes sera le support privilégié pour la partie mécanique des solides. La première partie de l'étude s'appuie sur un modèle où les solides sont indéformables. Elle est consacrée au calcul du régime de rotation maximal que peut supporter une distribution. Dans la deuxième partie, on s'intéresse aux phénomènes de vibrations qui se produisent dans les ressorts de soupapes à haut régime de rotation du moteur. Deux modélisations classiques de ressort sont successivement utilisées pour analyser les résonances. La troisième partie concerne l'évaluation de la déformation d'une des pièces de la distribution, dans un premier temps par un calcul de résistance des matériaux, puis par une méthode d'éléments finis. Enfin la quatrième partie qui traite de mécanique des fluides et de thermique, est relative à l'évacuation de la chaleur du moteur par un système classique de refroidissement à circulation d'eau.

Notation : Dans l'ensemble du problème, les vecteurs sont représentés par des caractères gras.

PARTIE 1.

CALCUL DU REGIME D'AFFOLEMENT D'UNE DISTRIBUTION DE MOTEUR.

La distribution est le mécanisme qui réalise l'ouverture et la fermeture des soupapes dans un moteur à explosion, assurant la communication des gaz frais et brûlés entre le cylindre et l'extérieur. La figure 1.1 présente une distribution dite "à linguet", où le mouvement de translation rectiligne alternatif de la soupape est obtenu à partir d'une came entraînée en rotation autour d'un axe fixe par rapport au bâti du moteur, et d'une pièce intermédiaire, le linguet, animé d'un mouvement de rotation oscillant. Dans la phase où la soupape est en mouvement, les contacts entre ces différents organes sont assurés par un ressort qui agit entre la soupape et le bâti moteur.

A haut régime de rotation du moteur, les effets d'inertie dus aux mouvements alternatifs des pièces sont suffisamment importants pour provoquer des décollements entre les organes de la distribution : on parle alors d'affolement des soupapes. Le but de ce problème est de calculer le régime d'affolement d'une distribution, et d'apprécier l'effet des phénomènes de frottement sur l'affolement des soupapes, pour en tirer les conclusions constructives utiles à la conception.

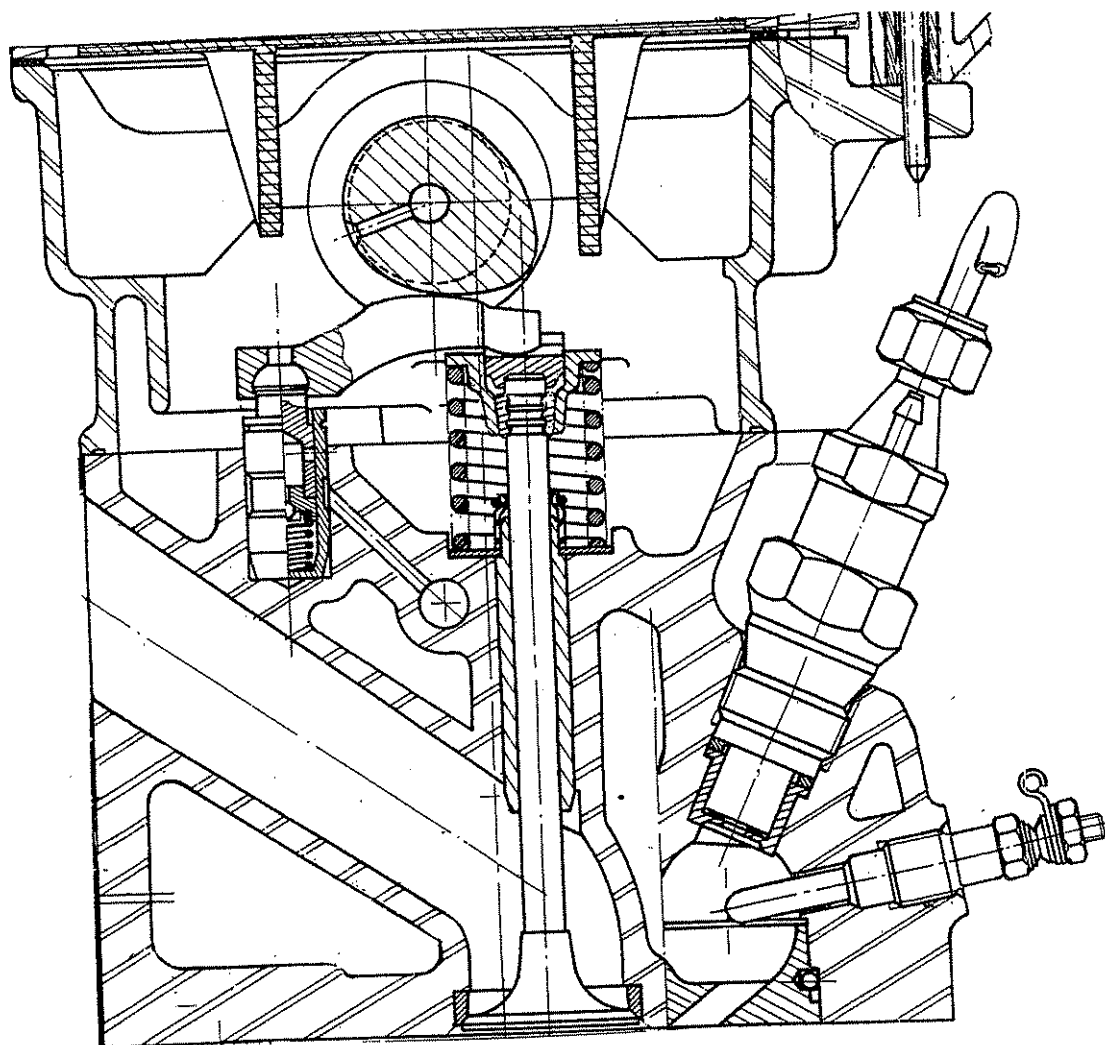
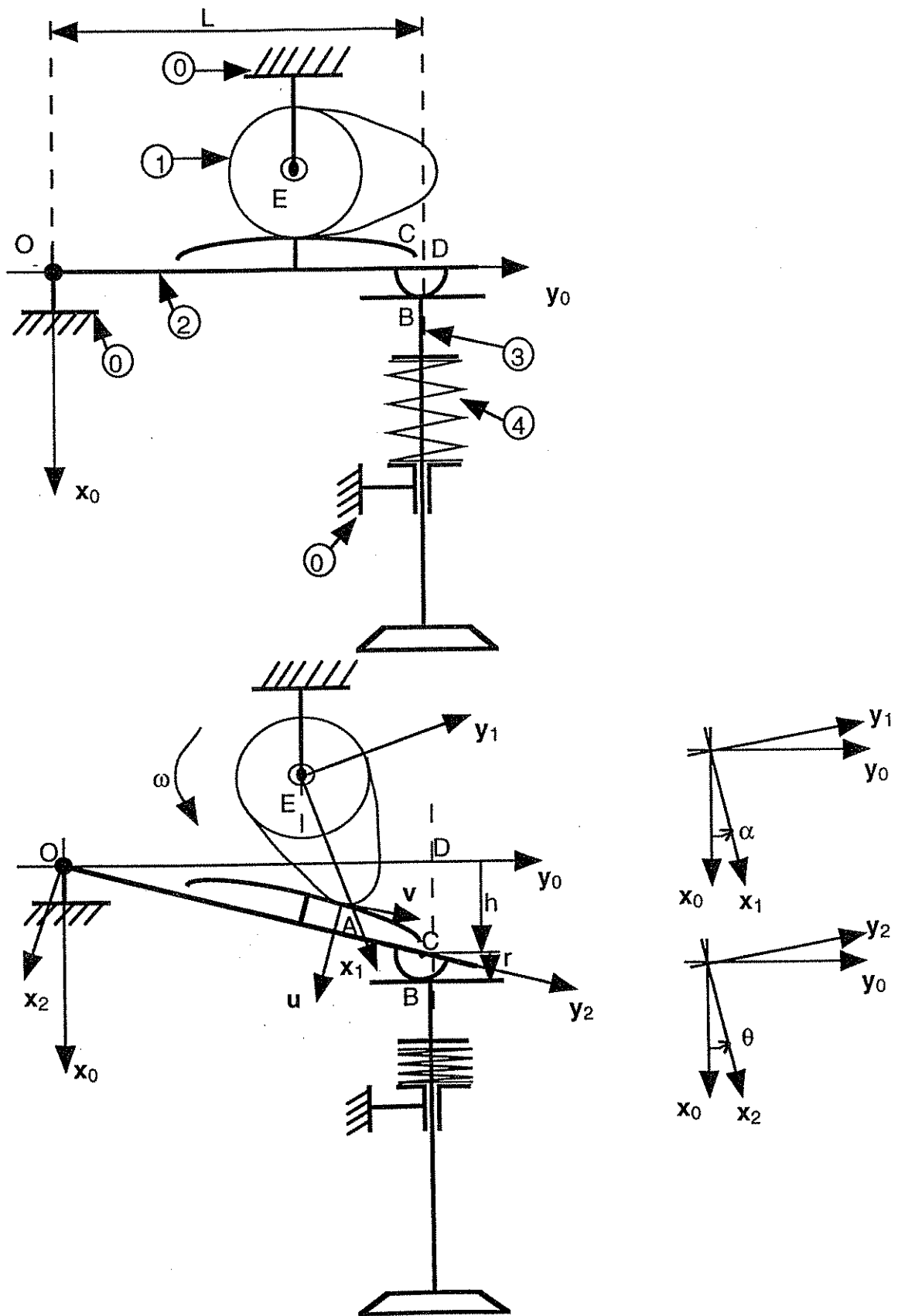


Figure 1.1 Distribution à linguet (Document PSA).



Figures 1.2. Modélisation de la distribution

MODELISATION ET PARAMETRAGE.

La modélisation de la distribution retenue est présentée sur les figures 1.2. C'est un mécanisme plan constitué de trois solides indéformables la came (1), le linguet (2), la soupape (3) et d'un solide déformable le ressort (4).

La came (1) est liée au bâti (0) par une liaison pivot parfaite d'axe (E, z_0) . Le repère lié à la came est (E, x_1, y_1, z_1) avec $z_1 = z_0$, $\alpha = (x_0, x_1)$, on suppose de plus que la vitesse de rotation $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ est constante par rapport au temps.

Le linguet (2) est lié au bâti (0) par une liaison pivot parfaite d'axe (O, z_0) . Le repère lié au linguet est (O, x_2, y_2, z_2) avec $z_2 = z_0$, $\theta = (x_0, x_2)$. On remarque que l'angle θ a une valeur toujours négative ou nulle. On note J le moment d'inertie de (2) par rapport à l'axe (O, z_0) . On suppose compte tenu de la levée de came, de la géométrie du mécanisme et pour simplifier l'étude que l'angle θ est petit.

La soupape (3) est supposée en liaison glissière parfaite d'axe (D, x_0) . La position de la soupape est repérée par la distance $h = \overline{DC} \cdot x_0$.

La liaison entre (1) et (2) est un contact ponctuel et parfait en A. Le repère mobile (A, u, v, z_0) est tel que l'axe (A, u) est normal aux surfaces en contact en A. En l'absence de frottement, l'action de (1) sur (2) est notée $F_{1/2} = F_1 u$.

La liaison entre (2) et (3) est un contact ponctuel et parfait en B. La ligne de contact de (2) est un cercle de rayon r et de centre C, celle de (3) une ligne parallèle à y_0 . En l'absence de frottement, l'action de (2) sur (3) est notée $F_{2/3} = F_2 x_0$.

On a : $\overline{OD} = L y_0$, $\overline{OC} = L y_2$ et $\overline{CB} = r x_0$ où L et r sont des constantes.

Le solide déformable (4) est un ressort qui agit entre (0) et (3). La masse de (4) n'étant pas négligeable devant celles des autres pièces, on adopte la loi de comportement suivante

$$F_{4/3} = -\left(F_0 + kh + \frac{m_r}{3} \ddot{h}\right) x_0 \text{ où } F_0 \text{ est la précharge du ressort } (F_0 > 0), k \text{ sa raideur et } m_r \text{ sa masse.}$$

$$\text{(Notation : } \ddot{h} = \frac{d^2 h}{dt^2} \text{)}$$

On se donne la loi d'ouverture de soupape $h(\alpha)$. Elle est constituée de trois paraboles dont les caractéristiques sont précisées sur la figure 1.3.

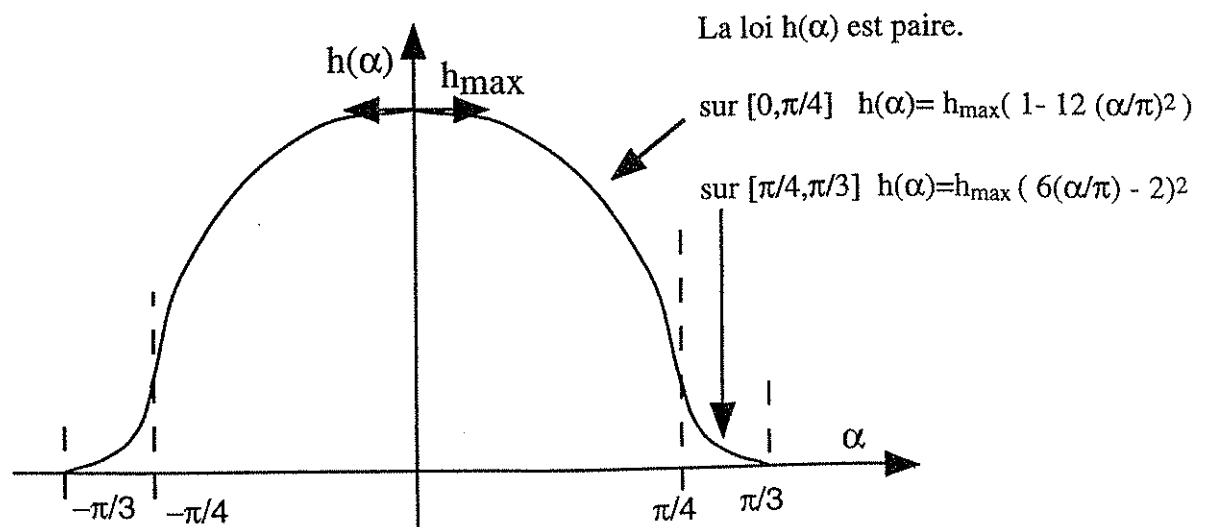


Figure 1.3. Loi de levée $h(\alpha)$ de la soupape.

Le mouvement des solides étant complètement défini par la loi $h(\alpha)$ et la vitesse angulaire ω , on se propose de calculer les efforts de contact en A et B pour ensuite analyser le décollement. On cherche à déterminer la plus petite valeur de ω pour laquelle le contact peut se rompre, sans chercher à décrire le mouvement après décollement.

NB. Dans tout le problème on négligera les forces de pesanteur.

1.1 REGIME D'AFFOLEMENT.

- ☞ Q1.1. Déterminer les expressions des efforts de contact F_1 et F_2 en fonction de F_0 , k , $h(\alpha)$, $\frac{d^2h}{d\alpha^2}$, ω , et des autres données de masse et de longueur.
Remarque : On introduira la distance variable $D(\alpha) = OA \cdot v$.
- ☞ Q1.2. En analysant les expressions de F_1 et F_2 , préciser si le décollement a lieu d'abord en A ou en B.
- ☞ Q1.3. Déterminer pour quelle valeur de α se produit le décollement.
- ☞ Q1.4. Calculer la vitesse d'affolement ω_{aff} en fonction de F_0 , k , h_{max} , et des autres données de masse et de longueur.

1.2 INFLUENCE DU FROTTEMENT.

On se propose de prendre en compte le frottement dans la liaison (2)-(3). On a cette fois $\mathbf{F}_{2/3} = F_{2N} \cdot \mathbf{x}_0 + F_{2T} \cdot \mathbf{y}_0$ et on adopte une loi de frottement de Coulomb avec un facteur de frottement noté f .

- ☞ Q1.5. Déterminer la vitesse de glissement de (2) sur (3) en fonction de h , $\frac{dh}{dt}$, ω , et des données de longueur.
- ☞ Q1.6. Etablir deux relations issues des théorèmes de la dynamique qui lient F_{2T} , F_{2N} et F_1 .
- ☞ Q1.7. Ecrire les lois de frottement de Coulomb en B. Préciser en particulier le signe de la composante de frottement suivant les différentes phases du mouvement.
- ☞ Q1.8. Pour chaque valeur de α et ω correspondant à un décollement dans le modèle parfait, indiquer si le frottement aggrave ou atténue la tendance au décollement.
- ☞ Q1.9. En faisant des hypothèses simplificatrices raisonnables, calculer la nouvelle valeur de ω_{aff} .

PARTIE 2.

VIBRATIONS : RESONANCES DES RESSORTS DE SOUPAPE

Pour simuler le fonctionnement d'une distribution à haut régime de rotation, on ne peut modéliser le ressort comme un simple solide élastique sans masse, ni même se contenter de la loi donnée dans la partie 1 : $F = F_0 + ku(L) + \frac{m}{3}\ddot{u}(L)$. Il convient d'utiliser des modèles dynamiques plus fins, capables de représenter les phénomènes de résonance qui peuvent naître au sein même du ressort, provoquant des déformations importantes et des chocs entre les spires.

On se propose d'étudier successivement deux modèles dynamiques de ressorts : un modèle discret et un modèle continu.

2.1 LE MODELE DISCRET.

Le ressort de soupape est modélisé (figure 2.1) par un ensemble de cinq points matériels de masse identique m et de cinq ressorts élémentaires. Les ressorts élémentaires sont supposés sans masse et ils présentent un comportement élastique linéaire de raideur k . Si M est la masse du ressort de soupape et K sa raideur en statique, on prend $m = M/5$ et $k = 5K$. La masse m_5 subit un déplacement imposé connu $u_5(t)$ de la part d'un élément extérieur (la distribution), et elle exerce en retour une force F sur cet élément.

- Q2.1. Etablir les équations du mouvement relatives aux masses m_1 à m_4 et les mettre sous forme matricielle standard

$$[M][\ddot{U}] + [K][U] = [F] \quad \text{avec} \quad [U] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

- Q2.2. En utilisant l'indication ci-après, déterminer la plus petite pulsation propre du système précédent et le mode propre correspondant. On normalisera le mode en prenant sa première composante égale à un.

Indication : Le premier mode propre est symétrique de la forme $[\Phi_1] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ b \\ a \end{bmatrix}$

- Q2.3. Application numérique : $M = 0,037$ kg, $K = 20\,000$ Nm⁻¹. Donner la valeur de la plus petite fréquence propre en Hz.
- Q2.4. Etablir l'équation modale relative au premier mode.

Le mouvement imposé à la masse m_5 est périodique de la forme $u_5(t) = h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \cos(n \cdot \omega \cdot t)$ où ω est la vitesse de rotation de la came de distribution et h_n l'amplitude de l'harmonique n de la loi de levée de la soupape.

Q2.5. Combien y a t il de résonances en mode 1 dans la plage de fonctionnement :

$$500 < \frac{60\omega}{2\pi} < 3000 \text{ (tr mn}^{-1}\text{)}$$

On s'intéresse à la résonance provoquée par le huitième harmonique de $u_5(t)$. La dissipation liée au matériau et au frottement dans l'air du ressort est modélisée par un amortissement visqueux linéaire qui dans la base modale se traduit par un coefficient d'amortissement $\mu = 0,002$. On donne $h_8 = 0,07$ mm.

Q2.6. Déterminer les amplitudes de déplacement des masses à la résonance et comparer avec la longueur du ressort qui est de 25 mm. Conclure quant à la nécessité d'introduire de l'amortissement supplémentaire dans le système.

En pratique, on peut introduire cet amortissement en réduisant fortement le pas d'enroulement des spires du ressort à une extrémité de façon à produire des contacts dissipateurs d'énergie entre ces spires.

2.2 LE MODELE CONTINU

Les modèles discrets ne donnent satisfaction que si le nombre de masses et de ressorts est grand. Une modélisation plus fine consiste à assimiler le ressort à un barreau élastique homogène (figure 2.2). On peut en effet montrer par un calcul de résistance des matériaux que les équations du mouvement des spires sont analogues à celles d'une barre en compression.

Soit une barre cylindrique de longueur L et de section constante S , constituée d'un matériau homogène isotrope de module d'Young E .

Q2.7. Etablir l'équation du mouvement relative au déplacement axial $u(x,t)$ des sections droites de la barre.

La barre est en appui en $x = 0$. Elle reçoit un déplacement imposé en $x = L$ que l'on prend ici sous la forme simplifiée ci-après, forme qui ne tient compte que d'un harmonique, $u(L, t) = d_0 + d \cos(\Omega t)$

Q2.8. Déterminer le mouvement établi $u(x,t)$ après annulation de la partie transitoire et calculer la réaction $F(t)$ en $x = L$.

Q2.9. Quelles sont les fréquences de résonance de ce système, et comparer la première avec celle du modèle discret précédant.

Q2.10. En précisant les hypothèses nécessaires, retrouver l'expression simplifiée de la loi utilisée dans la première partie du problème.

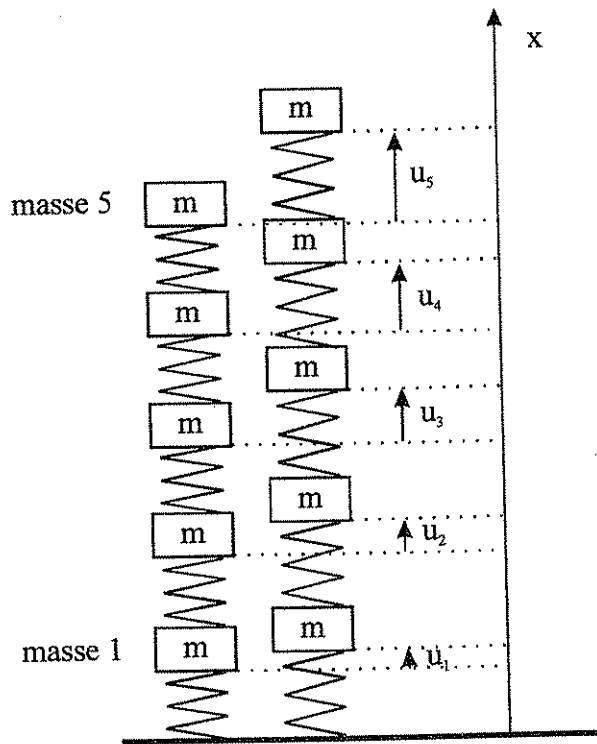


Figure 2.1. Le modèle discret

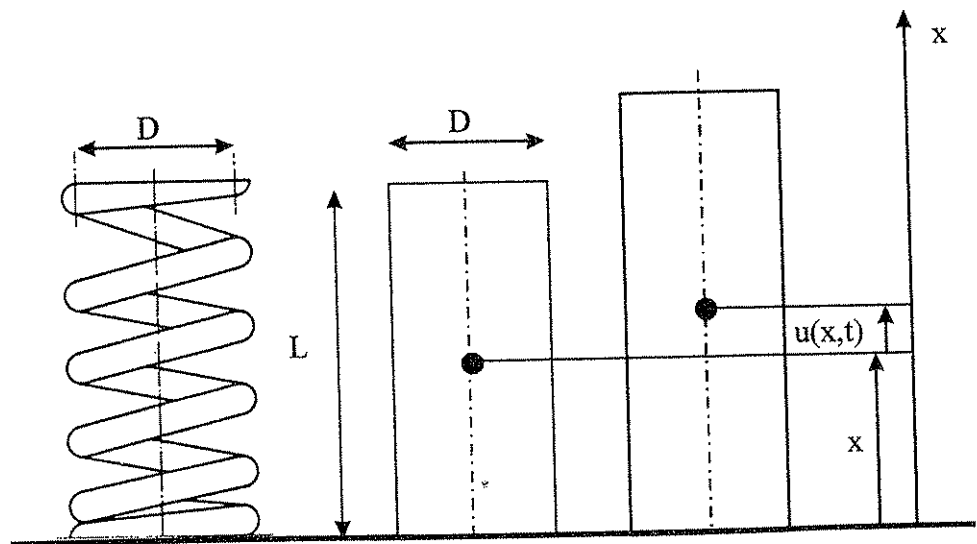


Figure 2.2. Analogie ressort - barre de compression

PARTIE 3.

MILIEUX DEFORMABLES ET ELEMENTS FINIS

En pratique, le linguet subit des déformations de flexion qu'il est nécessaire de quantifier. Il doit être suffisamment rigide pour s'apparenter à un solide indéformable et assurer un bon fonctionnement, mais tout excès de rigidité doit être évité car cela sous-entend une masse importante qui n'est pas sans conséquences sur le régime d'affolement des soupapes.

Dans un premier temps, on se propose d'estimer la raideur en flexion d'un linguet par un calcul de résistance des matériaux *en statique* (la raideur du linguet étant très grande, il n'y a pas de risque de résonance comme pour le ressort de soupape et les effets d'inertie peuvent être négligés). Toutefois, le linguet ne vérifie les hypothèses de la RdM que de façon très grossière, par suite ce calcul ne fournit qu'un ordre de grandeur de la raideur.

De nos jours, la raideur des linguets est calculée par des méthodes d'éléments finis 3D qui permettent d'accéder à la déformée et aussi à la répartition précise des contraintes dans la matière. Ce genre de calcul est malheureusement hors de portée 'à la main' et ne peut constituer la suite de ce problème. Néanmoins, on va se donner un objectif analogue mais plus modeste qui est d'approcher la raideur avec une méthode d'éléments finis 1D.

3.1 RESISTANCE DES MATERIAUX.

Le linguet est modélisé par une poutre rectiligne de section rectangulaire reposant sur un appui simple à chaque extrémité et recevant une charge concentrée F en $x_1 = a = 2L/3$ (figure 3.1). Le problème est plan. Le matériau est linéaire homogène et isotrope : On note E son module d'Young et G son module de cisaillement.

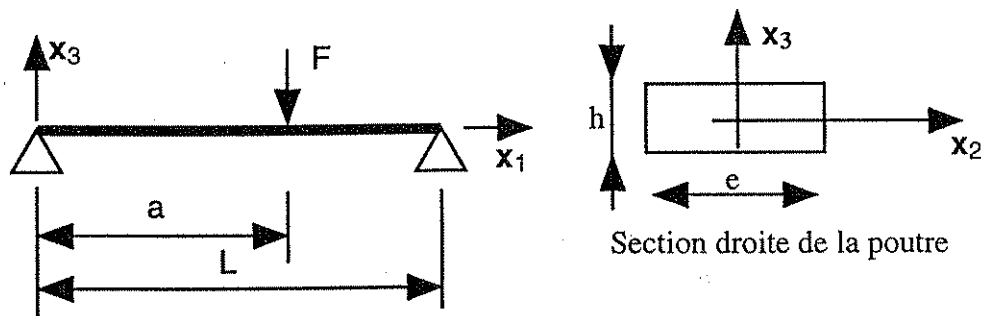


Figure 3.1. Modélisation du linguet par une poutre droite.

Dans la mesure où l'on s'intéresse uniquement à la flèche sous la charge, on privilégie une méthode de résolution énergétique. Cela permet en plus de facilement prendre en compte la contribution du cisaillement transverse qui est non négligeable pour une poutre courte.

- Q3.1. Déterminer le moment fléchissant et l'effort tranchant le long de la poutre.
- Q3.2. Déterminer l'énergie de déformation stockée dans la poutre en précisant les énergies associées respectivement aux effets de flexion et de cisaillement.
- Q3.3. Donner l'expression la flèche u_a sous la charge.
- Q3.4. En déduire la valeur numérique de la raideur $k=F/u_a$ pour les données suivantes :
 $E = 200\ 000$ MPa, $G = 80\ 000$ MPa, $h = 9$ mm, $e = 17$ mm et $L = 45$ mm.

3.2 ESTIMATION DE LA RAIDEUR DU LINGUET PAR UNE APPROCHE ELEMENTS FINIS.

Dans cette partie, on se propose de construire la matrice de rigidité d'un élément 1D à deux noeuds et quatre degrés de liberté à partir de la notion d'énergie de déformation (plus précisément de la fonctionnelle d'énergie de déformation).

Expression de l'énergie de déformation d'un tronçon du solide

On considère un tronçon de longueur l du solide élancé qui schématise le linguet (figure 3.2). Il est constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope et ne reçoit aucune sollicitation sur ces faces latérales. Un repère local (O_e, x, y, z) est introduit comme précisé sur la figure.

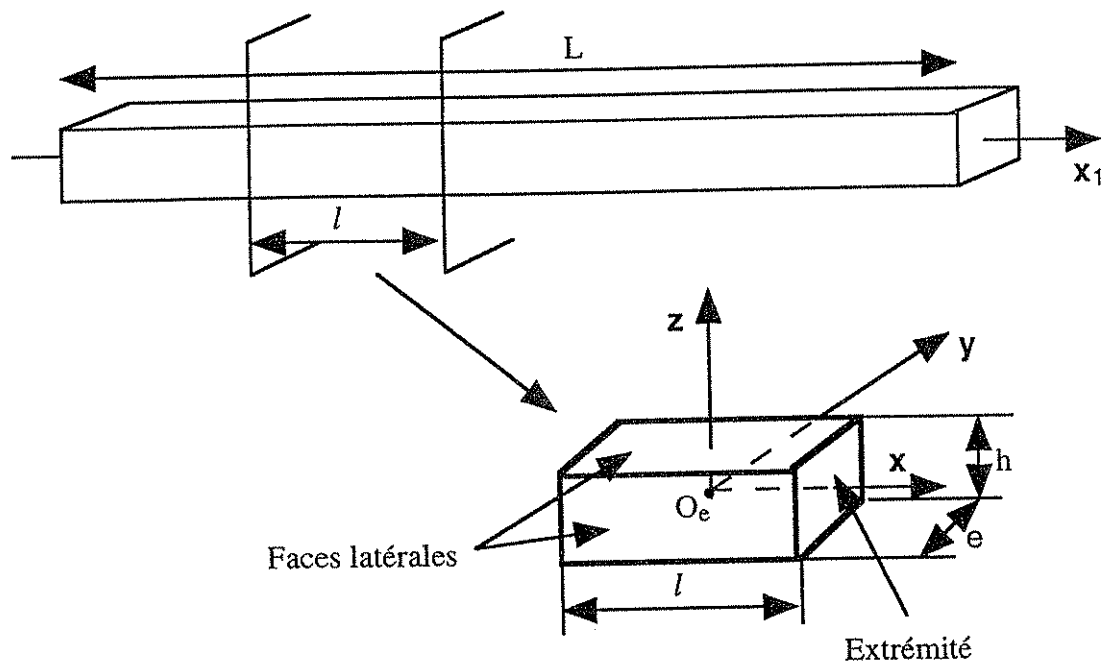


Figure 3.2. Géométrie du tronçon considéré

Sous l'action du chargement, on considère que les sections droites du tronçon subissent un mouvement de corps rigide défini par une flèche w dans la direction z et une petite rotation θ selon l'axe y . Le champ de déplacements est alors recherché parmi les champs de la forme suivante :

$$\mathbf{u}(x, y, z) = z \theta(x) \mathbf{x} + w(x) \mathbf{z}$$

où $\theta(x)$ et $w(x)$ sont des fonctions quelconques de x .

- Q3.5. Déterminer les composantes cartésiennes ϵ_{ij} et σ_{ij} des champs de déformations et de contraintes associés à ce type de champ de déplacements.
- Q3.6. Montrer que ce type de champ de déplacements ne permet pas d'accéder à la solution du problème d'élasticité 3D relatif au tronçon, et ce, quelles que soient les conditions aux extrémités $\left(x = \pm \frac{l}{2}\right)$.

En revanche, ce type de champ de déplacements fournit une bonne estimation de l'énergie de déformation qui se réduit à l'expression suivante (admise) :

$$W_{\text{déf}}(u) = \iiint_{\text{volume}} \left(\frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon_{11}^2(u) + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_{13}^2(u) \right) dv$$

Q3.7. Simplifier l'expression de l'énergie de déformation en l'exprimant comme une intégrale simple sur $[-l/2, l/2]$ en fonction des déformations généralisées k et γ définies par

$$k = \frac{d\theta}{dx} \text{ et } \gamma = \frac{dw}{dx} + \theta, \text{ de l'aire de la section } S \text{ et de son inertie } I.$$

Discrétisation, définition de l'élément (figure 3.3).

On effectue des interpolations linéaires de w et θ sur le tronçon on posant

$$w(x) = N_1(x) w_1 + N_2(x) w_2 \quad \text{et} \quad \theta(x) = N_1(x) \theta_1 + N_2(x) \theta_2$$

$$\text{avec } N_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \quad \text{et} \quad N_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{l}$$

où w_1 , θ_1 , w_2 et θ_2 représentent respectivement les flèches et les rotations aux noeuds 1 et 2 de

l'élément. Enfin le vecteur des degrés de liberté élémentaires est noté $[q_e] = \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$

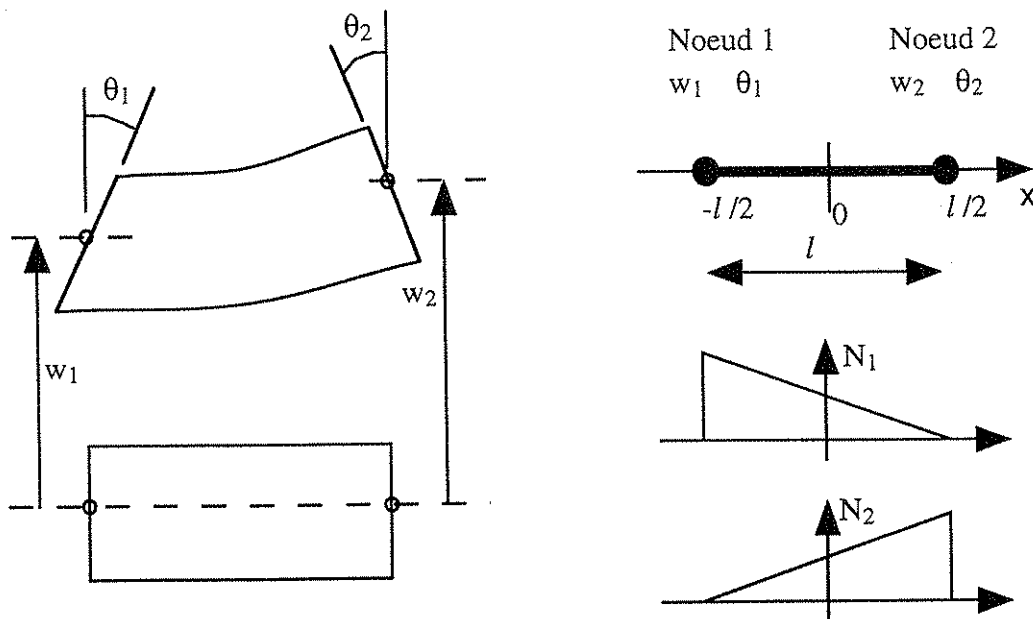


Figure 3.3. Élément fini à deux noeuds et quatre degrés de liberté.

Q3.8. Calculer l'expression de l'énergie de déformation en fonction de θ_1 , θ_2 , w_1 et w_2 . On présentera le résultat sous forme développée.

Q3.9. En déduire que l'énergie de déformation de l'élément s'écrit sous la forme

$$W_{\text{def}}^e = \frac{1}{2} \cdot [q_e]^T \cdot [K_e] \cdot [q_e], \text{ en précisant la matrice de rigidité } [K_e] \text{ de l'élément.}$$

Modélisation du linguet : Assemblage et résolution.

Le linguet est maillé avec trois éléments de longueur $l=L/3$, et l'action de la came est introduite par une force concentrée appliquée sur le noeud 3 (figure 3.4).

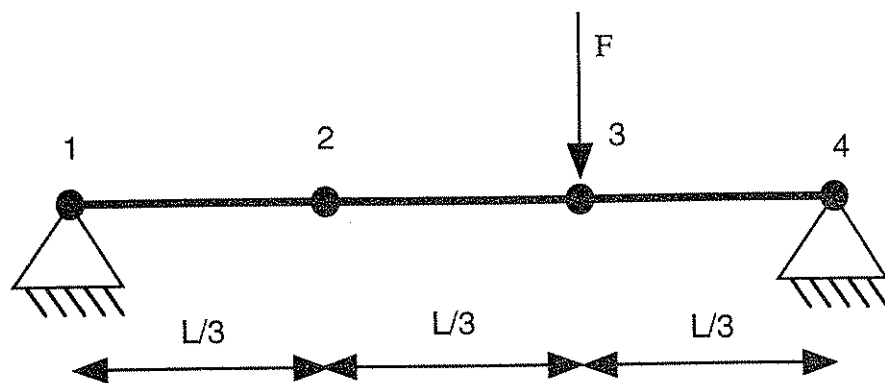


Figure 3.4 Maillage à trois éléments

Q3.10. Expliquer les procédures d'assemblage de la matrice de rigidité globale $[K]$ et de prise en compte des conditions aux limites aux extrémités.

Q3.11. Expliciter, sans chercher à le résoudre, le système linéaire associé à cette configuration de chargement et décrire la démarche à suivre pour obtenir la raideur cherchée.

NB. Tel quel, cet élément fini simple n'est pas performant. En pratique, on lui préfère ses semblables à 3 et à 4 noeuds.

FORMULAIRE :

Loi de Hooke :
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

PARTIE 4.

ETUDE DE L'ECHANGE THERMIQUE ENTRE LE BLOC MOTEUR ET LE LIQUIDE DE REFROIDISSEMENT.

POSITION DU PROBLEME.

En fonctionnement, le bloc moteur reçoit des flux de chaleur relativement importants qui proviennent essentiellement du gaz contenu dans le cylindre et des frottements entre les différentes pièces mécaniques en mouvement. Pour résister mécaniquement, les parois du moteur doivent être maintenues à une température nettement inférieure à la température des gaz. Par suite, il est nécessaire d'évacuer ces flux de chaleur par un système de refroidissement (figure 4.1). Au niveau du moteur ce système se réduit essentiellement à une simple circulation d'eau aménagée dans les parois du bloc moteur (figure 4.2). Le mode d'échange entre le moteur et le fluide de refroidissement est donc du type convection forcée. Il dépend de la nature de l'écoulement, de la géométrie des surfaces d'échange, de la température moyenne, du débit et des propriétés du fluide de refroidissement. En pratique, le concepteur a peu de marge de manoeuvre: les surfaces sont imposées, la température d'entrée ne doit pas être trop froide pour limiter les gradients de température dans le bloc moteur, et la nature du fluide doit répondre à des normes de corrosion et de durée de vie... Le paramètre restant est souvent le débit. On se propose dans ce problème d'estimer le débit en fonction de la quantité de chaleur à évacuer, des paramètres géométriques et de la température moyenne du liquide de refroidissement.

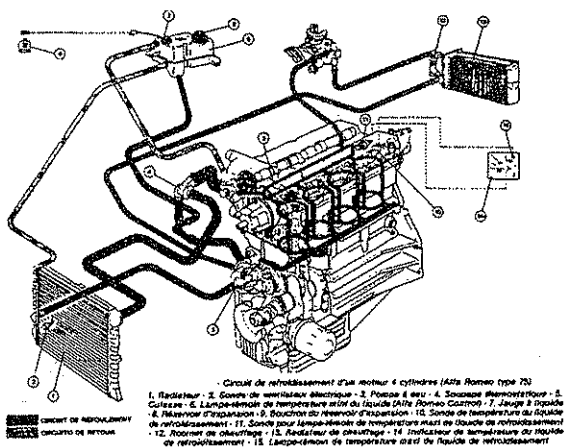


Figure 4.1

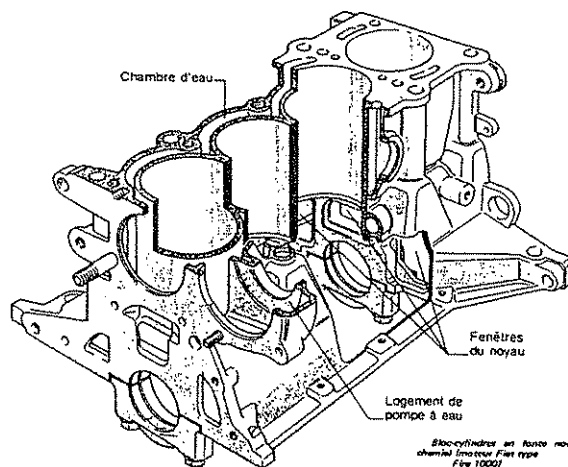


Figure 4.2

MODELISATION DE PROBLEME.

La partie principale du circuit de refroidissement étant le conduit annulaire autour de la chemise du cylindre, nous l'avons en première approximation schématiser par deux plans parallèles de longueur l correspondant à la longueur du circuit, de largeur L caractéristique d'une largeur équivalente et espacés de $2a$ (voir figure 4.3). La température des parois est supposée constante. Elle est notée T_0 . La température moyenne d'entrée du fluide est T_{mi} . En ce qui concerne le régime d'écoulement nous le supposons laminaire et pleinement développé, de même le régime thermique sera supposé 'pleinement développé'. Ces dernières hypothèses sont sans doute les plus discutables, mais elles permettent de faire une première estimation et de mettre en évidence la structure d'un tel problème.

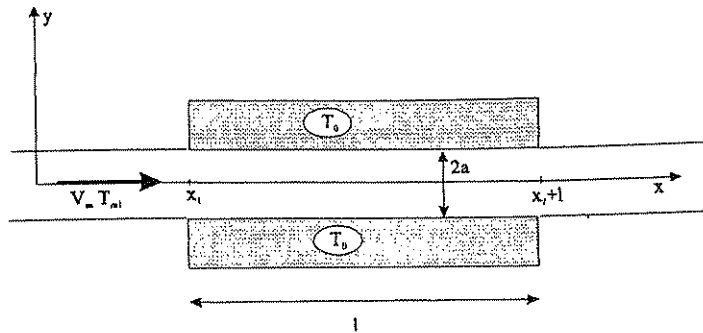


Figure 4.3

4.1. DETERMINATION DU PROFIL DES VITESSES DE L'ÉCOULEMENT LAMINAIRE.

On cherche, dans cette partie à déterminer le profil des vitesses entre deux plaques parallèles.

Le système d'équations.

Q4.1. Rappeler les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un fluide visqueux incompressible en coordonnées cartésiennes.

Q4.2. Quelle est la condition à la paroi ?

Système d'équations simplifiées.

Pour obtenir la solution laminaire établie, on fait les hypothèses suivantes :

H1 : L'écoulement est stationnaire, unidirectionnel et indépendant de la coordonnée z ;

H2 : Les forces de pesanteur sont négligées.

Q4.3. Comment ces hypothèses se traduisent-elles sur les champs de vitesses et de pressions ?

Q4.4. Que deviennent les équations de conservation et les équations aux limites ?

Résolution.

Q4.5. Faire l'intégration du système et montrer que les champs de vitesses et de pressions sont caractérisés par les expressions

$$V_x = A \cdot V_m \cdot \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \quad \text{et} \quad p(x) - p(x_1) = -B \cdot \frac{V_m \mu}{a^2} \cdot (x - x_1) \quad (1)$$

où V_m désigne la vitesse de débit et A et B deux constantes numériques que l'on calculera.

4.2. COEFFICIENT D'ÉCHANGE ET TEMPERATURE MOYENNE.

On s'intéresse maintenant à la quantité de chaleur fournie par les parois au fluide. Cette quantité de chaleur est l'intégrale sur les parois de l'apport de chaleur local q_0'' par unité de surface fourni par la paroi à fluide qui est une fonction de l'abscisse x , $q_0''(x)$.

Q4.6. En exprimant la loi de Fourier, donner la relation qui lie cet apport de chaleur q_0'' au champ de températures du fluide.

☞ Q4.7. On cherche maintenant une autre relation entre $q_0''(x)$ et le champ de températures. En écrivant un bilan intégral d'énergie interne entre deux sections x et $x+dx$, montrer que le flux $q_0''(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$q_0'' = D \cdot V_m \cdot \frac{dT_m}{dx} \quad (2)$$

où V_m désigne la vitesse de débit, T_m une température moyenne dans la section et D une constante dimensionnelle.

☞ Q4.7.a. On explicitera la définition de T_m .

☞ Q4.7.b. On précisera la valeur de la constante D .

NB.

- Dans le bilan, on fera les mêmes hypothèses que pour le champ des vitesses : hypothèse de stationnarité et d'homogénéité dans la direction z ;
- De plus, on négligera les aspects visqueux et la diffusion dans la direction longitudinale, x ;
- Enfin pour un fluide incompressible, on peut supposer que l'énergie interne ne dépend que de la température : $u = u(T)$. Par suite, on peut écrire :

$$du = c(T) \cdot dT \quad (3)$$

où $c(T)$ désigne la chaleur spécifique (à volume constant). En pratique, si les variations de température ne sont pas trop importantes, $c(T)$ peut être considérée comme constante par rapport à la température :

$$c(T) = c = \text{constante} \quad (4)$$

On définit le coefficient global d'échange par convection h entre la paroi et le fluide par la relation :

$$h = - \frac{q_0''}{T_m - T_0} \quad (5)$$

où, à priori, h et T_m sont des fonctions de l'abscisse, x .

On écrit maintenant l'hypothèse de régime thermique pleinement développé. Elle se traduit en exprimant que le profil des températures normalisées par la température moyenne n'est fonction que de la coordonnée transversale, y . C'est à dire :

$$\frac{T(x, y, z, t) - T_0}{T_m(x) - T_0} = f\left(\frac{y}{a}\right) \quad (6)$$

☞ Q4.8. En rapprochant l'expression obtenue en 4.6 et la définition de h montrer que cette hypothèse implique que le coefficient d'échange convectif h est indépendant de x et qu'il s'exprime simplement en fonction de la dérivée de la fonction f .

☞ Q4.9. En déduire la forme de l'évolution de la température moyenne en fonction de x . On exprimera cette évolution en introduisant le nombre de Nusselt :

$$Nu = \frac{h \cdot 4a}{k} \quad (7)$$

$4a$ représente le diamètre hydraulique du circuit et k le coefficient de conductivité thermique.

☞ Q4.10. Exprimer enfin la quantité de chaleur Q fournie par la paroi au fluide.

Cette dernière expression permet d'estimer le débit à imposer dans le circuit de refroidissement en fonction de la quantité de chaleur à évacuer, des paramètres géométriques et de la température moyenne du liquide de refroidissement. Il reste néanmoins à déterminer la valeur du coefficient de convection h (ou du nombre de Nusselt) qui dépend du profil de températures dans la section et par suite du profil des vitesses.

4.3. EQUATIONS QUI GERENT L'EVOLUTION DU CHAMP DE TEMPERATURE.

Equation de la chaleur.

Q4.11. Rappeler l'expression locale d'énergie interne pour un fluide visqueux incompressible. On expliquera la signification de chaque terme de cette équation.

Q4.12. On fait les mêmes hypothèses que pour le champ des vitesses: Hypothèse de stationnarité et d'homogénéité dans la direction z . Compte tenu de ces hypothèses, montrer que l'équation d'énergie interne se réduit dans notre cas à :

$$\rho c V_x \frac{\partial T}{\partial x} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)^2 \quad (8)$$

Simplification de l'équation de la chaleur.

L'équation précédente reste trop compliquée pour être résolue directement. On se propose par une analyse d'ordre de grandeur de ne garder que les termes les plus significatifs. Pour cela, on introduit :

- comme échelles de vitesse et de variation de vitesse, la vitesse de débit $O(V_x) = O(\Delta_y V_x) = V_m$;
- comme échelles de longueur, une échelle longitudinale caractéristique de la longueur du conduit $O(\Delta_x) = l$ et une échelle transversale caractéristique de la hauteur du conduit $O(\Delta_y) = a$;
- comme échelles de température, une échelle de variation longitudinale $O(\Delta_x T)$ et une échelle de variation transversale $O(\Delta_y T)$.

Q4.13. Les deux échelles de température ne sont pas indépendantes. En considérant les expressions de l'apport de chaleur à la paroi établies précédemment, expliciter le rapport $O(\Delta_x T)/O(\Delta_y T)$ en fonction des constantes du problème (l, a, \dots) et de la vitesse de débit V_m .

Q4.14. Expliciter maintenant l'ordre de grandeur de chacun des termes de l'équation de la chaleur en fonction des échelles V_m, l, a et $O(\Delta_y T)$.

Q4.15. Montrer que le terme de diffusion longitudinale peut être négligé si un certain nombre sans dimension Pe est très supérieur à 1 (ce nombre s'appelle le nombre de Peclet).

Dans notre cas le nombre de Peclet est de l'ordre de 10^6 de sorte que le terme de diffusion longitudinale est négligeable. Par ailleurs le terme visqueux est également négligeable, de sorte que l'équation de la chaleur se réduit à l'équation suivante :

$$\rho c V_x \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (9)$$

Il faut rajouter à cette équation

$$\text{la condition de paroi: } T(x, \pm a) = T_0 \quad (10)$$

$$\text{et la condition de symétrie: } \frac{\partial T}{\partial y}(x, y = 0) = 0 \quad (11)$$

Q4.16. En introduisant la condition de profil des températures pleinement établi (équation 6) montrer que l'équation différentielle aux dérivées partielles se ramène à deux équations différentielles ordinaires qui gèrent respectivement l'évolution longitudinale de la température moyenne et l'évolution transversale de la fonction de forme $f(y/a)$.

Q4.17. En considérant le résultat obtenu en 4.9, exprimer la constante introduite en fonction du nombre de Nusselt.

La valeur du nombre de Nusselt qui comme nous l'avons vu en 4.8, est liée à la fonction f , est alors obtenue par intégration de l'équation différentielle qui gère l'évolution de f . Cette équation est une équation différentielle du second ordre non linéaire à coefficients non constants. Son intégration n'est pas immédiate et peut être réalisée par une méthode itérative. Après une itération, la valeur du nombre de Nusselt obtenue est déjà une très bonne approximation de la valeur finale qui est de 7.54.

FORMULAIRE:

Loi de FOURIER: $\mathbf{q} = -k \cdot \text{grad}T$

Bilan d'énergie interne sur un domaine fixe D de frontière ∂D

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D \rho u \, dv + \int_{\partial D} \rho u \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \, dv + \int_{\partial D} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

NOTATIONS:

$V_x, V_y, V_z:$	Composantes du vecteur vitesse.
$V_m:$	Vitesse de débit (m s^{-1}).
$\mathbf{n}:$	Normale extérieure au domaine.
$p:$	Pression (Pa).
$\mathbf{q}:$	Vecteur flux de chaleur (W m^{-2})
$x, y, z:$	Coordonnées cartésiennes du point considéré.
$\mu:$	Coefficient de viscosité dynamique ($\text{kg s}^{-1} \text{m}^{-1}$).
$T:$	Température (K).
$u:$	Energie interne spécifique (J kg^{-1}).
$k:$	Conductivité thermique ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$)
$\alpha:$	Diffusivité thermique ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
$\rho:$	Masse volumique (kg m^{-3})
$c:$	Chaleur spécifique ($\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$)
$\sigma_{ij}:$	Tenseur des contraintes.