

Éléments de corrigé

PARTIE 1

Question 1

Elaboration de la variable numérique "nb_a" :

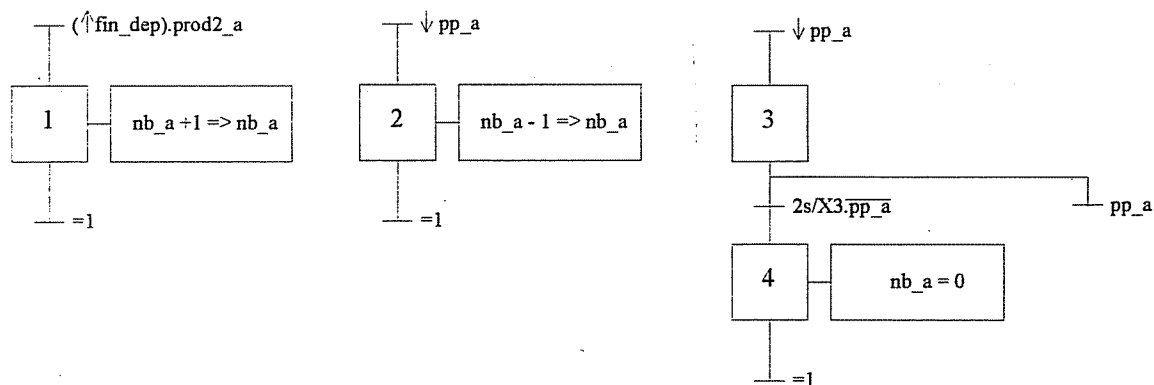
Cette variable donne le nombre de pièces dans la goulotte "a".

Elle doit être incrémentée de une unité à chaque dépose dans cette goulotte, c'est à dire lorsqu'on a le front montant de la variable "fin_dep.prod2a".

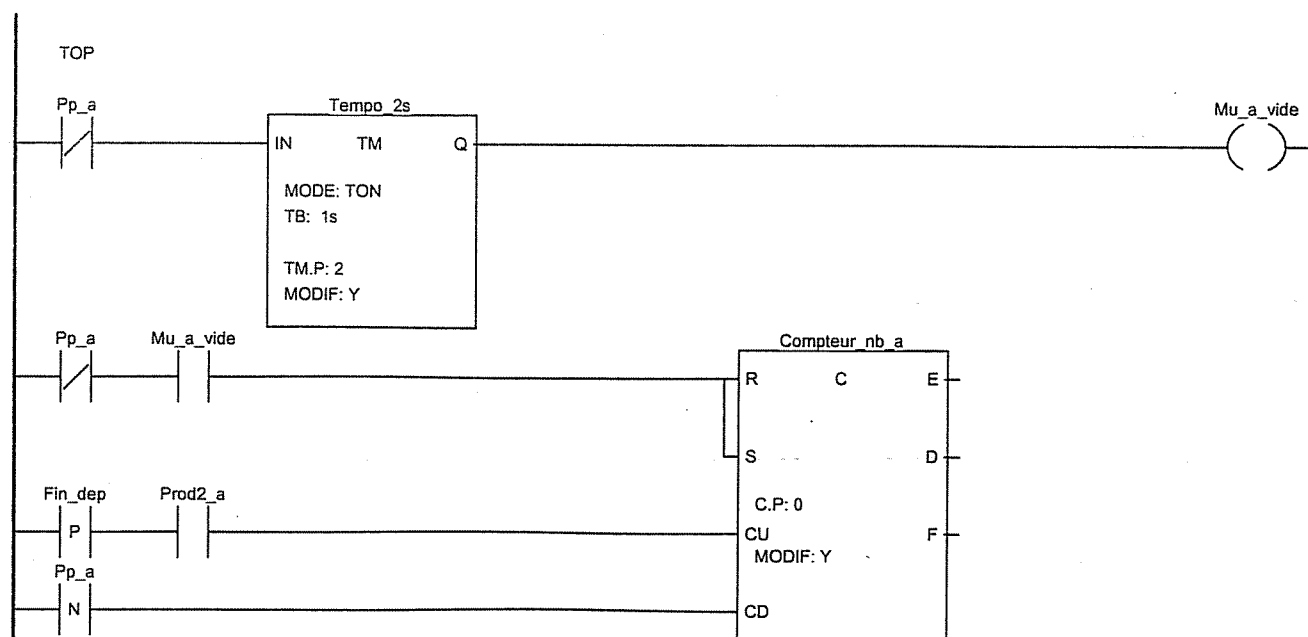
Elle doit être décrémentée de une unité à chaque fois que l'on retire une pièce, c'est à dire au front descendant de la variable "pp_a".

Elle doit être mise à zéro lorsque la variable "pp_a" est fausse pendant une durée supérieure à 2 secondes.

Description en utilisant le GRAFCET :



Description en utilisant les boites fonctionnelles "temporisateur" et "compteur" (langage LADDER sur logiciel PL7 de TELEMECANIQUE) :

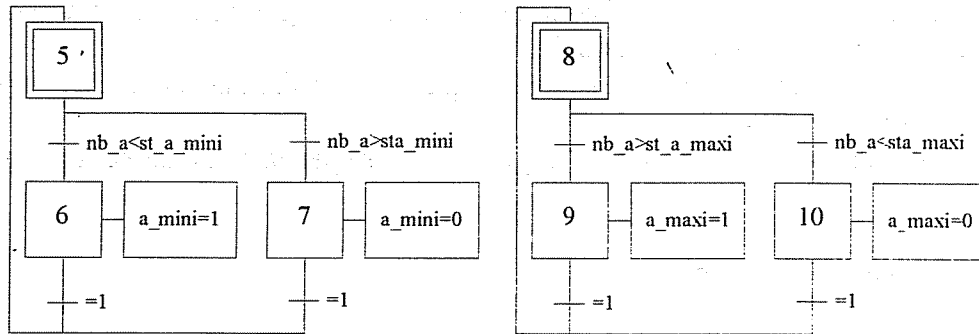


Elaboration des variables booléennes "a_mini" et "a_maxi" :

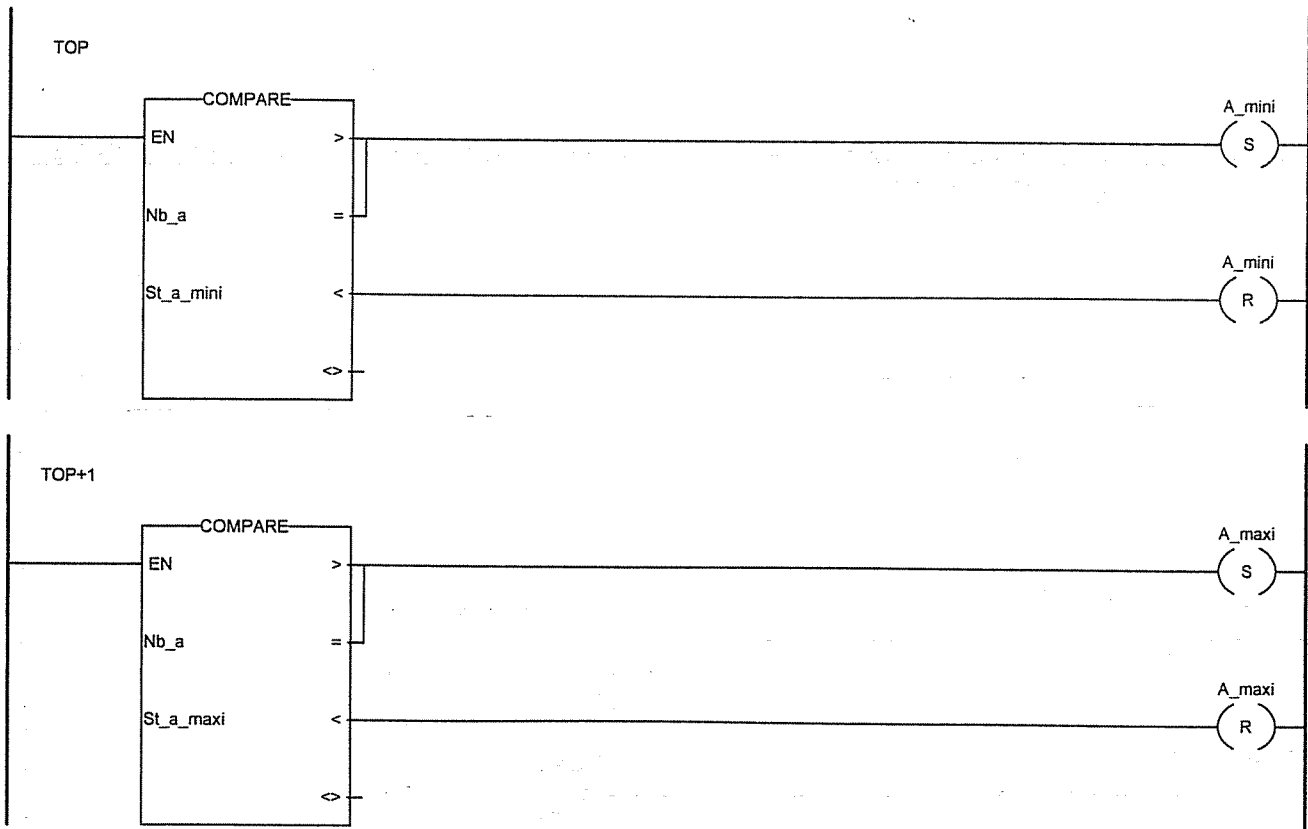
La variable booléenne "a_mini" doit être positionnée à un si "nba <= st_a_mini", et à zéro dans le cas contraire .

La variable booléenne "a_maxi" doit être positionnée à un si "nba >= st_a_maxi", et à zéro dans le cas contraire .

Description en utilisant le GRAFCET :

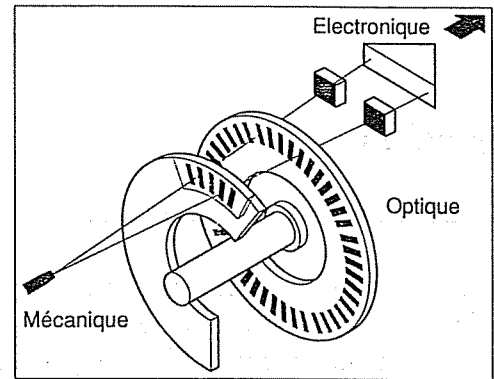


Description en utilisant les boites fonctionnelles "comparateur" (langage LADDER sur le logiciel PL7 de TELEMECANIQUE) :



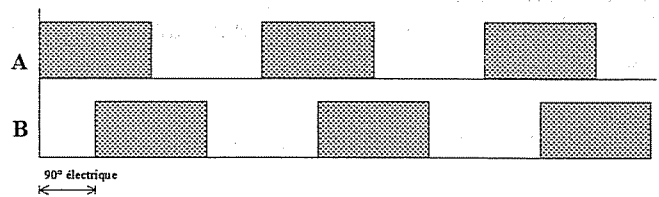
Question 2

Un capteur incrémental rotatif est constitué d'un disque qui comporte deux pistes principales divisées en "n" intervalles d'angles égaux, alternativement opaques et transparents. Deux photo-diodes décalées envoient deux faisceaux qui traversent les parties transparentes du disque, délivrant en sortie deux signaux "carré" (A et B) en quadrature de phase. Pour un tour complet de l'axe du capteur, les faisceaux sont interrompus "n" fois et délivrent "n" signaux consécutifs.



Le déphasage (90° électrique des signaux A et B permet de déterminer le sens de rotation:

- dans un sens pendant le front montant du signal A, le signal B est à 1
- dans l'autre sens, pendant le front montant du signal A, le signal B est à 0.



Ces capteurs possèdent une troisième piste, avec une seule partie opaque, pour la référence angulaire sur un tour. Ce signal, délivré une fois par tour (souvent appelé "Top 0"), est utilisé pour les prises d'origine. Ces capteurs sont très utilisés, notamment sur les axes asservis des machines à commande numérique et en robotique. Il existe également des capteurs incrémentaux linéaires, utilisant le même principe. Pour plus d'informations, voir les documentations constructeurs.

Question 3

Le capteur incrémental associé à un compteur ne fournit qu'une information de déplacement relatif. Il est donc nécessaire d'initialiser la valeur numérique "**position**" mémorisée par le compteur en se référant à une position fixe. La voie Z du codeur donne une position précise sur un tour, et le capteur inductif permet de définir une position de l'axe qui servira de référence pour la recherche du signal en provenance de la voie Z. Au cours de cette recherche, il est impératif d'accoster le capteur inductif toujours dans le même sens (on limite ainsi la dispersion de position aux variations de la position d'enclenchement du capteur inductif). A partir de cette position, on poursuit le déplacement jusqu'à obtenir l'information en provenance de la voie Z du codeur, et remettre à ce moment là le compteur à zéro. Ce qui donne l'algorithme suivant :

SI pom ALORS

REPETER

Dépl_trans_G

JUSQU'A (fdc_g) OU (\downarrow det_po)

REPETER

Dépl_trans_D

JUSQU'A (det_po. \uparrow Z)

POSITION :=0

FINSI

Eléments de corrigé

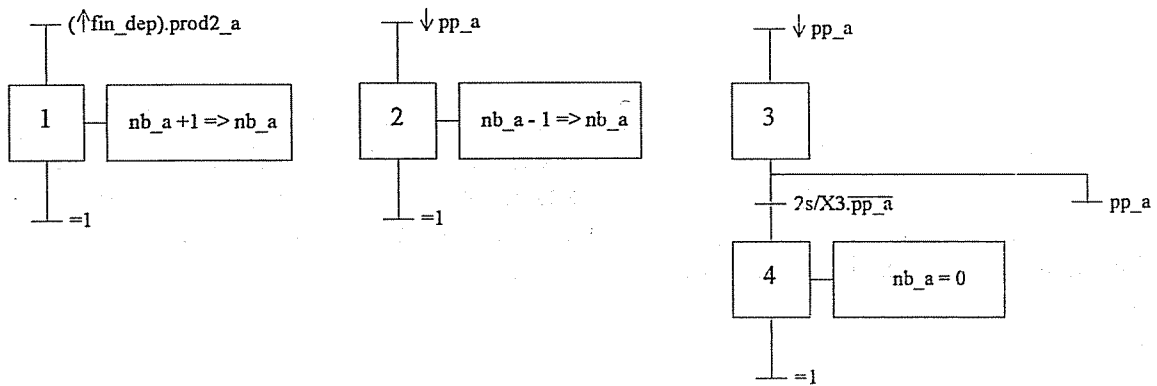
PARTIE 1

Question 1

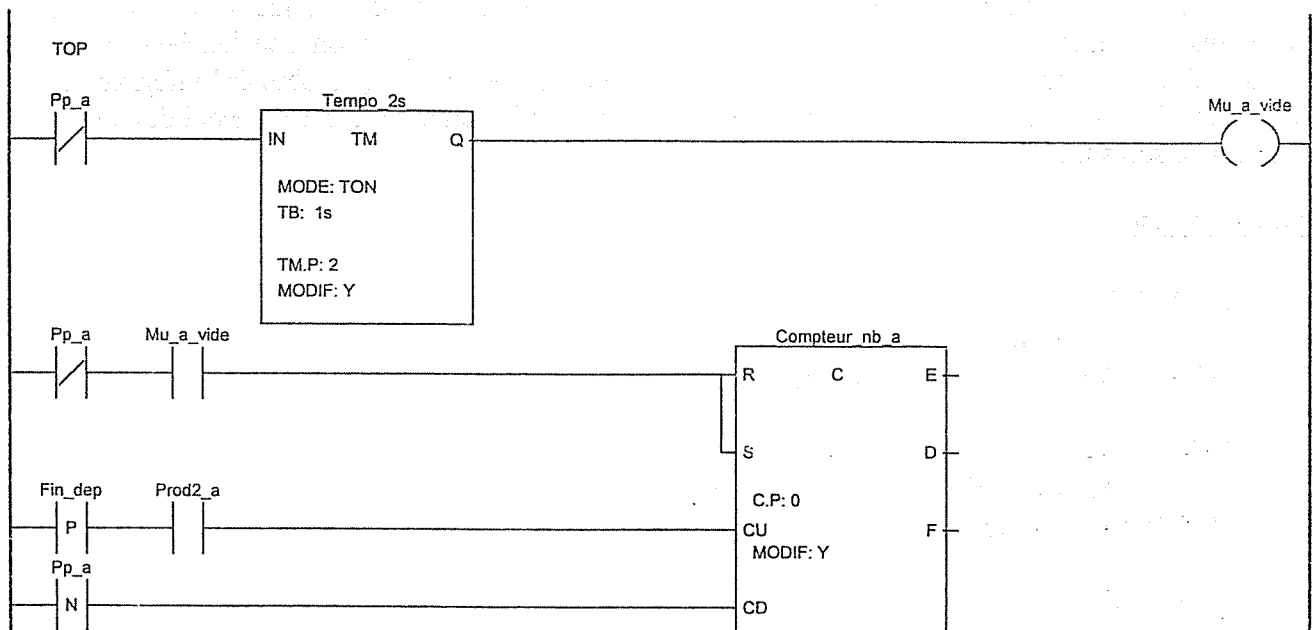
Elaboration de la variable numérique "nb_a" :

Cette variable donne le nombre de pièces dans la goulotte "a".
 Elle doit être incrémentée de une unité à chaque dépose dans cette goulotte, c'est à dire lorsqu'on a le front montant de la variable "fin_dep.prod2a".
 Elle doit être décrémentée de une unité à chaque fois que l'on retire une pièce, c'est à dire au front descendant de la variable "pp_a".
 Elle doit être mise à zéro lorsque la variable "pp_a" est fausse pendant une durée supérieure à 2 secondes.

Description en utilisant le GRAFCET :



Description en utilisant les boites fonctionnelles "temporisateur" et "compteur" (langage LADDER sur logiciel PL7 de TELEMECANIQUE) :

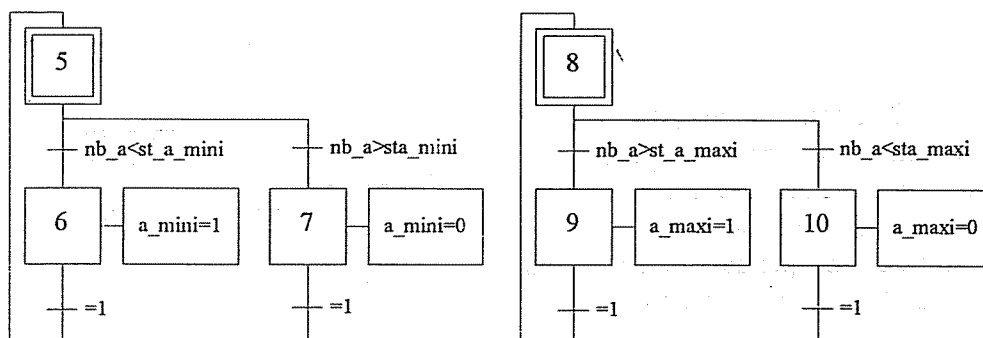


Elaboration des variables booléennes "a_mini" et "a_maxi" :

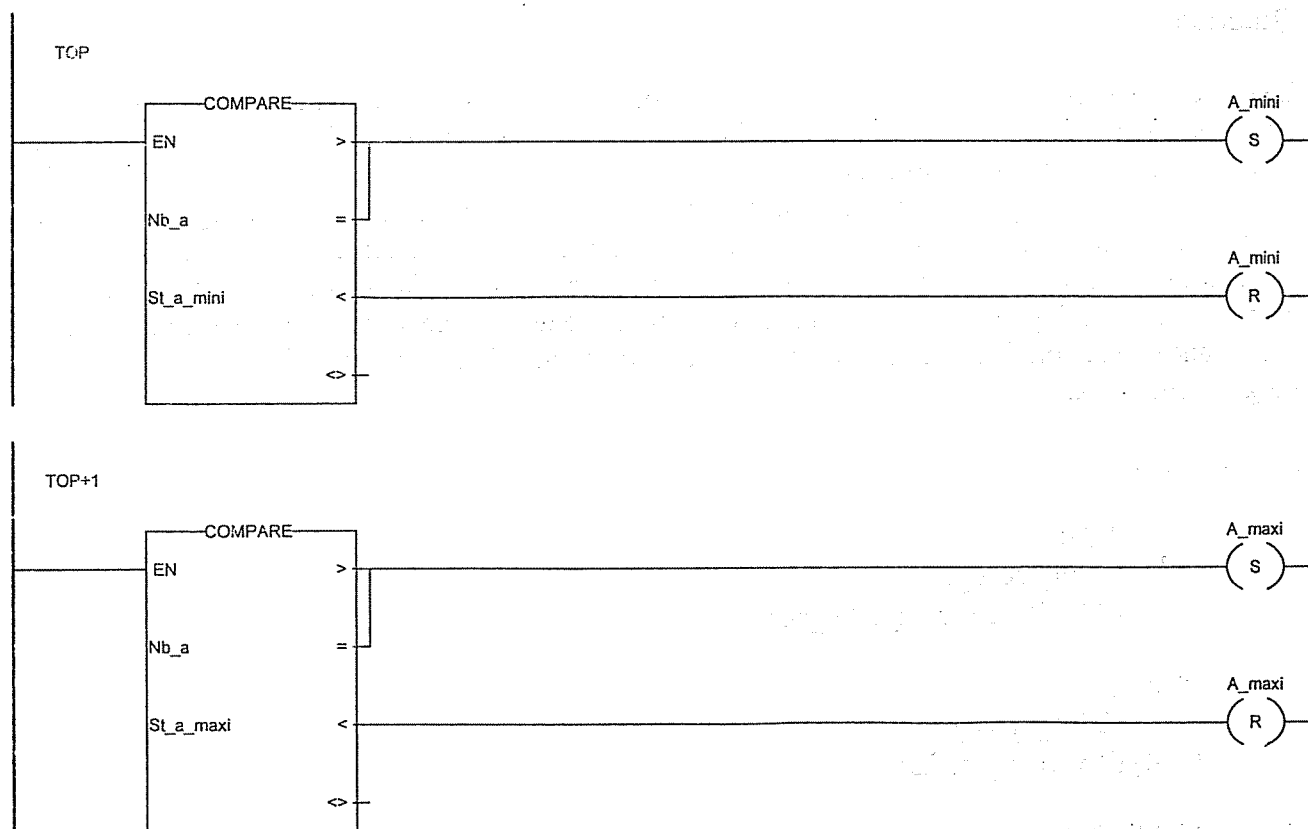
La variable booléenne "a_mini" doit être positionnée à un si "nba <= st_a_mini", et à zéro dans le cas contraire .

La variable booléenne "a_maxi" doit être positionnée à un si "nba >= st_a_maxi", et à zéro dans le cas contraire .

Description en utilisant le GRAFCET :

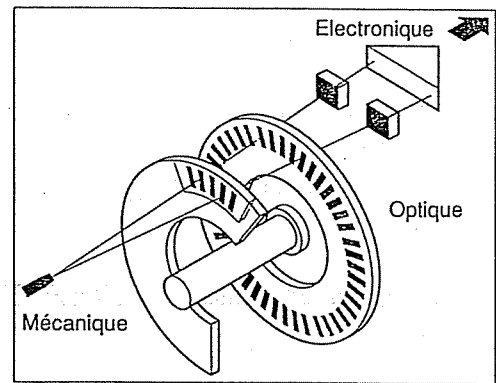


Description en utilisant les boites fonctionnelles "comparateur" (langage LADDER sur le logiciel PL7 de TELEMECANIQUE) :



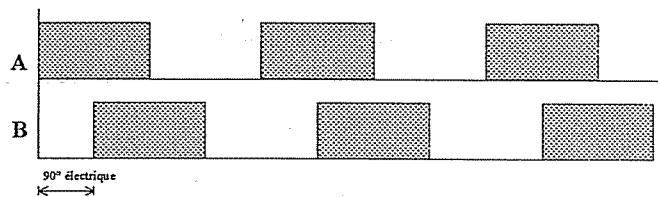
Question 2

Un capteur incrémental rotatif est constitué d'un disque qui comporte deux pistes principales divisées en "n" intervalles d'angles égaux, alternativement opaques et transparents. Deux photo-diodes décalées envoient deux faisceaux qui traversent les parties transparentes du disque, délivrant en sortie deux signaux "carré" (A et B) en quadrature de phase. Pour un tour complet de l'axe du capteur, les faisceaux sont interrompus "n" fois et délivrent "n" signaux consécutifs.



Le déphasage (90° électrique des signaux A et B) permet de déterminer le sens de rotation:

- dans un sens pendant le front montant du signal A, le signal B est à 1
- dans l'autre sens, pendant le front montant du signal A, le signal B est à 0.



Ces capteurs possèdent une troisième piste, avec une seule partie opaque, pour la référence angulaire sur un tour. Ce signal, délivré une fois par tour (souvent appelé "Top 0"), est utilisé pour les prises d'origine. Ces capteurs sont très utilisés, notamment sur les axes asservis des machines à commande numérique et en robotique. Il existe également des capteurs incrémentaux linéaires, utilisant le même principe. Pour plus d'informations, voir les documentations constructeurs.

Question 3

Le capteur incrémental associé à un compteur ne fournit qu'une information de déplacement relatif. Il est donc nécessaire d'initialiser la valeur numérique "**position**" mémorisée par le compteur en se référant à une position fixe. La voie Z du codeur donne une position précise sur un tour, et le capteur inductif permet de définir une position de l'axe qui servira de référence pour la recherche du signal en provenance de la voie Z. Au cours de cette recherche, il est impératif d'accoster le capteur inductif toujours dans le même sens (on limite ainsi la dispersion de position aux variations de la position d'enclenchement du capteur inductif). A partir de cette position, on poursuit le déplacement jusqu'à obtenir l'information en provenance de la voie Z du codeur, et remettre à ce moment là le compteur à zéro. Ce qui donne l'algorithme suivant :

SI pom ALORS

REPETER

Dépl_trans_G

JUSQU'A (fdc_g) OU (\downarrow det_po)

REPETER

Dépl_trans_D

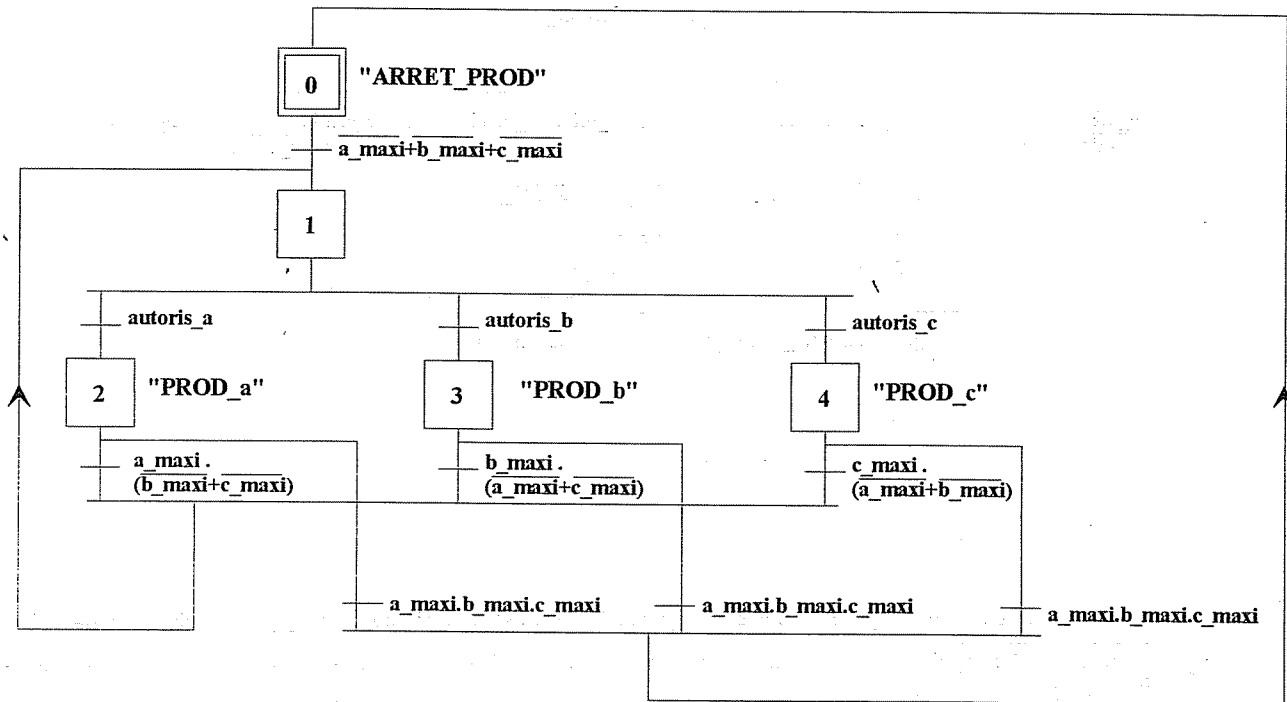
JUSQU'A (det_po. \uparrow Z)

POSITION :=0

FINSI

Question 4

Description de la situation 1:

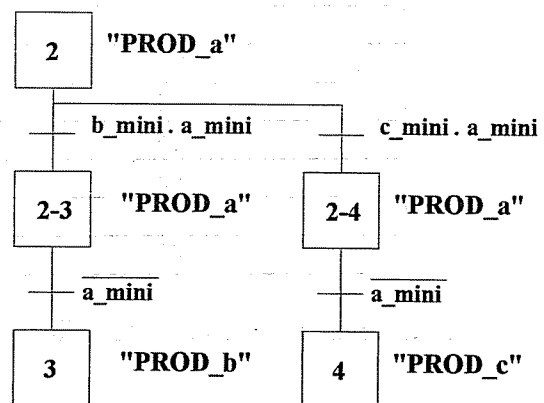
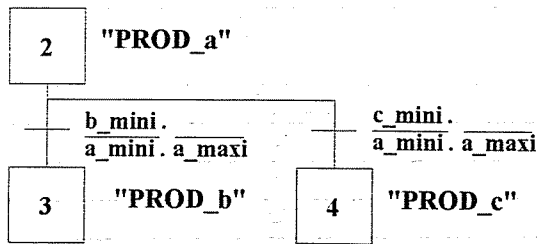


$$\text{autoris}_a = \overline{a_{\text{maxi}}} . \overline{b_{\text{mini}}} . \overline{c_{\text{mini}}} [st_a_{\text{maxi}} - nb_a \geq st_b_{\text{maxi}} - nb_b]. [st_a_{\text{maxi}} - nb_a \geq st_c_{\text{maxi}} - nb_c]$$

$$\text{autoris}_b = \overline{b_{\text{maxi}}} . \overline{a_{\text{mini}}} . \overline{c_{\text{mini}}} [st_b_{\text{maxi}} - nb_a > st_a_{\text{maxi}} - nb_a]. [st_b_{\text{maxi}} - nb_a \geq st_c_{\text{maxi}} - nb_c]$$

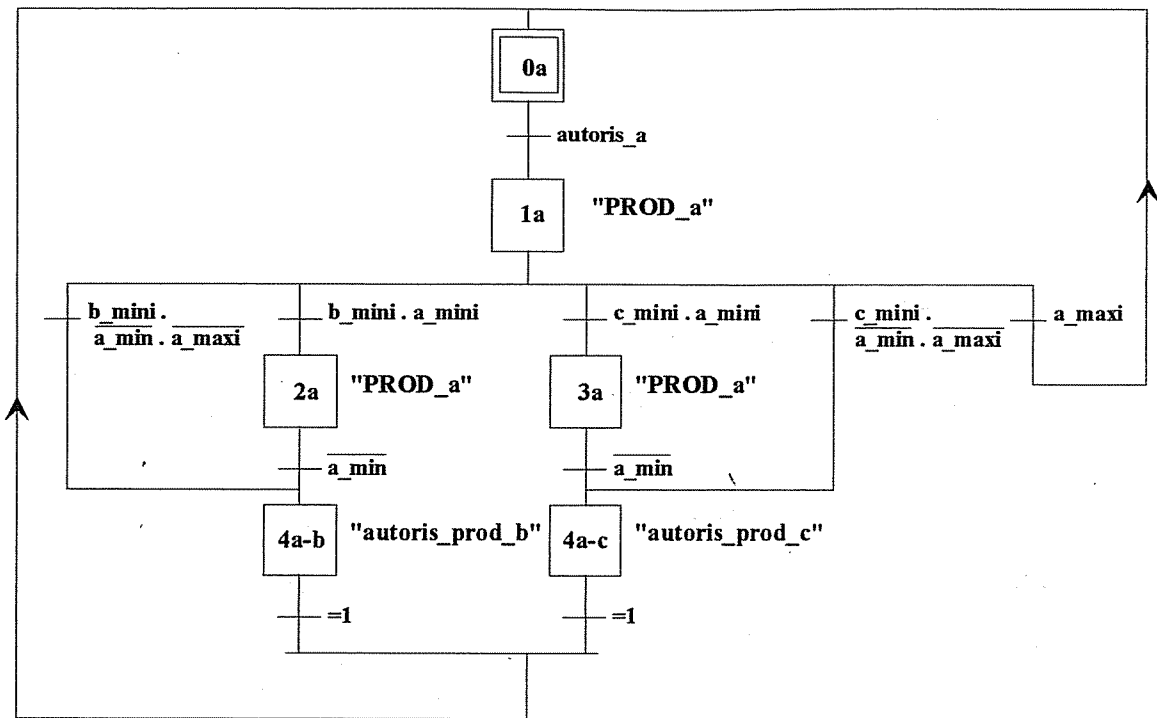
$$\text{autoris}_c = \overline{c_{\text{maxi}}} . \overline{a_{\text{mini}}} . \overline{b_{\text{mini}}} [st_c_{\text{maxi}} - nb_c \geq st_a_{\text{maxi}} - nb_a]. [st_c_{\text{maxi}} - nb_c \geq st_b_{\text{maxi}} - nb_b]$$

Description des situations 2 et 3:



Synthèse :

Dans la solution proposée ci-après, qui intègre les trois situations décrites précédemment, il a été retenu de faire un grafcet pour chaque production (seul le grafcet de production de la pièce a est représenté). Les étapes 4a-b et 4a-c délivrent des autorisations de production pour les autres pièces, qu'il suffit d'intégrer dans la réceptivité autoris_i (voir ci-dessous). La situation d'arrêt de production est atteinte lorsque les trois étapes initiales sont actives. Soit **ARRET_PROD** = X0a . X0b . X0c



$$\text{autoris}_a = \overline{a_{\text{maxi}}} \cdot \overline{b_{\text{mini}}} \cdot \overline{c_{\text{mini}}} [\text{st}_a_{\text{maxi}} - \text{nb}_a \geq \text{st}_b_{\text{maxi}} - \text{nb}_b] \cdot [\text{st}_a_{\text{maxi}} - \text{nb}_a \geq \text{st}_c_{\text{maxi}} - \text{nb}_c] + X_{4b-a} + X_{4c-a}$$

$$\text{autoris}_b = \overline{b_{\text{maxi}}} \cdot \overline{a_{\text{mini}}} \cdot \overline{c_{\text{mini}}} [\text{st}_b_{\text{maxi}} - \text{nb}_a > \text{st}_a_{\text{maxi}} - \text{nb}_a] \cdot [\text{st}_b_{\text{maxi}} - \text{nb}_a \geq \text{st}_c_{\text{maxi}} - \text{nb}_c] + X_{4a-b} + X_{4c-b}$$

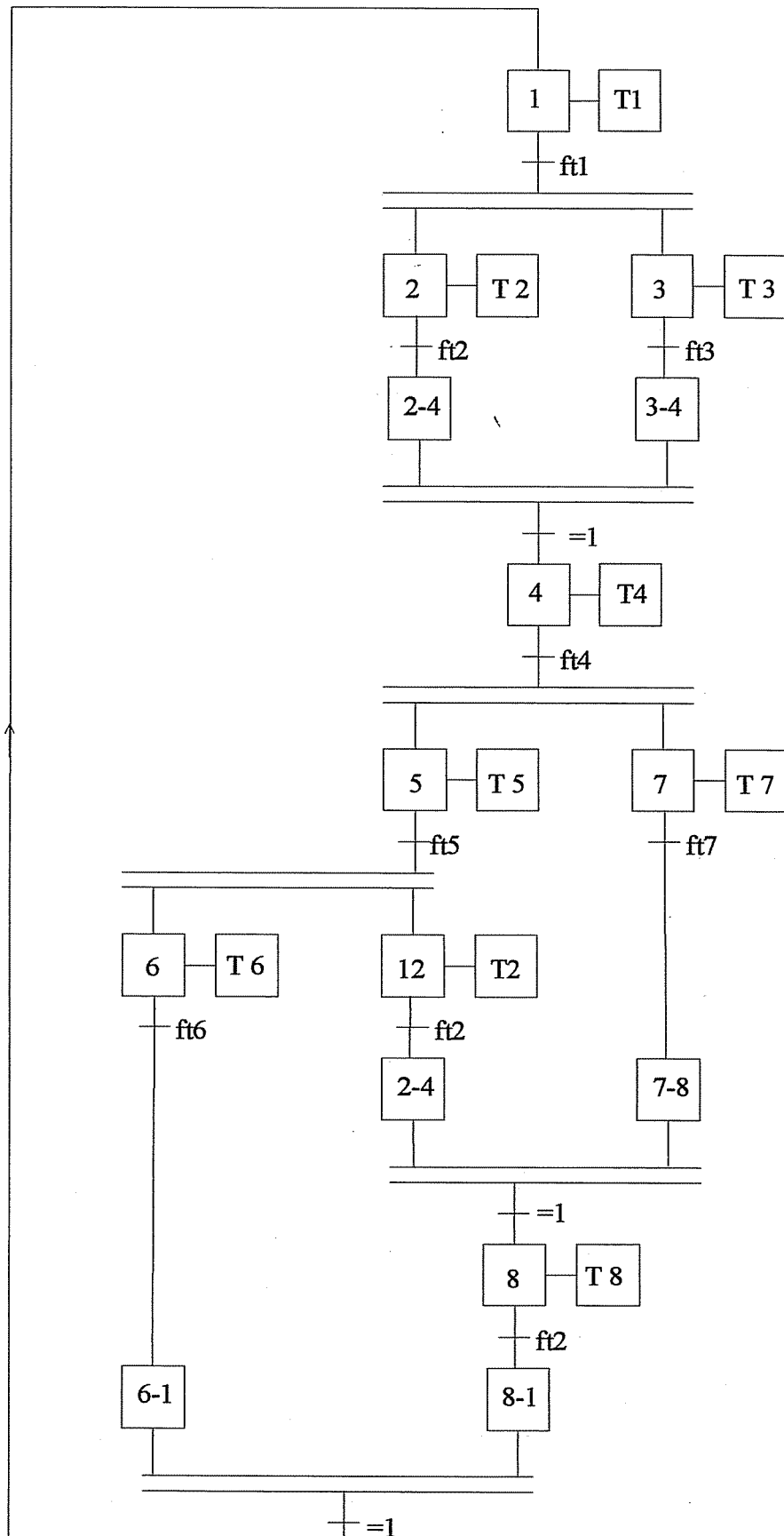
$$\text{autoris}_c = \overline{c_{\text{maxi}}} \cdot \overline{a_{\text{mini}}} \cdot \overline{b_{\text{mini}}} [\text{st}_c_{\text{maxi}} - \text{nb}_c \geq \text{st}_a_{\text{maxi}} - \text{nb}_a] \cdot [\text{st}_c_{\text{maxi}} - \text{nb}_c \geq \text{st}_b_{\text{maxi}} - \text{nb}_b] + X_{4a-c} + X_{4b-c}$$

Question 5

Tableau d'antériorité des tâches:

Pour faire	Il faut que soit(ent) terminée(s)
T1	T6 et T8
T2	T1 ou T5
T3	T1
T4	T2 et T3
T5	T4
T6	T5
T7	T4
T8	T2 et T7

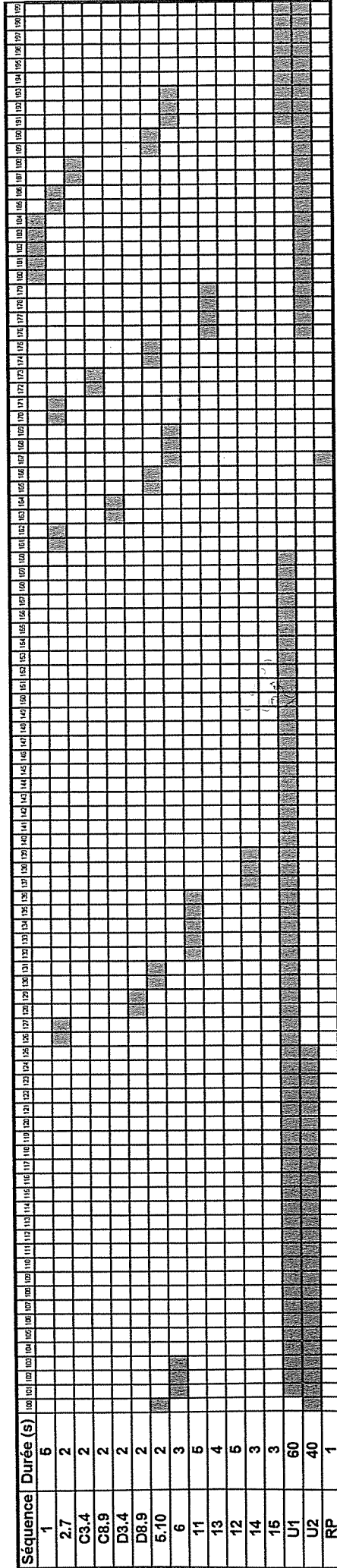
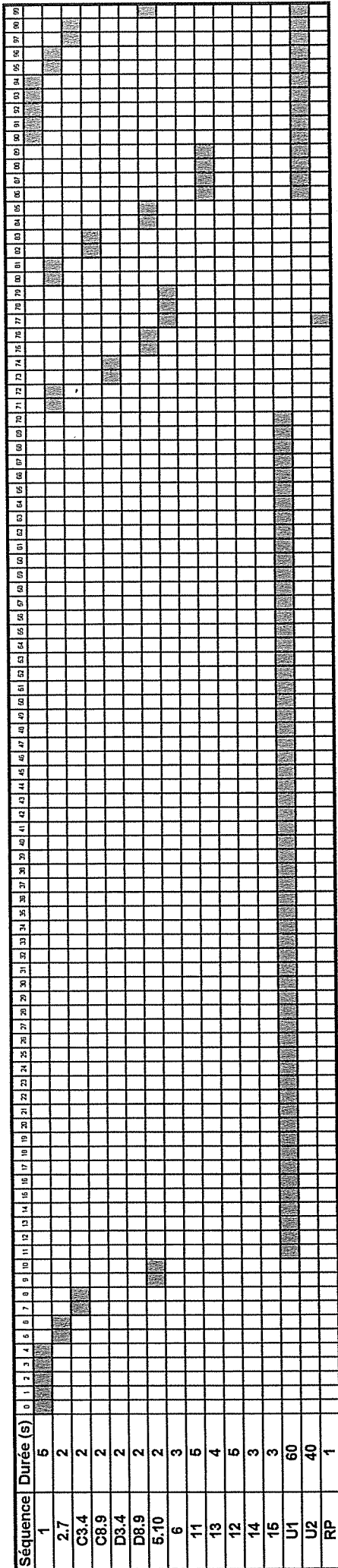
Ce qui nous donne le grafctet de coordination des tâches ci-après:



Question 6 et 7

Voir diagramme de Gantt ci-après.

**DIAGRAMME DE GANTT DES SEQUENCES POUR LE CYCLE DE CHARGEMENT - DECHARGEMENT (PIECE A)
BRAS MANIPULATEUR A UNE PINCE**



Temps de cycle	60s (usinage sur Tour 1) + 30s (attente du Tour 1) = 90s
Cadence	3600/90 = 40 pièces / heure
Taux de charge TOUR 1	60 * 100 / 90 = 64,45 %
Taux de charge TOUR 2	40 * 100 / 90 = 44,45 %

Question 8

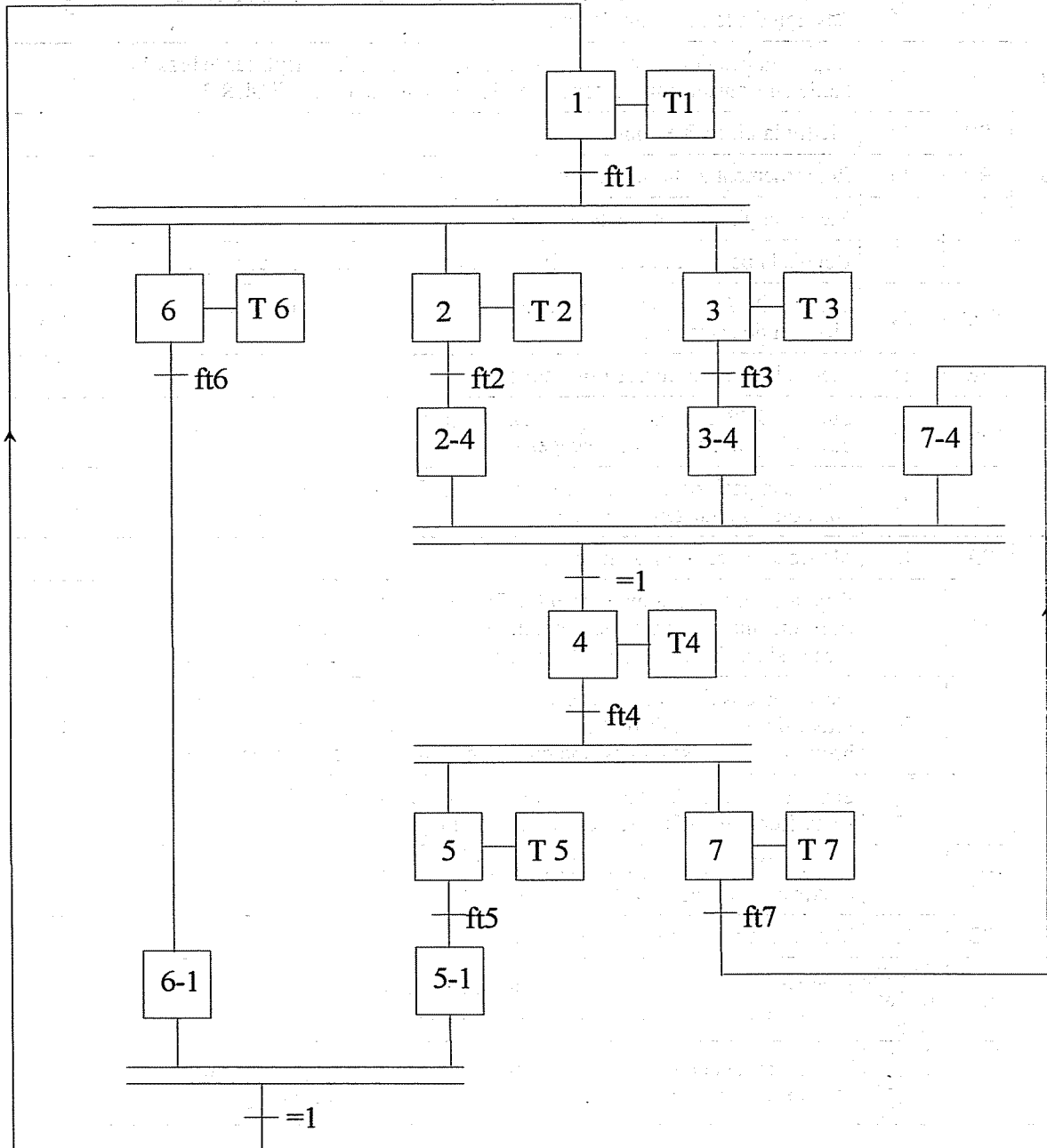
Associations de séquences avec le bras à deux pinces:

Tâche	Séq.	Durée	Description de la séquence	N° trajet.
T1	2.7	2s	Depuis la position devant le TOUR 1, approcher la pièce du porte-pièce	2
	D3.4	2s	Sur le TOUR 1, saisir la pièce dans le porte pièce, desserrer le porte-pièce, et dégager le bras	3 ET 4
	PA	1s	Mettre la pince A en position active	
	C3.4	2s	Sur le TOUR 1, engager la pièce dans le porte pièce, serrer le porte-pièce, ouvrir la pince du bras et dégager le bras	3 ET 4
	5.10	2s	Depuis la position devant le porte-pièce du TOUR 1, retour du bras en position d'attente devant le tour	5
T2	6	3s	Depuis la position du bras en attente devant le TOUR 1, déplacer le bras à l'aide du transfert linéaire dans la position attente devant le TOUR 2	6
T3	PB	1s	Mettre la pince B en position active	
	RP	1s	Retournement à 180° de la pièce se trouvant dans la pince du bras.	
	PA	1s	Mettre la pince A en position active	
T4	2.7	2s	Depuis la position devant le TOUR 2, approcher la pièce du porte-pièce	7
	D8.9	2s	Sur le TOUR 2, saisir la pièce dans le porte pièce, desserrer le porte-pièce, et dégager le bras	8 ET 9
	PB	1s	Mettre la pince B en position active	
	C8.9	2s	Sur le TOUR 2, engager la pièce dans le porte pièce, serrer le porte-pièce, ouvrir la pince du bras et dégager le bras	8 ET 9
	5.10	2s	Depuis la position devant le porte-pièce du TOUR2, retour du bras en position d'attente devant le tour	10
T5	PA	1s	Mettre la pince A en position active	
	11	5s	Depuis la position attente devant le TOUR 2, déplacer le bras à l'aide du transfert linéaire vers le magasin des pièces usinées MU et déposer la pièce usinée dans une goulotte du magasin MU et dégagement du bras	11
	12	5s	Depuis la position fin de dépose dans le magasin de pièces usinées MU, retour du bras à l'aide du transfert linéaire vers le magasin de pièces brutes MB, et mise en position du bras en attente de saisie pièce brute	12
	1	5s	Saisir une pièce (A ou B ou C) dans le magasin de brut MB et la transférer vers le TOUR 1 en attente d'usinage	1
	C3.4	2s	Sur le TOUR 1, engager la pièce dans le porte pièce, serrer le porte-pièce, ouvrir la pince du bras et dégager le bras	3 ET 4
	PB	1s	Mettre la pince B en position active	
T6	U1	A: 60s B: 58s C: 56s	Fermeture de la porte de sécurité du TOUR 1 puis usinage d'une pièce (A ou B ou C). Ouverture de la porte de sécurité en fin d'usinage	
T7	U2	A: 40s B: 42s C: 36s	Fermeture de la porte de sécurité du TOUR 2 puis usinage d'une pièce (A ou B ou C). Ouverture de la porte de sécurité en fin d'usinage	

Tableau d'antériorité des tâches:

Pour faire	Il faut que soit(ent) terminée(s)
T1	T5 et T6
T2	T1
T3	T1
T4	T2 et T3 et T7
T5	T4
T6	T5
T7	T4

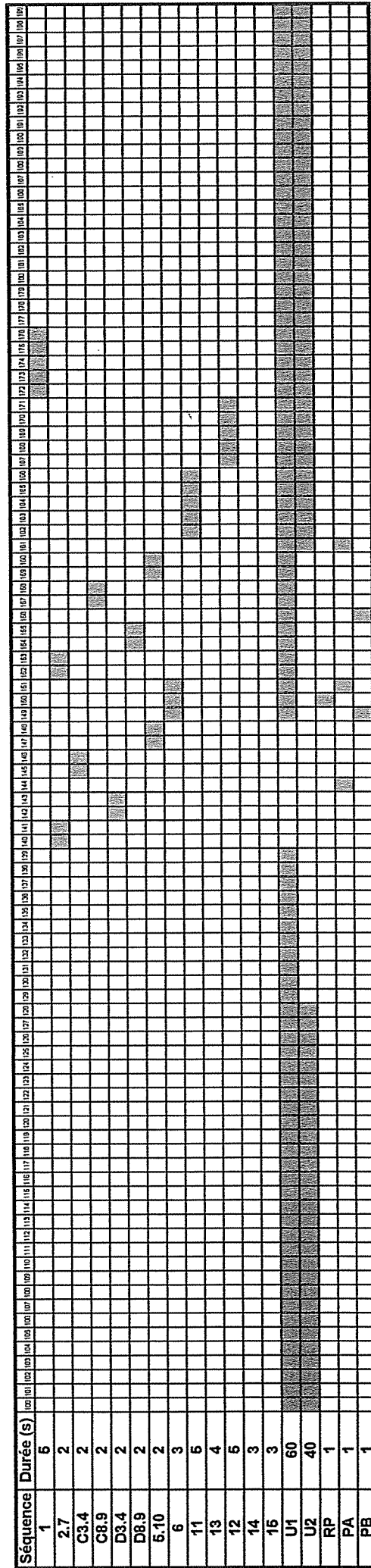
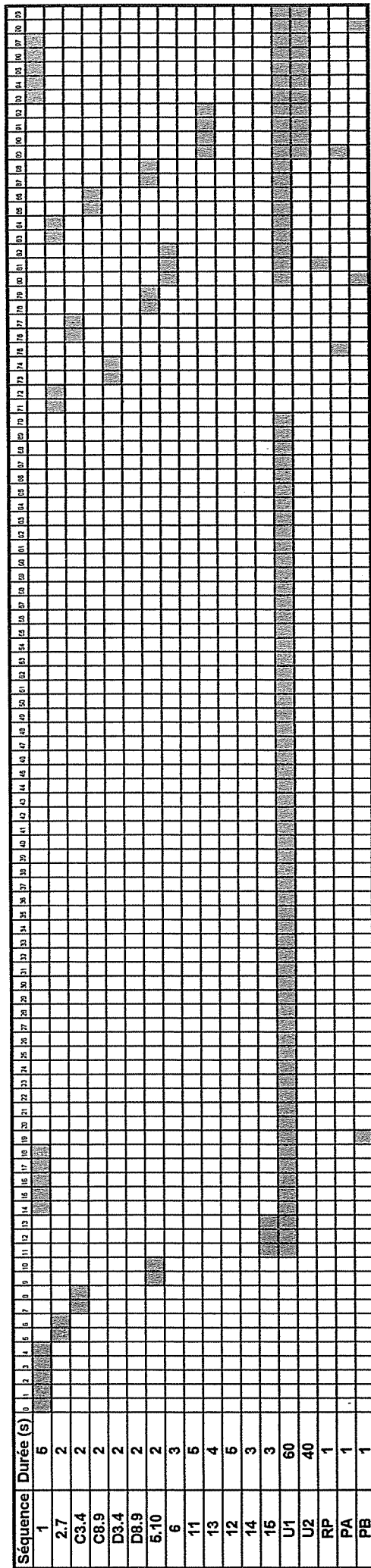
Ce qui nous donne le grafcet de coordination des tâches ci-après:



Question 9 et 10

Voir diagramme de Gantt ci-après:

**DIAGRAMME DE GANTT DES SEQUENCES POUR LE CYCLE DE CHARGEMENT - DECHARGEMENT (PIECE A)
BRAS MANIPULATEUR A DEUX PINCES**

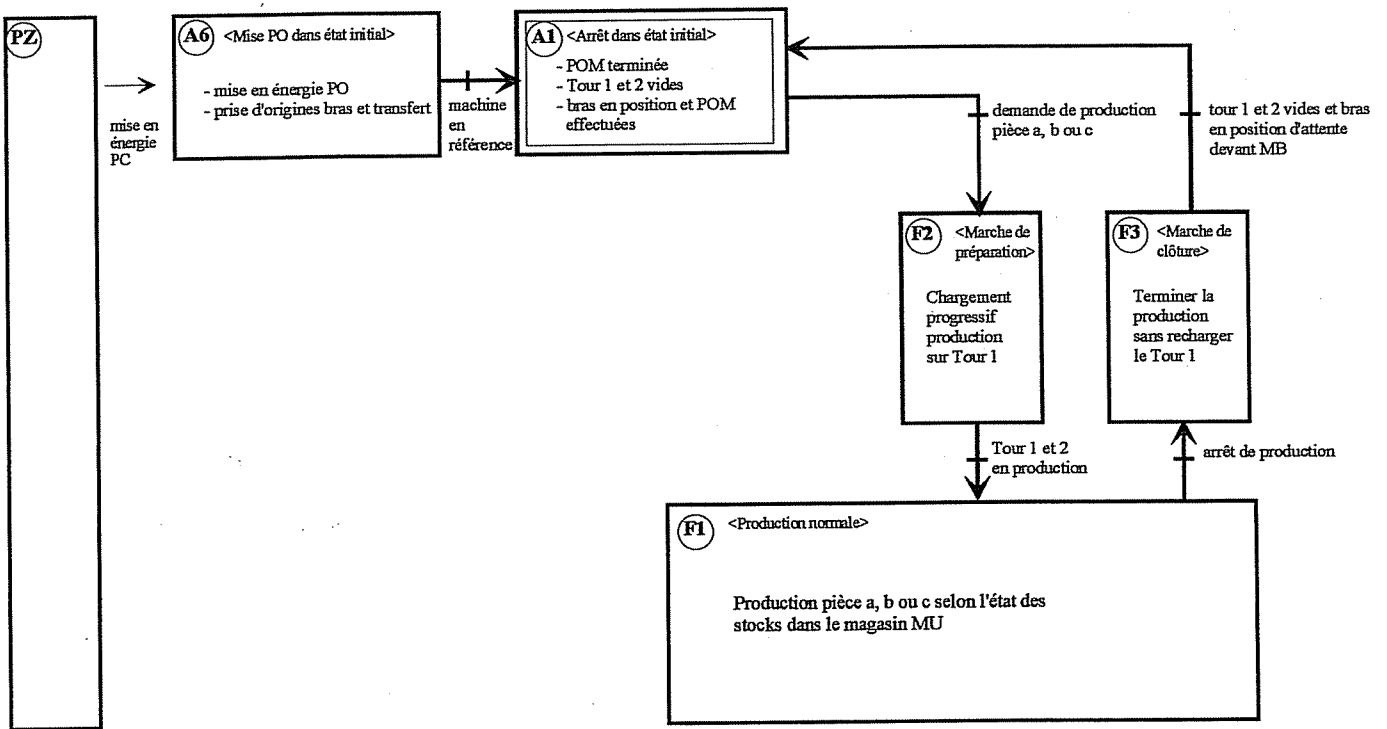


Temps de cycle	60s (usage sur Tour 1) + 9s (attente du Tour 1) = 69s
Cadence	3600/69 = 52 pièces / heure
Taux de charge TOUR 1	60 * 100 / 69 = 87 %
Taux de charge TOUR 2	40 * 100 / 69 = 58 %

On constate que l'adoption d'un bras à deux pinces permet un gain de 21 secondes sur le temps de cycle. Une réduction du temps d'usinage sur le tour 1 (en diminuant le temps de perçage grâce au forage vibratoire) permettrait d'accroître encore la productivité. Avec un temps d'usinage sur le tour 2 de 40s, le temps de cycle pourrait descendre à 49 secondes (car il y a 9 secondes pour le déchargement – chargement). Il faudrait dans ce cas que le temps d'usinage sur le tour 1 descende à 37 secondes (car il y a 3s de transfert du Tour 1 au Tour 2).

Question 11

GEMMA partiel du démarrage et de l'arrêt d'une production:



II Deuxième partie

QUESTION 12

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation 1 qui s'écrit :

$$e_f(t) = x(t) - x(t-\tau)$$

et compte tenu du théorème du retard, on a :

$$E_f(s) = X(s) - e^{-s\tau} X(s) = (1 - e^{-s\tau}) X(s)$$

Chaque lèvre étant supposée couper une épaisseur identique, l'épaisseur totale coupée est telle que :

$$E(s) = l (1 - e^{-s\tau}) X(s)$$

La fonction de transfert demandée est donc :

$$H_{coupe}(s) = \frac{E(s)}{X(s)} = l (1 - e^{-s\tau})$$

QUESTION 13

Dans le cas d'une oscillation sinusoïdale combinée avec l'avance telle que :

$$x(t) = x_0 + f_l t / \tau + a \sin(2\pi n t / \tau),$$

l'épaisseur coupée par une lèvre, donnée par l'équation (1), devient :

$$e_f(t) = f_l + a \sin(2\pi n t / \tau) - a \sin(2\pi n t / \tau - 2\pi n)$$

Soit, en symétrisant, puis regroupant les fonctions trigonométriques :

$$e_f(t) = f_l + a \sin(2\pi n t / \tau - \pi n + \pi n) - a \sin(2\pi n t / \tau - \pi n - \pi n)$$

$$e_f(t) = f_l + 2 a \sin(\pi n) \cos(2\pi n t / \tau - \pi n)$$

Ceci montre clairement que si l'amplitude des oscillations est inférieure à $f_l/2$, l'épaisseur est toujours positive et la coupe est continue. Pour des amplitudes plus élevées, la coupe n'est continue que si $e_f(t) > 0 \forall t$, ce qui implique que $f_l > 2 a \sin(\pi n)$, soit :

$$a |\sin(\pi n)| < f_l / 2.$$

QUESTION 14

Le cas qui convient pour obtenir des oscillations entretenues est le troisième car il faut apporter de l'énergie aux oscillations afin de compenser les pertes dues au terme d'amortissement de la tête vibrante (coefficient c , sur le schéma de la figure 13).

QUESTION 15

Dans le cadre de l'approximation quasi stationnaire et de la linéarisation introduites dans le sujet, l'effort de pénétration est proportionnel à l'épaisseur coupée. En appliquant la transformée de Laplace, on obtient alors :

$$F_p(t) = K_f D e(t) \rightarrow F_p(s) = K_f D E(s)$$

Donc :

$$H_{effort}(s) = \frac{F_p(s)}{E(s)} = K_f D$$

QUESTION 16

Par application de la loi fondamentale de la dynamique et, compte tenu de l'orientation de la force de pénétration qui provoque un recul de la tête vibrante, le mouvement axial s'écrit :

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx_v(t)}{dt} + k x_v(t) = -F_p(t)$$

$$m \frac{d^2 (x_a(t) + x_v(t))}{dt^2} + c \frac{dx_v(t)}{dt} + k x_v(t) = -F_p(t)$$

Soit, la vitesse d'avance étant considérée comme constante :

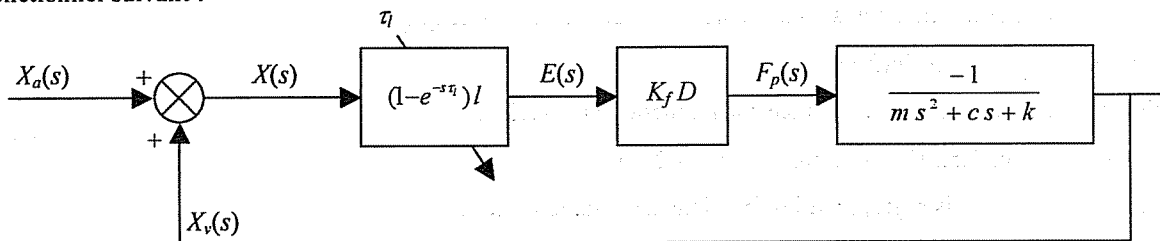
$$m \frac{d^2 x_v(t)}{dt^2} + c \frac{dx_v(t)}{dt} + k x_v(t) = -F_p(t)$$

La fonction de transfert correspondante, exprimant l'effet de F_p sur x_v , s'obtient en appliquant la transformée de Laplace et en considérant les conditions initiales comme nulles, ce qui donne :

$$H_{tête}(s) = \frac{X_v(s)}{F_p(s)} = -\frac{1}{m s^2 + c s + k}$$

QUESTION 17

En reportant les fonctions de transfert trouvées dans le schéma bloc de la figure 14, on obtient le schéma fonctionnel suivant :



La fonction de transfert du système Pièce – Outil – Machine en interaction avec la coupe s'obtient directement par l'application de la formule classique des systèmes bouclés : $K H / (1 + K H)$, ce qui donne :

$$\frac{X_v(s)}{X_a(s)} = \frac{-(1 - e^{-s\tau_i}) l K_f D / (m s^2 + c s + k)}{1 + (1 - e^{-s\tau_i}) l K_f D / (m s^2 + c s + k)}$$

En posant $K = l K_f D$, on obtient :

$$\frac{X_v(s)}{X_a(s)} = \frac{-(1 - e^{-s\tau_i}) K / (m s^2 + c s + k)}{1 + (1 - e^{-s\tau_i}) K / (m s^2 + c s + k)}$$

Cette fonction de transfert peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{X_v(s)}{X_a(s)} = \frac{-K / (m s^2 + c s + k)}{1 / (1 - e^{-s\tau_i}) + K / (m s^2 + c s + k)}$$

QUESTION 18

La fonction de transfert complexe du système pièce – outil – machine est obtenue en remplaçant s par $j\omega$, ce qui donne :

$$\frac{X_v(\omega)}{X_a(\omega)} = \frac{-K / (-m \omega^2 + j c \omega + k)}{1 / (1 - e^{-j\omega\tau_i}) + K / (-m \omega^2 + j c \omega + k)}$$

Par comparaison avec celle d'un système à retour unitaire classique, sans retard, dont la fonction de transfert en boucle fermée s'écrit $KH(\omega)/(1 + KH(\omega))$:

- $H(\omega) = 1/(-m\omega^2 + jc\omega + k)$ représente la fonction de transfert en boucle ouverte de la tête vibrante.
- K représente un gain lié à la dureté du matériau que l'on est en train d'usiner.
- Le signe moins du numérateur provient des conventions d'orientation et n'a pas d'effet sur la stabilité.
- Le terme $1/(1 - e^{-j\omega\tau})$ représente le phénomène cyclique de coupe. Il remplace le 1 du dénominateur de la fonction de transfert d'un classique système sans retard et à retour unitaire. Il amène à reconsidérer le critère de stabilité.

Habituellement, la limite de stabilité est obtenue lorsque le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée est égal à 0, c'est à dire, lorsque le lieu représentant la fonction de transfert en boucle ouverte passe par le point -1 , soit : $KH(\omega) = -1$. Dans le cas présent, la limite sera donnée par :

$$\frac{K}{k - m\omega^2 + jc\omega} = -\frac{1}{1 - e^{-j\omega\tau}}$$

Le critère simplifié de Nyquist, ou critère du revers, s'applique aux systèmes stables en boucle ouverte. Il indique qu'un tel système est stable en boucle fermée si et seulement si le lieu de Nyquist en boucle ouverte laisse le point critique $(-1 + 0j)$ sur sa gauche quand la fréquence varie de 0 à l'infini.

Dans le cas présent, la stabilité sera garantie si le lieu de $KH(\omega) = K/(-m\omega^2 + jc\omega + k)$ laisse lieu de $1/(1 - e^{-j\omega\tau})$ sur sa gauche.

Sur la figure 8, on voit que le système est stable dans le cas où $K = 9\,000$, car les deux lieux ne se rencontrent pas et sont disposés de telle sorte que le critère du revers soit satisfait.

Par contre, pour $K = 12\,000$, il y a deux intersections et il existe donc une plage d'instabilité entre les points (ω_1, ω_2) d'une part et (ψ_1, ψ_2) d'autre part.

Etant donné que l'exponentielle $e^{j\psi}$ est périodique en ψ , de période 2π , il y aura une infinité de plages d'instabilité délimitées par $\{\omega_1 < \omega < \omega_2, \psi_1 + 2i\pi < \psi < \psi_2 + 2i\pi\}$ (avec i entier).

Ainsi :

- Pour toute valeur de ψ hors des intervalles $]\psi_1 + 2i\pi, \psi_2 + 2i\pi[$, le point représentatif de $F_2(\psi)$ se trouve à gauche du lieu de Nyquist de $F_1(\omega)$. Le système est alors stable et si des oscillations sont présentes, elles décroissent jusqu'à leur extinction.
- Pour $\psi = \psi_1 + 2i\pi$ ou $\psi = \psi_2 + 2i\pi$, on se situe à la limite de stabilité. Alors, les oscillations ne croissent pas spontanément. Elles ne décroissent pas non plus mais demeurent auto-entretenues.
- Pour toute valeur de ψ situées dans l'un des intervalles $]\psi_1 + 2i\pi, \psi_2 + 2i\pi[$, le point représentatif de $F_2(\psi)$ se trouve à droite du lieu de Nyquist de $F_1(\omega)$. Le système est alors instable et il engendre des oscillations croissantes, de pulsation comprise entre ω_1 et ω_2 . Ces oscillations ne cesseront de croître que lorsque l'amplitude sera telle que l'outil sorte de la matière (ce qui causera une réduction de l'excitation des vibrations puisque l'effort de coupe deviendra nul pendant le temps d'interruption de coupe).

QUESTION 19

Pour déterminer analytiquement les limites de stabilité données par les intersections des lieux de $F_1(\omega)$ et $F_2(\psi)$, il suffit de résoudre l'équation à valeurs complexes :

$$\frac{K}{k - m\omega^2 + jc\omega} = -\frac{1}{1 - e^{-j\psi}}$$

En effectuant les produits en croix pour éliminer les dénominateurs, on obtient :

$$k - m\omega^2 + jc\omega = -K(1 - e^{-j\psi}) = -K(1 - \cos(\psi) + j\sin(\psi))$$

En identifiant séparément les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$K + k - m \omega^2 = K \cos(\psi)$$

$$c \omega = -K \sin(\psi)$$

On sépare ω , d'une part, en additionnant les carrés de ces deux équations et ψ , d'autre part, en faisant leur quotient, ce qui donne tout d'abord :

$$(K + k - m \omega^2)^2 + (c \omega)^2 = K^2$$

d'où :

$$\omega^2 = \frac{K + k - c^2/2m \pm \sqrt{(K + k - c^2/2m)^2 - k(2K + k)}}{m}$$

et ensuite :

$$\tan(\psi) = \frac{-c \omega}{K + k - m \omega^2}$$

Condition d'existence des intersections de $F_1(\omega)$ et $F_2(\psi)$.

Pour que les solutions données par l'équation en ω ci-dessus existent, il faut que ω^2 soit réel, soit :

$$(K + k - c^2/2m)^2 - k(2K + k) \geq 0$$

$$(c^2/2m)^2 - 2(K + k) c^2/2m + K^2 \geq 0$$

Pour que la deuxième condition soit satisfaite, $c^2/2m$ doit se situer hors de l'intervalle des racines du trinôme, soit :

$$c^2/2m < K + k - \sqrt{k(2K + k)} \quad \text{ou} \quad c^2/2m > K + k + \sqrt{k(2K + k)}$$

Il faut de plus que les valeurs de ω^2 soient positives. Seules donc les valeurs de $c^2/2m$ inférieures à $K + k$ sont acceptables. La condition d'existence d'une intersection entre les lieux de $F_1(\omega)$ et $F_2(\psi)$ est alors :

$$c^2/2m < K + k - \sqrt{k(2K + k)}$$

Valeurs de ω_1 et ω_2 aux intersections de $F_1(\omega)$ et $F_2(\psi)$.

Lorsque cette condition est satisfaite, on obtient les deux solutions réelles positives suivantes :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K + k - c^2/2m - \sqrt{(K + k - c^2/2m)^2 - k(2K + k)}}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K + k - c^2/2m + \sqrt{(K + k - c^2/2m)^2 - k(2K + k)}}{m}}$$

Application numérique :

$$\omega_1 \approx 1638 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_2 \approx 2202 \text{ s}^{-1}$$

QUESTION 20

Valeurs de ψ_1 et ψ_2 aux intersections de $F_1(\omega)$ et $F_2(\psi)$.

La fonction arc-tangente est définie à $i\pi$ près (i entier). Mais, compte tenu de l'équation initiale $c \omega = -K \sin(\psi)$, seules les valeurs de ψ à sinus négatif conviennent (celles situées dans le 3^{ième} et le 4^{ième} quadrant). L'indétermination n'est donc qu'à $2i\pi$ près, soit :

$$\psi = \arctan \frac{-c \omega}{K + k - m \omega^2} + 2i\pi$$

Ceci conduit à deux familles de solutions associées l'une à ω_1 et l'autre à ω_2 .

Application numérique :

$$\psi_1(i) = -0.84 + 2i\pi$$

$$\psi_2(i) = -1.57 + 2i\pi$$

Correspondance avec le tableau.

En exprimant τ_1 et τ_2 en seconde, on a :

$$\tau_1(i) = \frac{\psi_1(i)}{\omega_1} = \frac{-0.84 + 2i\pi}{1638}$$

$$\tau_2(i) = \frac{\psi_2(i)}{\omega_2} = \frac{-1.57 + 2i\pi}{2202}$$

soit :

$$\tau_1 = \{ 3.32 \cdot 10^{-3} \text{ s}, 7.15 \cdot 10^{-3} \text{ s}, 10.99 \cdot 10^{-3} \text{ s}, 14.83 \cdot 10^{-3} \text{ s}, 18.66 \cdot 10^{-3} \text{ s} \}$$

$$\tau_2 = \{ 2.14 \cdot 10^{-3} \text{ s}, 4.99 \cdot 10^{-3} \text{ s}, 7.85 \cdot 10^{-3} \text{ s}, 10.70 \cdot 10^{-3} \text{ s}, 13.55 \cdot 10^{-3} \text{ s} \}$$

Ces valeurs correspondent aux arrondis près à celles données dans le tableau 1 reproduit ci-dessous.

τ étant la période de passage des lèvres et l le nombre de lèvres, la valeurs de la fréquence de rotation $N_{\text{tours/min}}$ s'obtiennent à partir de celles de τ_{secondes} par la formule $N_{\text{tours/min}} = 60 / (l \tau)$, ce qui donne bien les résultats exprimés dans le tableau.

i	1	2	3	4	5
$\tau_{2i} \text{ --- } \tau_{1i}$ (en ms)	2.1 --- 3.3	5.0 --- 7.2	7.8 --- 11.0	10.7 --- 14.8	13.6 --- 18.7
$N_{1i} \text{ --- } N_{2i}$ (en tours/min)	9000 --- 14000	4200 --- 6000	2700 --- 3800	2000 --- 2800	1600 --- 2200

QUESTION 21

La fréquence de rotation $v_{22} = 100$ tours par seconde correspond à $N_{22} = 6000$ tours/minute.

- Lorsque v_r est légèrement inférieure à v_{22} , le système est dans la plage d'instabilité 2. Les oscillations s'amorcent sous l'effet des perturbations, puis croissent exponentiellement.
- Lorsque v_r est égale à v_{22} , le système est à la limite de la plage d'instabilité 2. L'amplitude des oscillations reste sensiblement constante.
- Lorsque v_r est légèrement supérieure à v_{22} , le système est hors de la plage d'instabilité 2 et se rapproche de la plage d'instabilité 1 sans l'atteindre. Il s'éloigne des autres plages d'instabilité. Il est donc stable et, s'il existe des oscillations, celles-ci décroissent exponentiellement.

QUESTION 22

Pour amorcer les vibrations, il faut placer le système dans une plage d'instabilité, par exemple, avec v_r est légèrement inférieure à v_{22} .

Ensuite, pour réguler l'amplitude des oscillations lorsqu'elle est voisine de l'amplitude désirée, on ramène la fréquence de rotation au voisinage d'une limite de la plage d'instabilité, légèrement à l'intérieur de celle-ci si les oscillations sont trop faibles et légèrement à l'extérieur, si elles sont trop fortes.

QUESTION 23

Plages d'instabilité dans le cadre de l'application numérique.

On remarque que les plages 3-4 et 4-5 se recouvrent partiellement. Il en résulte que la limite de stabilité d'une plage se trouve à l'intérieur de la plage d'instabilité avec laquelle elle se chevauche. Si la fréquence de rotation est choisie en un tel point, le système est instable car à l'intérieur d'une plage d'instabilité. Donc, seules les fréquences de rotation égales à 14000, 9000, 6000, 4200 et 3800 tours/minute sont de simples limites entre des plages de stabilité et d'instabilité. Les fréquences de 2800, 2700 et 2200 tours/minute qui sont respectivement à la limite des plages 4, 3 et 5 se trouvent respectivement à l'intérieur des plages 3, 4 et 5 et conduisent donc à des comportements instables.

QUESTION 24

L'équation (10) est identique à l'équation caractéristique qui aurait pu être trouvée à partir de l'équation différentielle du système bouclé pièce - outil - machine parce que, d'une façon générale, le dénominateur d'une fonction de transfert d'un système linéaire que l'on a écrit sous la forme d'une fraction rationnelle est identique, si on l'égalise à zéro, à l'équation caractéristique du système.

Ceci est évident lorsque l'on applique la transformation de Laplace à l'équation différentielle générale, en considérant les conditions initiales comme nulles :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_0 y = u(t)$$

QUESTION 25

En partant de l'équation 10.

$$m s^2 + c s + k + K = K e^{-s\tau}$$

On différencie, en considérant s et τ comme variables :

$$2m s ds + c ds = -K e^{-s\tau} (s d\tau + \tau ds)$$

Par ailleurs, on a $v_r = 1/(l\tau)$ et $dv_r = -d\tau/(l\tau^2)$, soit $d\tau = -l\tau^2 dv_r$. En remplaçant $d\tau$ dans l'expression ci-dessus, on obtient :

$$2m s ds + c ds = -K e^{-s\tau} (-s l \tau^2 dv_r + \tau ds)$$

d'où :

$$\frac{ds}{dv_r} = \frac{IK e^{-s\tau} s \tau^2}{2m s + c + K e^{-s\tau} \tau} = \frac{l (s \tau)^2 K e^{-s\tau}}{2m s^2 + cs + s \tau K e^{-s\tau}}$$

En posant $s = \alpha + j\omega$ ce qui veut dire que rechercher les racines de cette équation équivaut à rechercher des solutions de la forme $x_r(t) = x_{r0} + e^{\alpha t} (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))$. On obtient :

$$\frac{d(\alpha + j\omega)}{dv_r} = \frac{l(\alpha + j\omega)^2 K e^{-(\alpha + j\omega)\tau}}{2m(\alpha + j\omega)^2 + c(\alpha + j\omega) + s \tau K e^{-(\alpha + j\omega)\tau}}$$

Au voisinage d'un régime stationnaire tel que $\alpha = 0$, on a alors :

$$\frac{d(\alpha + j\omega)}{dv_r} \approx \frac{l(\omega \tau_1)^2 K e^{-j\omega \tau_1}}{2m \omega^2 - jc \omega - j\omega \tau_1 K e^{-j\omega \tau_1}}$$

QUESTION 26

Dans les conditions de l'application numérique et au point considéré, on a $l = 2$, $\omega \tau_1 = 2\pi n$, $n = -0.25 + i$, $e^{j\omega \tau_1} = j$, $K + k - m\omega^2 = 0$, $c\omega_2 = K$ et $K = 2k$.

En remplaçant $e^{j\omega \tau_1}$, $m\omega^2$, $c\omega$ et $\omega \tau_1$ par leur valeur correspondant à ce cas particulier, on obtient :

$$\frac{d(\alpha + j\omega)}{dv_r} \approx \frac{j l (2\pi n)^2 K}{2(K + k) - j K + 2\pi n K} \approx \frac{2j(2\pi n)^2}{3 + 2\pi n - j}$$

En retenant $n = 1.75$, on a :

$$\frac{d(\alpha + j\omega)}{dv_r} \approx \frac{2j(3.5\pi)^2}{3 + 3.5\pi - j} \approx \frac{242j}{14 - j} \approx \frac{242}{197}(14j - 1)$$

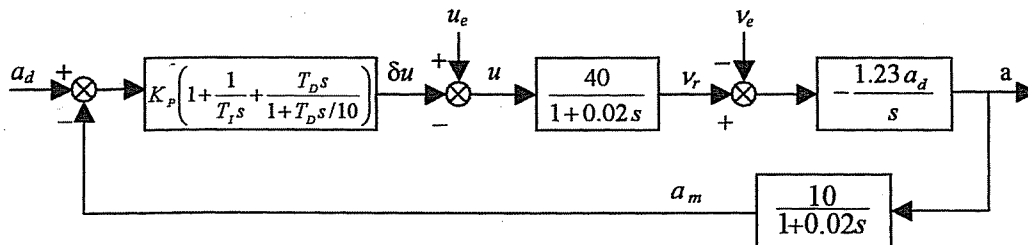
En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\frac{d\omega}{dv_r} \approx 17.2 \tag{1}$$

$$\frac{d\alpha}{dv_r} \approx -1.23$$

QUESTION 27

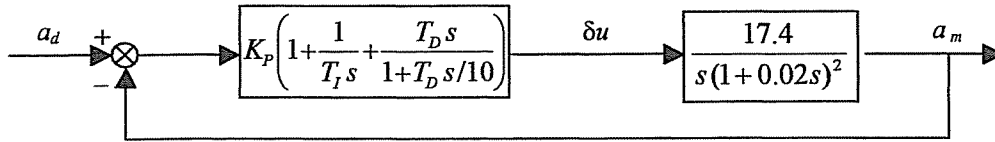
Compte tenu de toutes des données de l'énoncé, le schéma fonctionnel du système d'asservissement de l'amplitude vibratoire est le suivant :



On notera en particulier le signe moins dans la chaîne d'action du correcteur sur l'ensemble variateur + électrobroche. Il résulte du fait qu'il faut diminuer la fréquence de rotation pour entrer dans la plage d'instabilité, afin de faire croître l'amplitude des oscillations. Ce signe moins est compensé par le signe moins du bloc situé en bout de la chaîne directe, qui représente le comportement de l'amplitude des vibrations en fonction de la fréquence de rotation.

On notera aussi que l'effet de u_e et de v_e se compensent car u_e sert à établir la fréquence de rotation d'équilibre, pour laquelle, lorsqu'elle est atteinte, l'amplitude des oscillations est constante, ce qui est représenté par l'intégrateur de sortie qui reçoit une valeur nulle lorsque $v_r = v_e$ et $\delta u = 0$.

Dans ces conditions, si on néglige le régime transitoire de l'électrobroche, pendant lequel v_r n'a pas atteint la valeur demandée (égale à $40 u$), on peut supprimer les entrées de u_e et de v_e et les comparateurs correspondant. Alors, en regroupant les trois blocs représentant le variateur + l'électrobroche + le processus vibratoire + le capteur d'amplitude et en tenant compte des signes, on obtient le schéma suivant :



QUESTION 28

Fonction de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée, avec correcteur proportionnel.

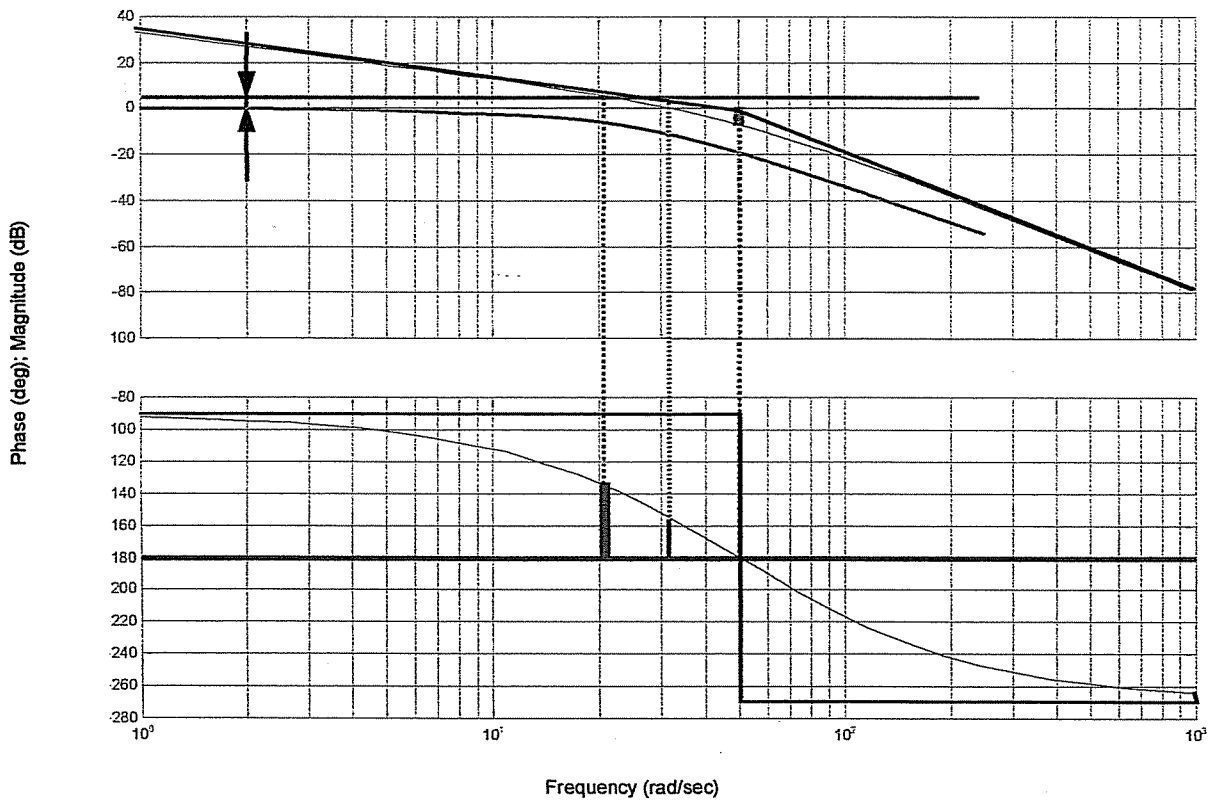
La fonction de transfert en boucle ouverte est égale à :

$$\frac{17.4}{s(1 + 0.02s)^2} \rightarrow \frac{17.4}{j\omega(1 + 0.02j\omega)^2}$$

Les diagrammes de Bode sont tracés sur la figure ci-dessous. Ils présentent une pente de -20 dB/décade et un déphasage de -90 degrés en basse fréquence, à cause du facteur s du dénominateur. En haute fréquence, la pente est de -60 dB/décade et le déphasage de -270 degrés, car le dénominateur est d'ordre 3 en s et s n'apparaît pas au numérateur. Le point de cassure est celui pour lequel $0.02 \omega = 1$, soit $\omega = 50$.

Au point de cassure, sur les asymptotes, le gain vaut $20 \log(17.4/20) = -1.2$ dB. La courbe de gain passe 6 dB en dessous des asymptotes car la cassure est d'ordre 2. Le déphasage atteint -180 degrés.

Bode Diagrams



- Gain maxi de 3 dB
- Marge de phase de 45°
- Marge de gain de 17 dB
- Gain en boucle fermée

Si on applique un correcteur proportionnel de gain 0 dB (soit $K_p = 1$), la marge de phase qui se lit au point où la courbe de gain traverse le niveau 0 dB (celui-ci se trouve à environ 32 s^{-1} , matérialisé par le trait discontinu vertical situé au milieu de la figure) est voisine de 25 degrés, ce qui est insuffisant. La marge de gain qui se lit au point où le déphasage atteint -180 degrés est d'environ $6 + 1.2 = 7.2 \text{ dB}$.

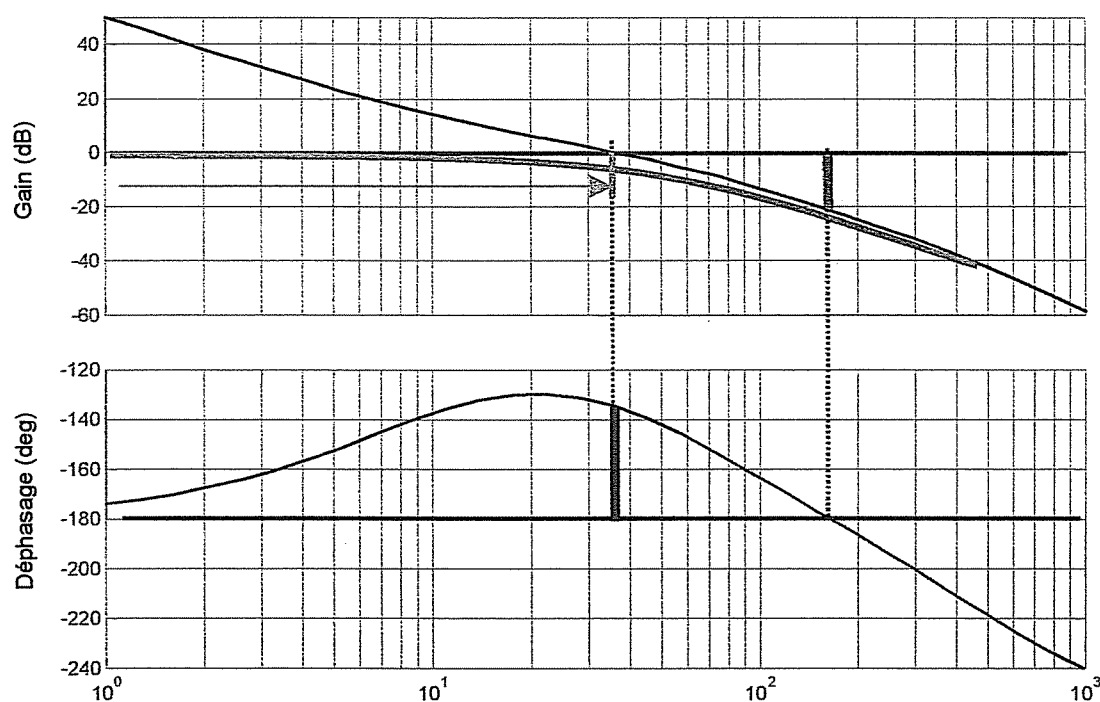
Le correcteur proportionnel devra alors avoir un gain inférieur à 0 dB, de façon à abaisser la courbe de gain jusqu'au niveau où l'on obtient une marge de phase de 45 degrés. Cette marge de phase est disponible au niveau signalé sur la figure par le tracé vertical de gauche, en $\omega \approx 20 \text{ s}^{-1}$. Plutôt que d'abaisser la courbe de gain, on a préféré tracer une droite horizontale située environ 5 dB en dessus du niveau 0 dB. Le gain du correcteur est alors voisin de -5 dB , soit $K_p \approx 10^{-5/20} = 0.56$.

Sur la figure, on a tracé approximativement la courbe de gain en boucle fermée. L'asservissement ainsi réalisé a une bande passante limitée au voisinage de $\omega = 20 \text{ s}^{-1}$, correspondant à la pulsation de croisement entre la courbe de gain du système en boucle ouverte et la droite décalée de $+5 \text{ dB}$, traduisant le gain du correcteur. En basse fréquence, le gain en boucle fermée est de 0 dB, grâce à l'intégrateur qui élimine l'écart statique. En haute fréquence, le gain en boucle fermée décroît de la même manière qu'en boucle ouverte, soit de -60 dB/décade .

La présence de l'intégrateur dans la partie du modèle qui représente la dynamique des oscillations ne garantit toutefois pas un écart nul car il peut y avoir un écart entre la valeur supposée de la fréquence de rotation d'équilibre, établie par modélisation et la fréquence d'équilibre effective, ce qui se traduirait par le fait que les effets de u_e et de v_e ne se compenseraient pas exactement, comme cela a été supposé en question 27, et perturberaient l'intégrateur.

QUESTION 29

Fonction de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée, avec correcteur PID.



- Marge de phase de 45°
- Marge de gain de 20 dB
- Gain en boucle fermée et pulsation de coupure en boucle fermée égale à 35 radian/seconde

L'action intégrale augmente l'ordre du système en basse fréquence : la pente de la courbe de gain passe à -40 dB/décade et le déphasage limite passe à -180 degrés.

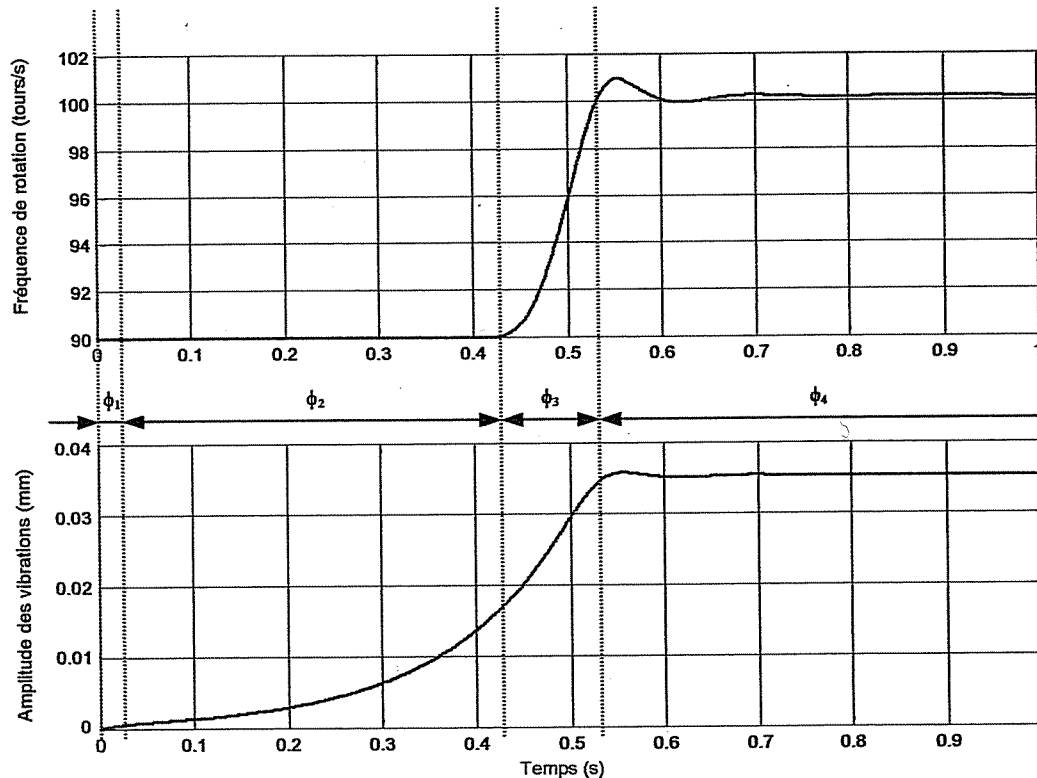
L'action dérivée apporte une avance de phase qui est maximale au voisinage de $\omega = 20 \text{ s}^{-1}$.

On gagne en précision car, grâce à l'action intégrale du correcteur, l'écart statique est nul, même en présence d'un écart entre la fréquence de rotation d'équilibre supposée dans le modèle et la fréquence de rotation d'équilibre effective du système.

On gagne en rapidité de réaction de l'asservissement car, grâce à l'action dérivée qui augmente la phase disponible dans les fréquences élevées, il est possible d'augmenter le gain et d'élargir la bande passante jusqu'à environ 35 s^{-1} .

QUESTION 30

Réponse temporelle, en boucle fermée.



Phase 1 : Début de la pénétration du foret, mise en charge et recul de la tête auto-vibrante

Phase 2 : Régime instable, les oscillations croissent exponentiellement. Tant que leur niveau est insuffisant, l'asservissement ne réagit pas.

Phase 3 : Le PID commence à réagir et ramène progressivement la fréquence de rotation vers la fréquence d'équilibre.

Phase 4 : Stabilisation des oscillations, avec une fréquence de rotation à l'équilibre proche de 100 tours/s.

Le temps d'établissement des oscillations d'environ 0.5s est tout à fait compatible avec l'objectif de fragmentation des copeaux car, compte tenu de l'avance de 0.1 mm/tour et de la fréquence de rotation de 100 tours par seconde, le niveau d'oscillation désiré est atteint après une pénétration de 5 mm. Sur cette profondeur initiale qui est de l'ordre de grandeur du diamètre, il n'est en effet pas nécessaire de fragmenter le copeau. Par contre, à partir d'une pénétration de 2 à 3 fois le diamètre, les oscillations sont bien établies, à un niveau suffisant pour fragmenter les copeaux.

Commentaires sur l'épreuve d'Automatismes Industriels

Première partie

La première partie a été traitée par la plupart des candidats.

Elle faisait appel à des connaissances technologiques dans le domaine des automatismes ainsi qu'à des connaissances sur les méthodes d'analyse et les différents outils de description (algorithmes, GRAFCET, GEMMA)

Le tableau ci-dessous précise pour chaque question le nombre de candidats l'ayant traité (sur un total de 205 copies):

Numéro question	Q 1	Q 2	Q 3	Q 4	Q 5	Q 6	Q 7	Q 8	Q 9	Q 10	Q 11
Nb	141	179	159	143	170	166	143	85	105	69	87

Globalement les résultats de cette épreuve ne sont pas très satisfaisants. Manifestement, les candidats ont traité plus largement la première partie. Les meilleurs résultats ont été obtenus aux questions 6 - 7 et 9 - 10, questions concernant l'étude temporelle à l'aide des diagrammes de Gantt. Concernant les questions d'analyse, les résultats sont moins bons, les méthodes et outils d'analyse étant bien souvent non maîtrisés. Les candidats ont également eu des difficultés sur les questions liées à la technologie (questions 2 et 3)

Deuxième partie

La deuxième partie a été traitée par à peine plus de la moitié des candidats.

Elle faisait appel aux connaissances de base en modélisation des phénomènes mécaniques et en asservissement.

Le tableau ci-dessous précise pour chaque question le nombre de candidats l'ayant traité (sur un total de 205 copies):

Numéro question	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20	Q21
Nb	113	103	103	105	101	99	81	57	11	19
Numéro question	Q22	Q23	Q24	Q25	Q26	Q27	Q28	Q29	Q30	
Nb	13	14	39	32	2	60	87	67	27	

Si les concepts innovants avancés étaient à priori d'un abord difficile, le problème les décortiquait suffisamment, avec des explications détaillées, des questions simples pour la plupart et des résultats intermédiaires. Il était ainsi possible de traiter pratiquement chaque question indépendamment des précédentes.

Les candidats qui ont traité cette partie ont été d'une manière générale plus à l'aise dans les questions faisant appel à la mise en œuvre des outils de l'automatique, comme les transformées de Laplace, les schémas blocs, les diagrammes de Bode, que dans les questions faisant appel à la compréhension des phénomènes et à leur mise en équation. Notamment, il est surprenant que beaucoup n'aient pas su donner une interprétation énergétique correcte de l'entretien des vibrations.

Histogramme de répartition des notes de l'épreuve d'Automatismes Industriels

