

## ELEMENTS DE CORRIGE

## PREMIERE PARTIE

## I. ELABORATION DU MATERIAU

- I.1.1 FGS 600-3 :
- Fonte à graphite sphéroïdal
  - Résistance minimale à la rupture en traction 600 MPa
  - Allongement minimal à rupture 3%

## I.1.2.

Les fontes à graphite lamellaire de par leur structure du graphite comportent des lamelles en "cheveux " de graphite dans une structure ferritique ou perlitique qui sont autant de fissures car ce graphite n'a aucune propriété mécanique. En extension, les « fissures », sièges de concentrations de contraintes vont se propager et provoquer une rupture à faible niveau de contrainte alors qu'en compression la tenue mécanique est très bonne.

Les FGL sont limitées à 400 MPa de résistance à la rupture en traction mais atteignent des niveaux admissibles en compression 3 à 4 fois supérieurs à la contrainte admissible en traction.

Les fontes à graphite sphéroïdal peuvent atteindre des résistances mécaniques à la rupture de 900 MPa et ont sensiblement des propriétés identiques en traction et en compression.

Leur module d'Young est voisin de celui de l'acier et leur A% est d'autant plus faible que leur résistance mécanique est importante. Elles ont un comportement proche de celui d'un acier avec une coulabilité excellente et une fusion à partir de 1350°.

Pour les 2 types de fonte la valeur de Re ou plutôt Rp<sub>0,2</sub> est de l'ordre de 60 à 70 % de la valeur Rm<sub>traction</sub>.

L'allongement à rupture A% est de l'ordre de 1% pour les FGL, il peut varier de 2 à 22 % pour les FGS.

Caractéristiques	FGS	FGL
E(GPa)	170	90 à 130
Rm <sub>traction</sub> (MPa)	350 à 900	150 à 400
Rm <sub>compression</sub> (MPa)	idem traction	600 à 1200
Rp <sub>0,2</sub> (MPa)	220 à 600	100 à 250

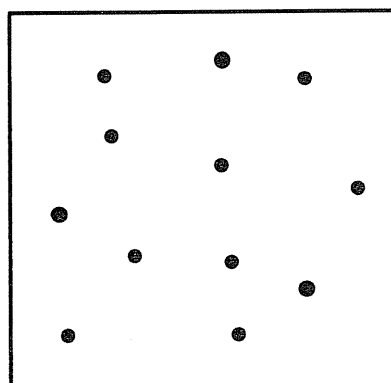
### I.2.1. différentes opérations pour observation métallographique

Opérations successives	Matériels et/ou observations
Prélèvement d'échantillon	tronçonneuse métallographique
Enrobage	Enrobage à chaud automatique (résine époxy ou phénolique) ou enrobage à froid (résine acrylique)
Polissage papier abrasif	Polisseuse à eau automatique ou non papiers 180, 240, 400, 600, 800, 1000, 1200
Nettoyage éventuel	bac à Ultra Sons (US) ou essuyage coton
Polissage à l'alumine ou poudre de diamant	polisseuse avec feutre jusqu'au POLI MIROIR
Rinçage eau	
Rinçage à l'acétone ou à l'alcool	pour chasser l'eau
Séchage	Sèche cheveux
Attaque chimique (1 à 5 s)	Nital 2% à 5 % (alcool avec 2 à 5% d'acide nitrique)
Rinçage	Pour arrêter l'attaque
Rinçage alcool	Pour chasser l'eau
Séchage	Sèche cheveux
Observation microscopique	microscope optique G = 100 à 1000 Microscope électronique à balayage pour grossissement plus grand.

### I.2.2. Structure FGS ferrito-perlitique

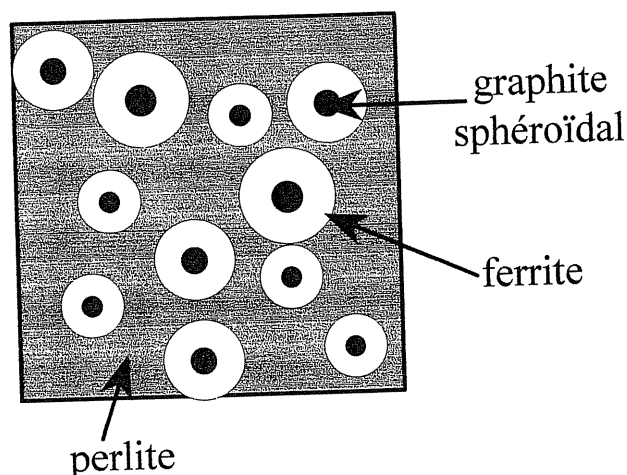
La structure est perlitique mais autour du graphite on obtient de la ferrite car la formation du nodule appauvrit en carbone le matériau proche, donc forme de la ferrite.

sans attaque



nodules de graphite  
visibles à partir  
de G=100

avec attaque et G=500



I.3.1. L'appareil le plus utilisé est le spectromètre à étincelles qui permet à la fois de détecter la présence de différents constituants mais aussi leur proportion (exprimée en masse), on l'appelle souvent spectromètre de masse.

Un échantillon est prélevé en sortie de cubilot dans un petit creuset permanent ou non, on attend sa solidification et son refroidissement, puis cet échantillon est coupé, poli grossièrement puis mis en place dans le spectromètre qui va générer une étincelle entre une électrode et la pièce. L'analyse du spectre des longueurs d'ondes de cette étincelle va permettre de détecter les constituants et leur proportion.

L'ensemble des opérations demande moins de 5 minutes, ce qui permet d'analyser la poche avant coulée ou au tout début, et d'être sûr de sa composition.

*Remarque : le MEB (microscope électronique à balayage) utilisé avec une sonde de castaing permet de détecter les constituants (analyse X), mais ne donne pas de pourcentage, on l'utilise plutôt en fractographie pour détecter les composés au sein de la fracture.*

### I.3.2. Rôles du Magnésium (Mg)

La fonte à graphite sphéroïdal n'est pas une fonte "naturelle" issue du diagramme fer-carbone ou fer-cémentite comme les FGL.

La procédure de sphéroïdisation du graphite est complexe et régie par des règles drastiques.

La fonte de base doit contenir de l'ordre de 3,7 à 3,9% de carbone, 1 à 2,2% de silicium et des teneurs en soufre et en phosphore les plus basses possibles. On peut l'obtenir au cubilot mais la composition la plus précise est obtenue plutôt au four électrique, à arc le plus souvent.

La fonte est ensuite versée dans une poche (5T à la fois) qui sera traitée au magnésium (Mg) afin d'obtenir de la FGS.

Le Mg est introduit en fond de poche (la fonte en fusion est à 1400°C) or, son point d'ébullition est de 1102°C, donc il se sublime (s'évapore) très vite en agitant très fortement le bain et les "bulles" de Mg viennent surnager à la surface, ce Mg va se combiner au soufre présent sous forme d'impuretés et à l'oxygène en solution dans la fonte liquide provoquant donc **une désulfuration et une désoxydation** de la fonte.

De faibles quantités de Mg (Mg résiduel) sont retenues dans le métal liquide (à hauteur de 0,03 à 0,04%) celui-ci interviendra dans le processus de sphéroïdisation. Il faut utiliser rapidement cette fonte car le Mg résiduel s'"évanouit" avec le temps.

Le Mg en faible proportion limite la proportion de cémentite ( $Fe_3C$  : carbure de fer) dans la pièce finale, en limitant la précipitation des carbures ( un pourcentage de Mg résiduel  $> 0,08\%$  peut inverser le processus). Le Mg joue le rôle d'inhibiteur par rapport à la graphitisation en lamelles, la solidification se fait d'abord avec formation de cémentite, il s'avère le plus souvent nécessaire de procéder à l'INOCULATION de Ferro-alliages, en général (Fer-Si) car le **silicium est un graphitisant énergique**. Cela amorcera le phénomène de précipitation du graphite en assurant une forme sphéroïdale grâce aussi au **Mg** qui **modifie les tensions superficielles** et aide le graphite à précipiter sous forme de sphères. L'agent d'inoculation peut être introduit dans le moule (comme un noyau) dans le système d'alimentation afin que la fonte le "mouille" au passage et subisse son effet... La **température de refroidissement** est aussi un élément déterminant... Pour cette pièce, la FGS 600-3 est obtenue directement en sortie de moule, par un processus parfaitement contrôlé et maîtrisé.

## II. REALISATION DES PIECES

### II.1.1. Deux solutions pour la position du plan de joint :

-soit passant par l'axe ce qui occasionnerait :

-une contre dépouille pour la couronne extérieure, ce qui nécessiterait un noyau de grande taille en plusieurs morceaux pour obtenir la forme,

-de plus, la coulée s'effectuant nécessairement avec PJ horizontal sur cette chaîne de moulage, la possible différence de qualité de la pièce entre la partie basse et la partie haute (remontée des crasses, particules de sable...) pourrait générer des problèmes d'équilibrage...

-soit perpendiculaire à l'axe :

-aucune contre-dépouille,

-un seul noyau simple et de taille modeste,

-une santé de pièce "homogène" sur la couronne (axisymétrie).

Sa position sur la couronne cylindrique permet d'obtenir les nervures et autres formes sans contre-dépouille.

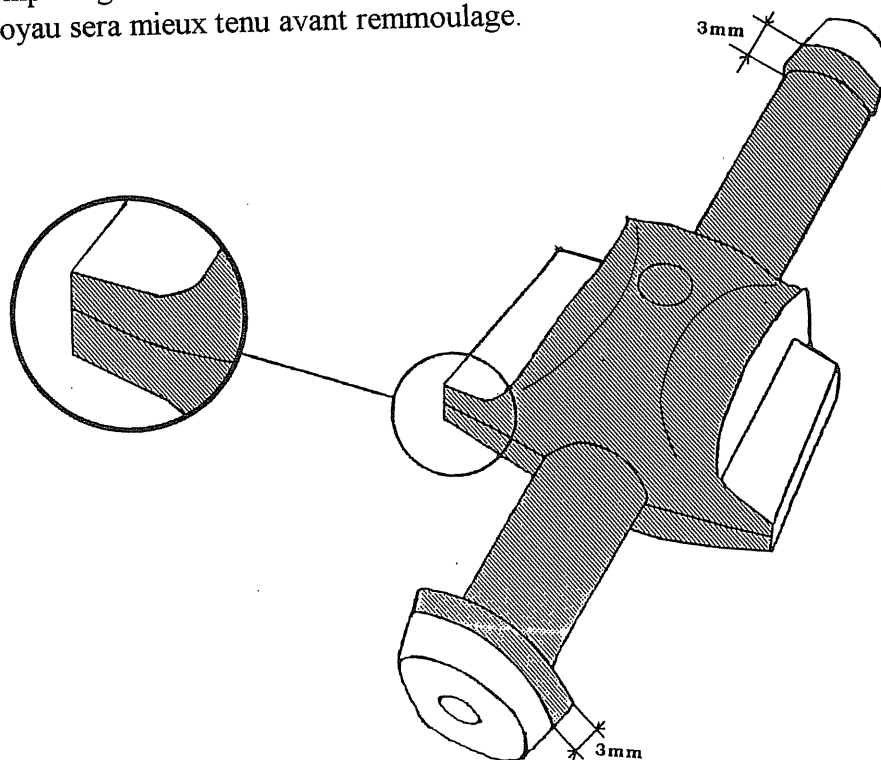
C'est assurément la meilleure solution.

*De plus on peut voir sur le dessin le changement de sens des dépouilles...*

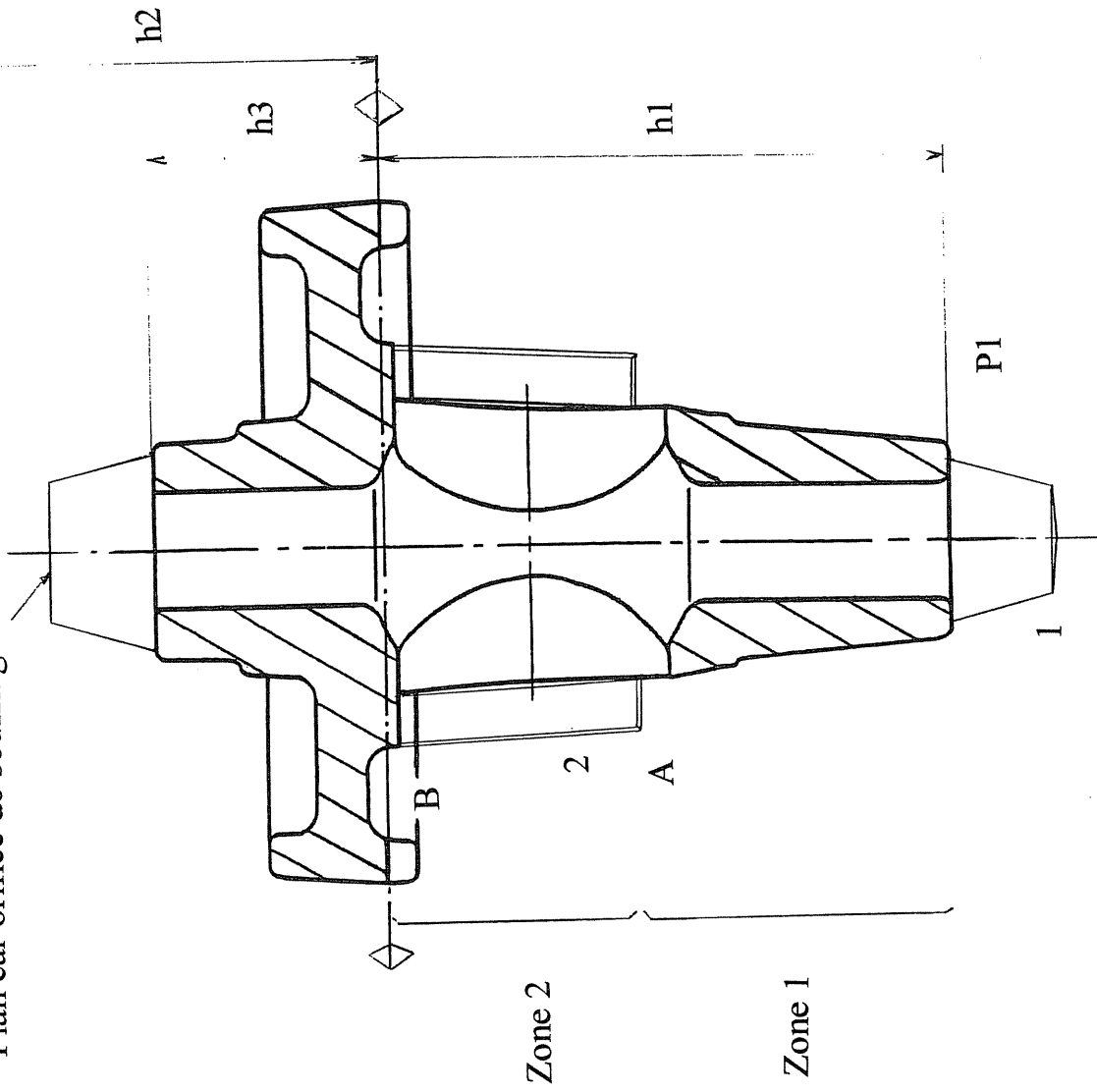
### II 2.1.2. Partie supérieure comme indiquée sur le dessin page suivante.

On a intérêt à mettre la partie la plus "grande" dans le châssis inférieur afin de profiter au mieux de la poussée par gravité pour le remplissage, ce n'est pas ici une véritable coulée en source, le remplissage sera donc moins calme.

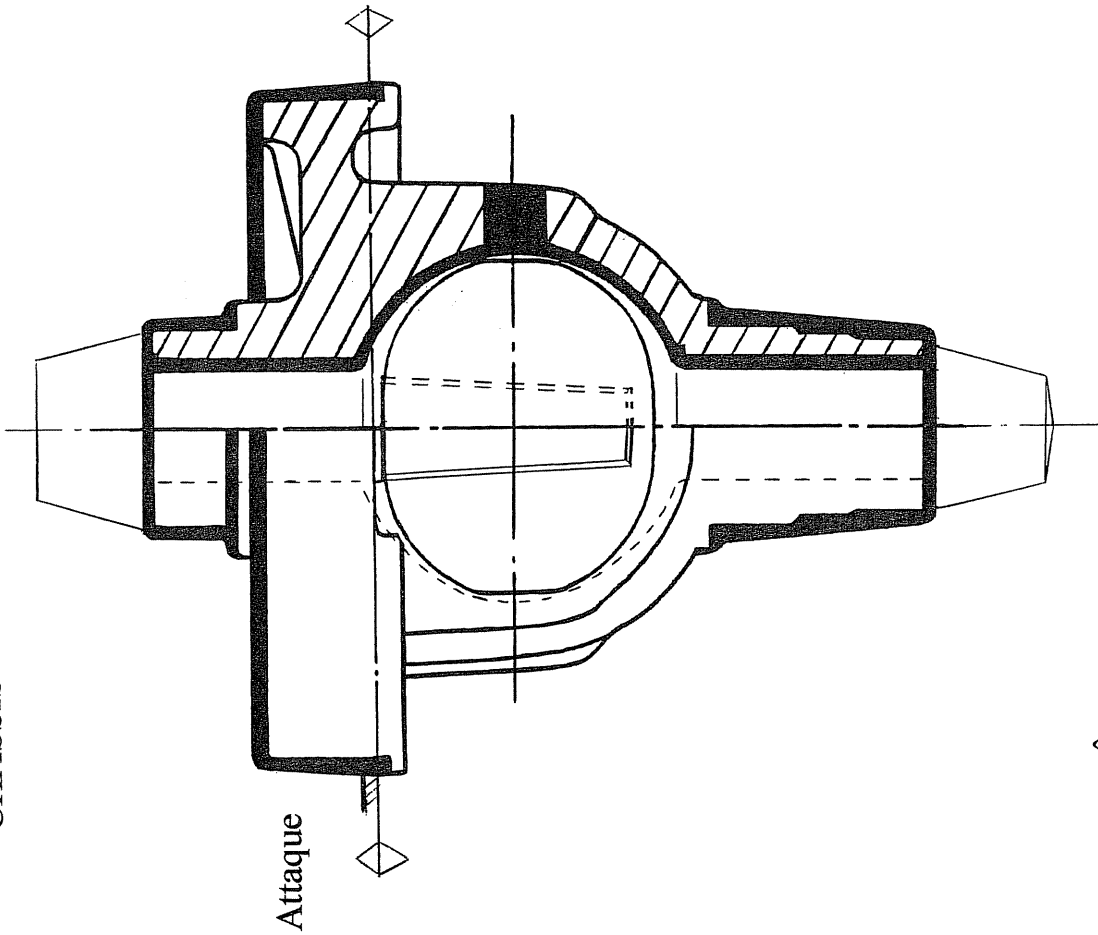
De plus le noyau sera mieux tenu avant remmoulage.



Plan car orifice de soufflage



CHÂSSIS HAUT



II. 2.1.3. Il faut ajouter aux formes intérieures voulues sur la pièce les portées de noyau aux extrémités des cylindres (on pourra comme dessiné, réaliser tout ou partie des plans des faces, à noter que pour 1, lors de la fabrication du noyau, on pourra réaliser une légère dépouille pour l'extraction du noyau (son PJ de réalisation étant le plan P1)).

Il faudra des dépouilles sur les parties 2 afin que l'empreinte des portées de noyau soit démoulable sans arrachement.

On notera les nécessaires "talons" pour l'indexage en rotation du noyau.

II.2.1.4. La pièce est alimentée par le plan de joint, la fonte en fusion va donc couler jusqu'en bas.

Dans la zone 1, montée du liquide autour du noyau avec une pression faible puisque le système n'est pas en charge, on a uniquement compression du noyau par la pression s'exerçant radialement.

A partir de A, le liquide va être en contact avec la sphère du noyau et progressivement avec les parties de section oblongue d'ouverture dans la sphère. La pression est toujours faible donc légère compression radiale. On a apparition d'une poussée verticale dans l'axe (car la pièce est axisymétrique) due à la poussée d'Archimède.

Dans la zone 2, la poussée sera d'autant plus grande que le volume immergé de la sphère sera grand.

A partir de B, l'ensemble de la fonte en partie passe est en "charge", la pression augmente donc (pression radiale).

### Moule rempli :

*On peut éventuellement calculer :*

La hauteur du châssis étant de 250 mm on a une pression maxi en bas du moule de :

$$P_{bas} = \rho g(h_1 + h_2) = 7600 \times 9.81 \times (0.25 + 0.105) = 26467 Pa \approx 0.26 Bars$$

$$P_{haut} = \rho g(h_1 - h_3) = 7600 \times 9.81 \times (0.25 - 0.045) = 15284 Pa \approx 0.15 Bars$$

Volume de la sphère entière

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{94}{2} \right)^3 \approx 4.3510^5 mm^3$$

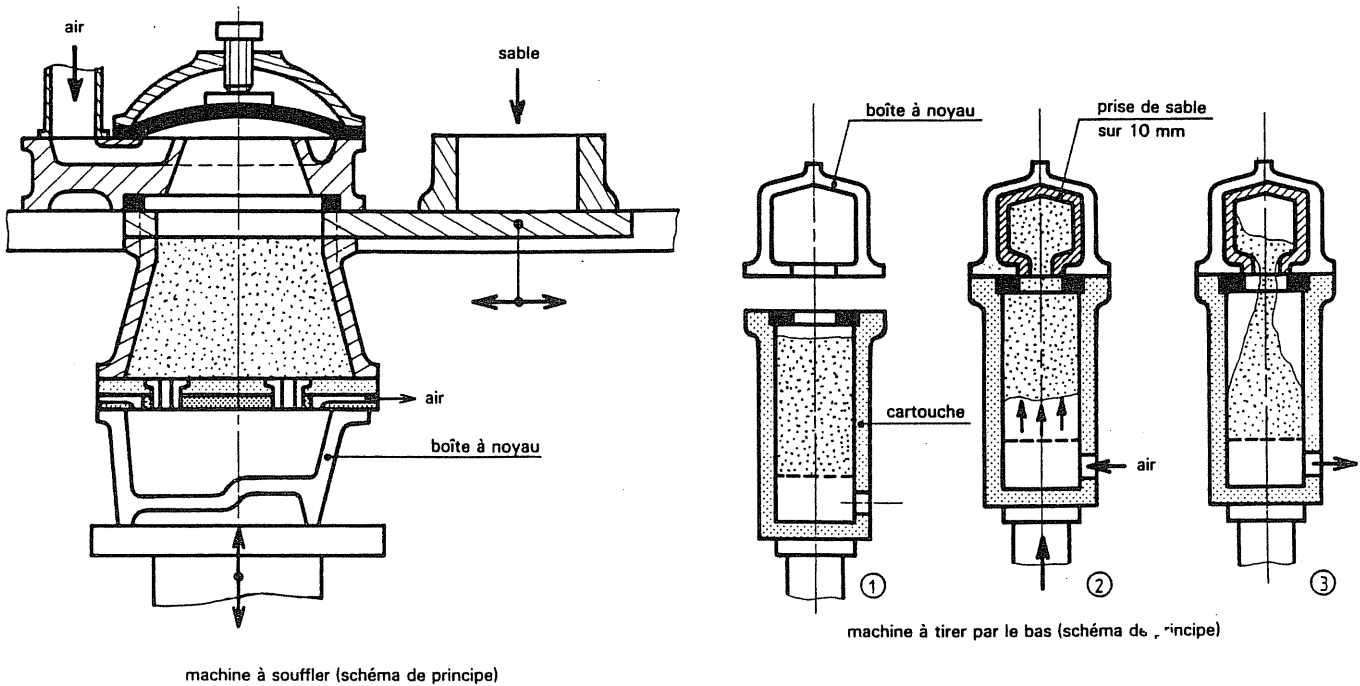
La poussée verticale F maximale est approximativement de :

$$F = \rho V g = 7600 \times 4.3510^{-4} \times 9.81 = 32.4 N$$

Cette poussée verticale F induit une contrainte de compression très faible dans le cylindre supérieur et aucune contrainte de flexion donc aucun problème de rupture.

## II.2.2 Il faut évidemment des machines automatiques.

### Machines à tirer ou souffler les noyaux



### Documents Précis de fonderie AFNOR

#### II.2.3.1

Production annuelle demandée 24500 pièces par semaines pendant 46 semaines

$$Q_a = 24500 \times 46 = 1127000 \text{ pièces / an}$$

donc

$$Q_e = \sqrt{\frac{2 \times 267 \times 1127000}{0.3 \times 1.17}} = 41407.5 \text{ pièces / lot}$$

Valeur théorique non entière, on lancera un nombre entier de lots

#### II.2.3.2

Nombre annuel de lots économiques :

$$\frac{Q_a}{Q_e} = \frac{1127000}{41407.5} = 27.21 \text{ lots / an}$$

On a le choix entre 27 et 28 lots, pour 27 lots annuels, on sera plus près de la quantité économique.

$$N_e = 27 \text{ lots / an}$$

$$Q_e = \frac{Q_a}{N_e} = \frac{1127000}{27} = 41740.74 \text{ pièces / lot}$$

On produira évidemment un nombre entier de pièces, soit 26 lots correspondant chacun à un multiple du nombre d'empreintes par boîte à noyaux, le 27<sup>ème</sup> complétant la quantité voulue.



*Exemple : Si on admet une boîte à noyau à 10 empreintes(empreintes multiples nécessaires pour la productivité voulue), on pourra réaliser :*

*-26 lots de 41740 pièces*

*-1 lot de 41760 pièces*

*soit 1127000 pièces par an*

II.2.3.3 Il faut revenir à la formule ayant permis à WILSON de calculer la quantité économique :

Coût de fabrication annuel :  $Q_a C_f$

Coût de lancement annuel :  $\frac{Q_a}{Q_{lot}} L$

Coût du stock moyen :  $\tau \frac{Q_{lot}}{2} C_f$

Donc le coût de la série annuelle :  $C_s = Q_a C_f + \frac{Q_a}{Q_{lot}} L + \tau \frac{Q_{lot}}{2} C_f$

On cherche à minimiser ce coût annuel en fonction du nombre de pièces par lot, on dérive donc cette expression par rapport à la quantité par lot.

$$\frac{\partial C_s}{\partial Q_{lot}} = -\frac{Q_a L}{Q_{lot}^2} + 0 + \frac{\tau}{2} C_f = 0$$

$$Q_{lot} = \sqrt{\frac{2Q_a L}{\tau C_f}}$$

Si on prend un nombre entier de lots réalisés par an, on n'aura pas tout à fait le coût minimal.

$$C_s \approx 27 \times 267 + 1127000 \times 1.17 + 0.3 \times \frac{41740}{2} \times 1.17$$

$$C_s \approx 7209 + 1318590 + 7325.37 = 1333124.37 \text{ Francs}$$

On constate que pour cette production, les coûts de lancement et de stockage représentent de l'ordre de 1% de la somme totale.

II.2.3.4 Coût de la série fabriquée par lots demandés en amont :

49000 pièces par campagne tous les 2 semaines soit 23 lancements par an.

$$C_{s2} = 23 \times 267 + 1127000 \times 1.17 + 0.3 \times \frac{49000}{2} \times 1.17$$

$$C_{s2} = 6141 + 1318590 + 8599.5 = 1333330.5 \text{ Francs}$$

La différence :  $\Delta_{1-2} = 1333124.55 - 1333330.5 = -205.95 \text{ Francs}$

II.2.3.5 La différence est négligeable rapportée au coût, l'effort réalisé avec le SMED pour minimiser le coût de changement de production donne une grande liberté quant à la quantité fabriquée à chaque lot sans grever le coût. La place disponible pour le stockage de ces pièces

fragiles que sont les noyaux est aussi un autre paramètre à gérer... Le plus simple est donc ici de réagir en "direct" à la demande de noyaux émanant du moulage et cela minimise d'autant les coûts administratifs de lancement.

### II.3.1. Trois règles de tracé immuables et indépendantes des procédés de fonderie

- 1) Surépaisseurs d'usinage sur les surfaces à usiner
- 2) Respect d'épaisseurs régulières (épaisseurs adaptées à la technique de moulage) et éviter les augmentations de masse trop grandes (règles d'HEUVERS) lors de changement d'épaisseurs ou de raccordements sinon risques de retassures.
- 3) Mise en place de congé dans les angles intérieurs, sinon risque de déplacement des isothermes (même sur une pièce d'épaisseur constante) à cause du "coin" de sable surchauffé qui peut occasionner une retassure ou une crique.
  - retassure : si on crée un point « chaud »(métal liquide isolé)
  - crique : cas du métal à l'état solide mais à haute température, donc de caractéristiques mécaniques moindres que les parties adjacentes qui se contractent en phase solide (retrait) et occasionnent des contraintes, car le retrait est contrarié par le moule à l'endroit du raccord. Ces parties adjacentes sont plus froides et donc plus résistantes. Si la contrainte créée dans l'angle est supérieure à la contrainte admissible par le matériau en ce point, on occasionnera une fissure...

On devra aussi rechercher des tracés limitant les contraintes résiduelles liées au retrait en phase solide.

Ces 3 règles sont nécessaires et suffisantes dans le cas des modèles perdus. Si on veut au contraire récupérer le modèle, il faudra prévoir un certain nombre de formes accessoires.

#### **Règles de tracé imposées par les procédés à modèles non perdus :**

- Nécessité de récupération du modèle (ou plaque-modèle) donc plan de joint si possible plan et unique
- Pour le démoulage (sortir le modèle du moule) prévoir les dépouilles donc éviter les contre-dépouilles
- Prévoir des congés de raccordement sur les angles vifs extérieurs pour éviter les défauts d'aspects.

Ces règles sont vraies aussi pour les procédés en moules permanents. Ce sont les règles les plus fondamentales, ensuite le professionnel minimisera les coûts en cherchant la simplification des outillages et optimisera les formes pour gérer au mieux le système d'alimentation (masselottes, attaques, refroidisseurs éventuels,...)

II.3.2. Cette pièce est relativement massive et à épaisseur pratiquement constante hors le raccordement de l'arceau sur la couronne qui va créer un point chaud (on pourrait calculer le module de refroidissement des différentes parties).

II.3.3. C'est donc cette partie qui va poser problème avec un risque de retassure car le métal liquide contenu dans cette zone va être emprisonné dans une gangue solide or, au changement

de phase l'organisation cristalline des atomes fait que le métal solide occupe un volume plus faible, on a donc apparition d'un "manque", c'est la retassure.

II.3.4. A tracé identique, on pourra pallier ce problème en alimentant en métal liquide cette partie par une masselotte.

II.4. Les attaques sont des conduits courts en général de sections réduites, de forme plate reliant les chenaux de coulée à la pièce. Leur disposition dépend de la forme de la pièce, de l'emplacement des masselottes et de la nature de l'alliage.

- pour les alliages à large front de solidification : alliages d'aluminium sauf l'eutectique AS 13, bronze, FGL, on attaque par les parties minces
- pour les alliages à front de solidification étroit : AS13, cuproaluminiums, FGS..., on attaque par les parties massives.

Pour le boîtier de différentiel, on coulera la pièce en grappe (20 pièces) par groupe de cinq autour de la masselotte qui va les alimenter, cette masselotte étant évidemment reliée à une des parties massives 1 (voir annexe 1) la deuxième partie étant "alimentée" par la couronne...

#### II.4.2. Temps de gale :

Temps disponible dans un moule en sable pour avoir solidification du matériau coulé avant que la "peau" de l'empreinte (moule) ne se délite sous l'action de la chaleur (disparition de l'eau dans les sables silico-argileux ou dégradation des résines...)

Il est essentiellement fonction de la température de l'alliage et évidemment de sa surchauffe (écart de température par rapport à sa température de fusion)

#### II.4.3. Mise au mille

$$\text{Mise au mille} = \frac{\text{Masse de métal coulé}}{\text{Masse de la pièce(s)}}$$

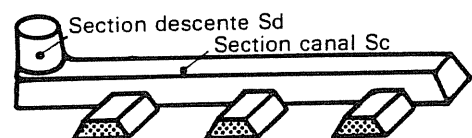
pour obtenir une pièce, on coule donc 1,6 fois sa masse, les 60% de surplus de matière représentent le système d'alimentation.

#### II.4.4 L'échelonnement 1-1-1 concerne le système d'alimentation

1a :  $\frac{S_d}{S_d}$  Avec  $S_d$  section de descente

1b :  $\frac{S_c}{S_d}$  Avec  $S_c$  section du canal

1c :  $\frac{S_a}{S_d}$  Avec  $S_a$  section de la ou des attaques



*Document Précis de fonderie AFNOR*

On a donc ici égalité des sections  $S_d = S_c = S_a$  (cas le plus courant)

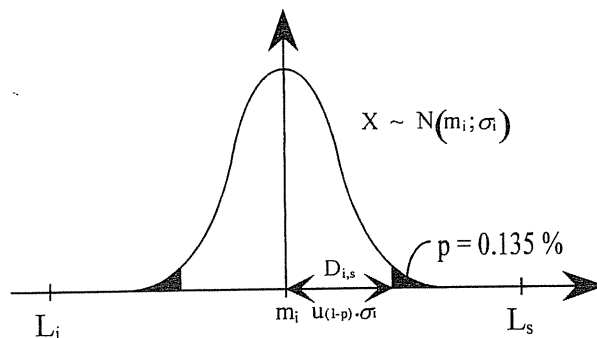
## DEUXIEME PARTIE

### I. ASSEMBLAGE DE LA COURONNE PAR FRETTAGE-COLLAGE

#### I.1. Étude de l'obtention du $\phi 125$ H7 de la couronne

##### I.1.1. Détermination de $\sigma_i$ et de $\sigma_p$ .

L'hypothèse de normalité de la distribution des diamètres des couronnes est une information importante et simplificatrice, en effet, elle va nous permettre d'utiliser l'abaque de la loi normale centrée réduite. Cette question peut être illustrée par une figure issue de la NF X 06-033 et adaptée à notre problème.



Compte tenu de la symétrie de la loi normale on peut écrire :

$$D_i = 2 \cdot D_{i,i} = 2 \cdot D_{i,s} \quad \text{or,} \quad D_{i,s} = u_{(1-p)} \cdot \sigma_i, \quad \text{avec } u_{(1-p)} \text{ tel que } P(u) = 1 - p,$$

$$(1 - p) \text{ valant } (1 - 0.00135) = 0.99865,$$

d'après l'abaque de la loi normale centrée réduite (**Document II.B.4**),  $u_{(1-p)} = 3$

par conséquent  $D_{i,s} = 3 \cdot \sigma_i$  donc  $D_i = 6 \cdot \sigma_i$

$$\text{On sait que } Cam = \frac{L_s - L_i}{D_i} = \frac{IT}{6 \cdot \sigma_i}$$

$$\text{d'où } \sigma_i = \frac{IT}{6 \cdot Cam} = \frac{40 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 2,18} = 3.06 \mu\text{m}$$

Concernant  $\sigma_p$ , on pourrait procéder de la même manière et écrire :

$$\sigma_p = \frac{IT}{6 \cdot Cap} = \frac{40 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 2,04} = 3.27 \mu\text{m}$$

I.1.2. Les expressions de  $C_{am}$  et  $C_{ap}$  ne diffèrent que par l'indice de  $D$ , à savoir :

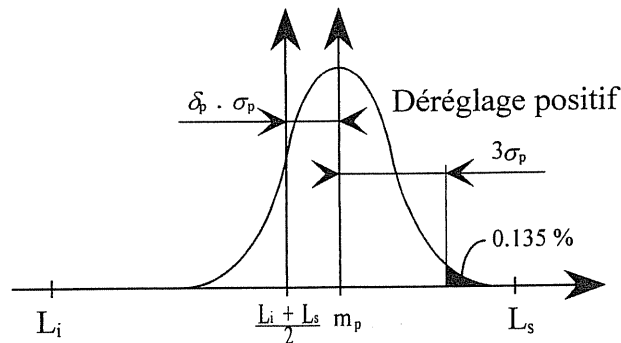
- $i$  comme Dispersion intrinsèque
- $p$  comme Dispersion de production

La dispersion intrinsèque est celle que l'on obtiendrait en un court laps de temps quand la productivité du moyen le permet. Cette dispersion est essentiellement due au moyen.

La dispersion de production quant à elle est la conséquence de l'ensemble des sources de variabilité de la caractéristique surveillée, on parle souvent des 5 M de la non qualité. Il est évident que plus de facteurs interviennent, plus la dispersion est grande, par conséquent,  $D_p > D_i$  et donc  $C_{ap} < C_{am}$ .

I.1.3. Dans l'expression de  $C_{pk}$  intervient  $m_p$  qui est la moyenne de la distribution de production, dans le cas particulier d'une distribution normale, c'est le milieu de cette distribution.  $C_{pk}$  rend compte en fait du non centrage de la distribution produite par rapport à la zone de tolérance, dans le cas particulier où  $m_p = \frac{L_i + L_s}{2}$ ,  $C_{pk} = C_{ap}$ , comme tel n'est pratiquement jamais le cas,  $C_{pk} < C_{ap}$ .

I.1.4. Figure illustrant la situation dans le cas d'un dérèglement positif d'indice  $\delta_p$



On sait que  $m_p = \text{CIBLE} + \delta_p \cdot \sigma_p$ , d'où  $\delta_p = \frac{m_p - \text{CIBLE}}{\sigma_p}$

Dans le cas d'un dérèglement positif  $C_{pk} = \frac{L_s - m_p}{3 \cdot \sigma_p}$ , d'où  $m_p = L_s - (3 C_{pk} \cdot \sigma_p)$

par conséquent :

$$\delta_p = \frac{L_s - (3 C_{pk} \cdot \sigma_p) - \text{CIBLE}}{\sigma_p} = \frac{IT/2 - 3 C_{pk} \cdot \sigma_p}{\sigma_p} = \frac{IT}{2 \sigma_p} - 3 C_{pk}$$

Application numérique :  $\delta_p = 0.896 \approx 0.9$

I.1.5. À partir de la Figure 5 de la NF X 06-031-1 ( Document II.B.2 b ), on constate que pour :

- $n = 5$
- $\delta = 0.9$

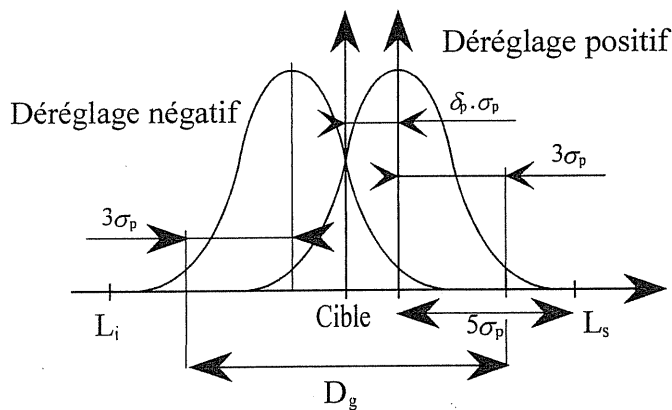
on obtient un risque  $\beta$  de l'ordre de 0.83, ce qui signifie qu'il n'y a que 17 % de chances de détecter un tel dérèglement.

Il est évident que ce dérèglement n'a pas été constant au cours de la journée, c'est pourquoi, il faudra encore attendre de nombreux prélèvements avant d'observer un point hors limite sur la carte de contrôle.

Il faudrait en fait améliorer la sensibilité de notre carte de contrôle, au vue de la Figure 5 de la NF X 06-031-1 la seule solution est de changer de courbe d'efficacité. Il s'agit en fait d'augmenter l'effectif des échantillons prélevés. Par exemple, si on double les effectifs pour passer à 10, le risque  $\beta$  passe à 55 % ce qui est sensiblement plus favorable, mais cela engendre un surcoût, par ailleurs il faut vérifier que la productivité est suffisante.

I.1.6. Figure illustrant les 2 situations extrêmes possibles de la dispersion de production en

remarquant que  $C_{pk} = 1,66 \approx \frac{5}{3} = \frac{5 \cdot \sigma_p}{3 \cdot \sigma_p}$  :

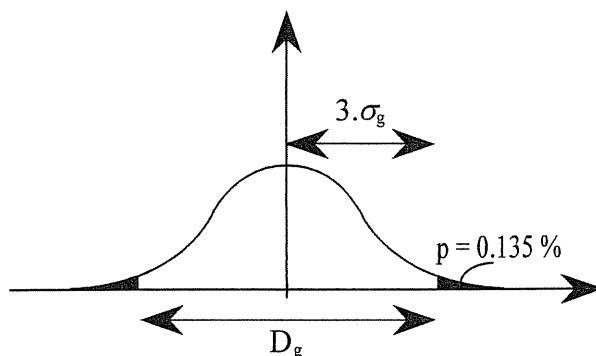


on peut géométriquement écrire que  $D_g = L_s - L_i - 4 \cdot \sigma_p$ , or  $\sigma_p = \frac{IT}{6 \cdot Cap}$

$$\text{d'où } D_g = IT - 4 \cdot \frac{IT}{6 \cdot Cap} = IT \left( 1 - \frac{2}{3 \cdot Cap} \right)$$

Application numérique :  $D_g = 26,7 \mu\text{m}$

I.1.7. Si on suppose l'ensemble de la population des diamètres des couronnes produites normale, et que  $D_g$  serait définie au risque  $\alpha = 0,27 \%$  comme dans la norme NF X 06-033 ce que l'on peut illustrer par la figure :



il vient alors  $D_g = 6 \cdot \sigma_g \Leftrightarrow \sigma_g = D_g / 6$   
 Application numérique :  $\sigma_g = 4,45 \mu\text{m}$

**I.2.1**  $S = \sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$   
 $R = W = X_{\text{maxi}} - X_{\text{mini}}$

Les 2 variables aléatoires R et S sont communément utilisées pour surveiller le comportement de la dispersion d'un procédé, elles ne présentent pas le même intérêt statistique, en effet R n'exploite que 2 valeurs dans l'échantillon prélevé quelque soit sa taille, alors que S exploite la totalité des valeurs.

On peut qualitativement conclure que S est une variable aléatoire plus riche par rapport à R et d'autant plus riche que l'effectif de l'échantillon est grand.  
 R a néanmoins un atout incontestable par rapport à S, c'est sa simplicité de calcul.

**I.2.2. Détermination des lignes de contrôle de la carte  $\bar{X}$ .**

1<sup>ère</sup> méthode : utilisation de la Figure A.1 de la NF X 06-031- ( **Document II.B.1a** ):

- détermination de  $POM_0$  pour le risque d'avoir une fausse alarme ici  $\alpha = 0,27\%$  .

Sachant que  $\alpha = 100/POM_0 \Leftrightarrow POM_0 = 100/\alpha = \frac{100}{2,7 \cdot 10^{-3}} \approx 370$

- détermination de  $u_1$  à partir de l'abaque, ici  $POM_0 = 370$  entraîne  $u_1 = 3$
- détermination de

$Lcs_{\bar{X}} = CIBLE + u_1 \cdot \frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} = \frac{L_s + L_i}{2} + u_1 \cdot \frac{\bar{S}}{c_4 \cdot \sqrt{n}}$

Application numérique :

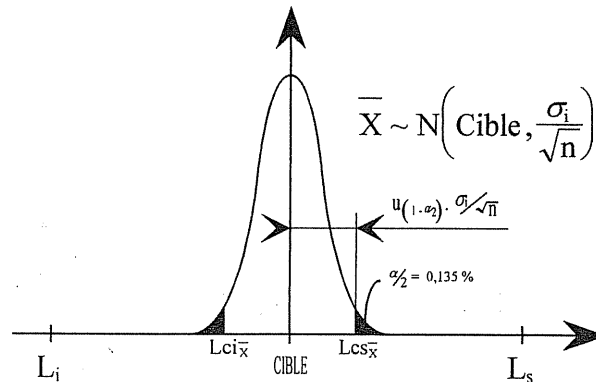
$CIBLE = 125 + \left( \frac{14 + 39}{2} \right) \cdot 10^{-3} = 124,9735 \text{ mm}$

$\bar{S} = 2,69 \mu\text{m}$  d'après les données de la carte de contrôle

$n = 5$  et  $c_4 = 0.94$

$$\boxed{Lcs_{\bar{X}} = 124,9773 \text{ mm}} \text{ et } \boxed{Lci_{\bar{X}} = 124,9697 \text{ mm}}$$

2<sup>nde</sup> méthode : Illustration de la construction par une figure



D'après la figure, on peut écrire :  $Lcs_{\bar{X}} = \text{CIBLE} + u_{(1-\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}$  or dans notre cas  $u_{(1-\alpha/2)} = u_{(1-\frac{2,7 \cdot 10^{-3}}{2})} = u_{(0,99865)} = 3$ , le résultat est donc le même.

I.2.3. On sait que  $Lcs_S = B_4 \bar{S}$ , avec pour  $n = 5$ ,  $B_4 = 2.089$

Application numérique :  $\boxed{Lcs_S = 5,619 \mu\text{m}}$

I.2.4. On constate qu'il s'agisse de la carte  $\bar{X}$  ou de la carte R, que tous les points se trouvent entre les limites, aucune loi des séries ne peut être constatée, aussi dit-on que le procédé est sous contrôle statistique.

I.2.5. D'après la relation apparaissant à la question I.2.3.,  $B_3 = \frac{1}{c_4} (c_4 - 3 \sqrt{1-c_4^2})$ ,

avec  $c_4 = 0.94$  pour  $n = 5$ .

Application numérique :  $\boxed{B_3 = -0,089}$

En conséquence la valeur limite de contrôle est négative alors que la variable est elle toujours, par définition, positive.

L'expression  $Lci_S = c_4 \sigma_i - 3 \sigma_i \sqrt{1-c_4^2}$  suppose que la variable S soit distribuée normalement, en effet le « 3 » est la valeur prise par  $u_{(1-\alpha/2)}$  pour  $\alpha = 0,27 \%$ .



# Document II.C.1

## CARTE DE CONTRÔLE MOYENNE ECART TYPE

**Moyenne**      **Ecart type**      **APTITUDES**

Cible : 124,9735      Cam :  
Lcs :      Les :  
Lci :      Lci :

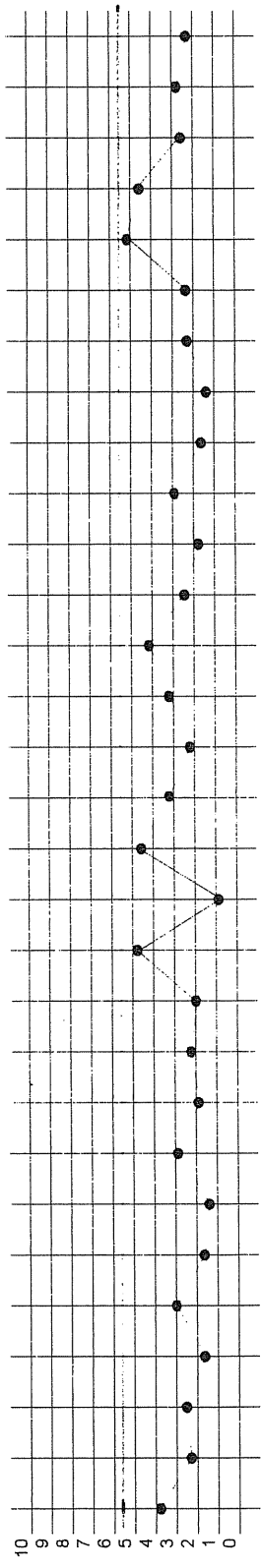
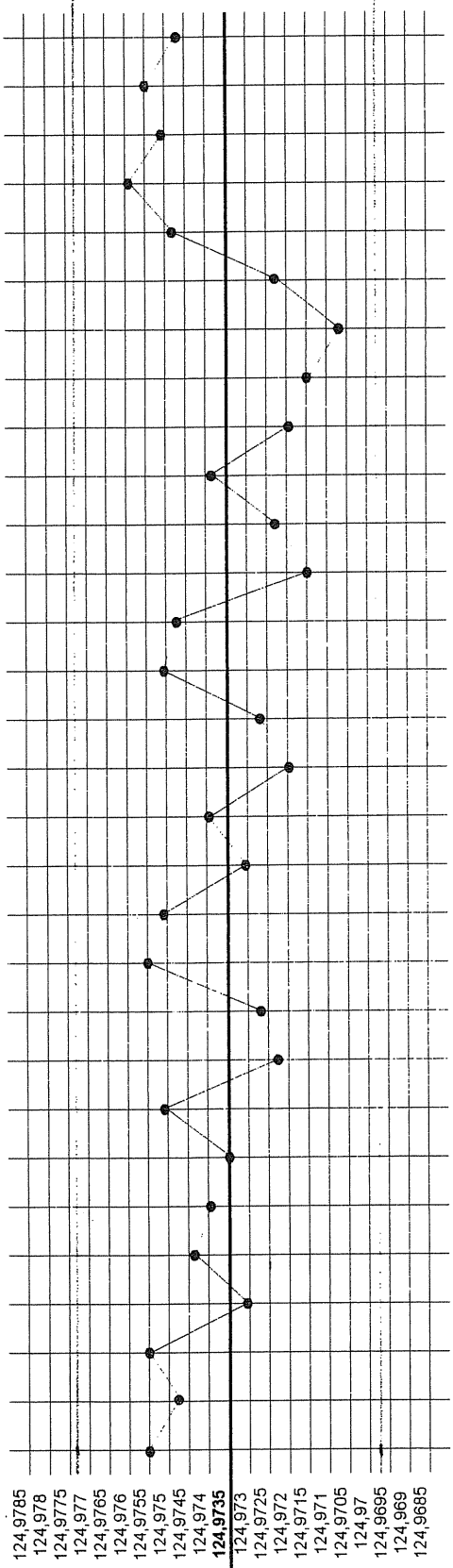
USINE :  
ATELIER :  
LIGNE : Boîtier de différentiel  
OPERATION : Tournage OP

MACHINE/POSTE :  
CARACTERISTIQUE : DIAMETRE DE LA PORTEE DE COURONNE  
EQUIPE : TOUTES  
EVENEMENT : TOUS

**Moyenne**      **Ecart type**

Cible : 124,9735      Cam :  
Lcs :      Les :  
Lci :      Lci :

Numéro de l'échantillon	MOYENNE																														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	MOYENNE
Pièce n°1	-4	2	-2	-2	-4	-2	0	-2	-4	-4	0	-4	-2	-4	-6	-4	-2	2	-6	-2	-4	-4	-4	-6	-4	-3	-2	0	0	0	0
Pièce n°2	2	-2	2	-2	2	0	-2	0	-2	-2	2	-2	0	-4	-4	-2	0	2	-2	-2	0	-2	-2	0	-2	-2	0	0	0	2	2
Pièce n°3	2	0	2	0	2	0	2	0	2	4	8	0	0	0	0	0	4	-2	-2	0	-2	-2	-4	-2	-2	8	0	4	2	2	
Pièce n°4	4	2	4	0	4	2	2	0	2	0	4	2	0	4	0	0	6	4	4	-2	2	0	-2	-2	0	8	2	2	6	4	
Pièce n°5	6	4	4	2	0	2	0	6	0	2	0	4	0	6	2	2	4	-6	0	2	4	0	0	-2	2	6	6	0	-2	-2	
Moyenne	2,00	1,20	2,00	-0,40	0,80	0,40	0,00	1,60	-1,20	-0,80	2,00	1,60	-0,40	0,40	-1,60	-0,80	1,60	1,20	-2,00	-1,20	0,40	-1,60	-2,00	-2,80	-1,20	1,40	2,40	1,60	2,00	1,20	<b>0,28</b>
Ecart type	3,74	2,28	2,45	1,67	3,03	1,67	1,41	2,97	1,79	2,28	2,00	4,77	0,89	4,56	3,29	2,28	3,29	4,15	2,45	1,79	2,97	1,67	1,41	2,28	2,28	5,18	4,56	2,61	2,83	2,28	<b>2,69</b>



S

S étant une variable aléatoire positive, elle est donc bornée à « 0 », notre objectif étant d'obtenir une petite dispersion, l'espérance mathématique de cette variable aléatoire est donc proche de « 0 », sa distribution est donc dissymétrique et par conséquent fort éloignée d'une distribution normale.

**I.2.6.** La variable aléatoire  $\left( (n-1) \frac{S^2}{\sigma_i^2} \right)$  suit une loi  $\chi_{\nu=n-1}^2$ , par conséquent, on peut écrire au risque  $\alpha$  que :

$$\chi_{(\alpha/2)}^2 \leq \left( (n-1) \frac{S^2}{\sigma_i^2} \right) \leq \chi_{(1-\alpha/2)}^2 \quad \text{soit} \quad \sqrt{\frac{\chi_{(\alpha/2)}^2}{n-1}} \sigma_i \leq S \leq \sqrt{\frac{\chi_{(1-\alpha/2)}^2}{n-1}} \sigma_i, \text{ d'où :}$$

- $Lci_s = \sqrt{\frac{\chi_{(\alpha/2)}^2}{n-1}} \sigma_i$
- $Lcs_s = \sqrt{\frac{\chi_{(1-\alpha/2)}^2}{n-1}} \sigma_i$

ces valeurs étant, quant à elles, toutes positives.

**I.2.7.1.** L'hypothèse de normalité est importante, dans notre cas à 2 titres :

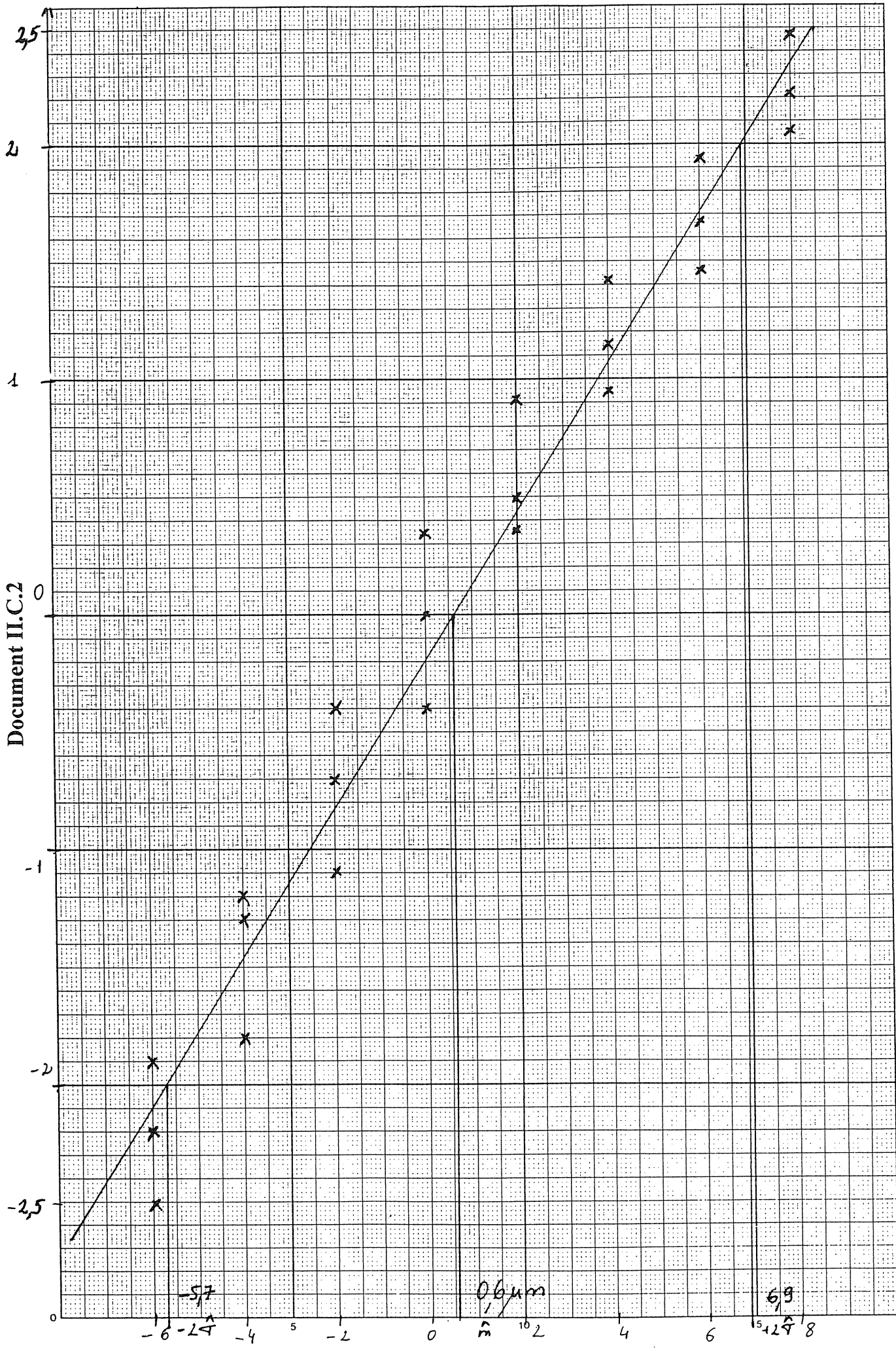
- la construction de la carte  $\bar{X}$  est basée sur la normalité de la distribution des  $\bar{X}$  elle même liée à la normalité de la distribution des X si la taille des échantillons est faible, ce qui est notre cas avec  $n = 5$ ,
- La normalité de la distribution des X permet facilement, à partir de la loi normale centrée réduite, de faire des calculs de proportions de production dans des intervalles donnés, par exemple dans des zones de tolérance. Dans tous les cas, il faut connaître la loi de distribution, la loi normale restant la plus facile à mettre en œuvre.

**I.2.7.2.** Tester la normalité des Xi revient à tester la normalité des Xi-CIBLE, c'est à dire des 150 écarts.

On conviendra d'utiliser  $F_i = \frac{i}{n+1}$  avec  $n = 150$ .

On peut présenter la préparation du test graphique dans un tableau :

<b>i</b>	1	2	4	5	14	18	19	35	52	53	75	96	97	104	124	125	132	139	140	144	147	148	149	150
<b>Ecart en microns</b>	-6	-6	-6	-4	-4	-4	-2	-2	-2	0	0	0	2	2	2	4	4	4	6	6	6	8	8	8
<b>F<sub>i</sub> en %</b>	0,66	1,32	2,65	3,31	9,27	11,9	12,6	23,2	34,4	35,1	49,7	63,6	64,2	68,9	82,1	82,8	87,4	92,1	92,7	95,4	97,4	98	98,7	99,3
<b>U<sub>i</sub></b>	-2,5	-2,2	-1,9	-1,8	-1,3	-1,2	-1,1	-0,7	-0,4	-0,4	-0	0,35	0,36	0,49	0,92	0,95	1,15	1,41	1,45	1,68	1,94	2,06	2,22	2,48



On peut constater qualitativement que le nuage de points est assimilable à une droite, par conséquent on conclura à la normalité de la distribution des écarts donc des  $X_i$ .

**I.2.7.3.** La moyenne de la distribution des écarts peut être estimée à partir de la droite de Henry, en effet elle est l'abscisse du point de la droite ayant pour ordonnée « 0 » soit ici  $0,6 \mu\text{m}$ . La moyenne estimée des diamètres des boîtiers c'est à dire les  $X_i = \text{CIBLE} + e_i$  est de  $\hat{m} = 124.9735 + 0,6 \cdot 10^{-3} = 124.9741 \text{ mm}$ . On peut constater que cette valeur est extrêmement proche de la valeur estimée par calcul  $\hat{m} = \bar{X} = 124,9738 \text{ mm}$ .

Concernant l'écart type, on peut l'estimer à partir de la différence entre les abscisses des points d'ordonnées -2 et +2, en effet elle représente 4 fois l'écart type estimé.

Ici on obtient graphiquement  $4 \hat{\sigma} = 6,9 - (-5,7) = 12,6 \mu\text{m}$  soit  $\hat{\sigma} = 3,15 \mu\text{m}$ , on peut constater que cette valeur est extrêmement proche de la valeur estimée par calcul  $\hat{\sigma} = \sigma_{n-1} = 2,99 \mu\text{m}$

**I.2.8.**  $\text{Cap} = \frac{L_s - L_i}{6 \cdot \sigma_p}$  on peut exploiter l'estimation numérique de  $\sigma_p = 2,99 \mu\text{m}$  ce qui conduit à  $\text{Cap} = 1,39$ .

$\text{Cpk} = \text{Mini}(\text{Cpk}_i, \text{Cpk}_s)$  on peut exploiter l'estimation numérique de

$$m_p = \bar{X} = 124,9738 \text{ mm} \text{ comme } m_p > \text{CIBLE}, \text{Cpk} = \text{Cpk}_s = \frac{L_s - m_p}{D_{p,s}}$$

comme la distribution des diamètres est normale  $\text{Cpk} = \text{Cpk}_s = \frac{L_s - m_p}{3 \cdot \sigma_p} = 1,36$ .

### I.3. Assemblage frettés-collés

**I.3.1.** Appelons  $V_{(X)}$  la variance de la variable aléatoire  $X$ , on montre que

$$\forall (X, Y) \text{ variables aléatoires indépendantes } V_{(X+Y)} = V_{(X-Y)} = V_{(X)} + V_{(Y)}$$

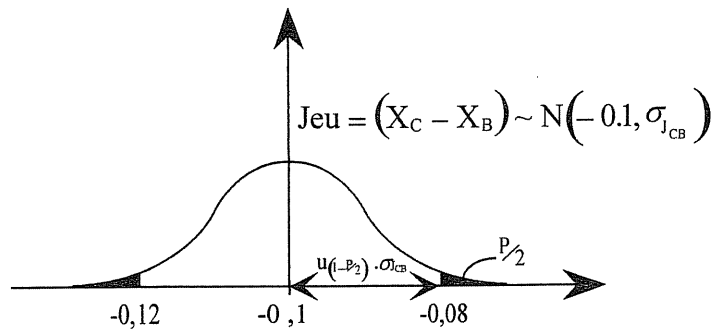
$$\text{Par conséquent } \sigma_{J_{CB}} = \sqrt{V_{(X_C - X_B)}} = \sqrt{V_{(X_C)} + V_{(X_B)}} = \sqrt{\sigma_{gC}^2 + \sigma_{gB}^2}$$

**I.3.2.** On sait que  $J_{CB} = X_C - X_B$ , par conséquent  $J_{CB} = (X_C - X_B) \sim N(m, \sigma_{J_{CB}})$ .

Procédons à l'étude dans le cas le plus favorable, c'est à dire lorsque  $m = -0,1 \text{ mm}$  alors

$$J_{CB} \sim N(-0,1 \text{ mm}, \sqrt{\sigma_{gC}^2 + \sigma_{gB}^2}) = N(-0,1 \text{ mm}; 5,42 \mu\text{m}).$$

On peut illustrer le problème par une figure faisant apparaître la proportion d'assemblages ne respectant pas les exigences sur le serrage  $J_{CB} = -0,1^{\pm 20 \mu\text{m}}$ .



On peut géométriquement écrire :  $u_{(1-P/2)} \cdot \sigma_{J_{CB}} = \frac{1}{2} \cdot IT_{J_{CB}}$

$$\text{d'où } u_{(1-P/2)} = \frac{IT_{J_{CB}}}{2 \cdot \sigma_{J_{CB}}} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 5,43 \cdot 10^{-3}} = 3,68$$

à partir de l'abaque de la loi normale centrée réduite on obtient

$$1 - P/2 = 0,999883 \text{ soit } P = 234 \cdot 10^{-6}.$$

**I.3.3.** Le calcul de P a été fait dans le cas idéal où les 2 procédés sont réglés de telle sorte que le jeu moyen soit bien de -0.1 mm, dans la réalité une telle situation n'est pas atteignable aussi P sera sensiblement supérieure à 234 ppm. Ce résultat est incompatible avec l'aspect critique de l'ensemble boîtier-couronne aussi ne peut-on se contenter de ces résultats. On peut préconiser quelques solutions :

La première qui vient à l'esprit est de diminuer sensiblement les dispersions de production, pour cela il faut améliorer voir changer les moyens de production, mais cela ne suffira pas car il faut en plus pouvoir garantir que le jeu moyen sera très proche de -0,1 mm c'est à dire qu'il faut pouvoir détecter sur chacun des procédés la moindre dérive. On a pu voir à la question I.1.5. que l'aptitude de la MSP à détecter d'éventuelles dérives n'est pas forcément grande d'autant moins que la dérive est faible (Cf risque  $\beta$  ou POM).

On peut améliorer l'efficacité des cartes de contrôle de Shewhart en augmentant n, c'est la conséquence de la figure 5 de la NF X 06-031-1, en exploitant la figure A.1 de cette même norme, on constate que l'on peut pour  $\delta$  et n fixés diminuer la POM en changeant de courbe c'est à dire en changeant  $u_1$ , la contre partie étant de diminuer  $POM_0$  c'est à dire augmenter  $\alpha$  le risque de détecter un dérèglement à tort. Si  $\alpha$  devient trop grand, les interventions inutiles et donc coûteuses deviennent fréquentes c'est pourquoi on peut faire cohabiter 4 lignes sur une même carte de contrôle :

- 2 lignes de contrôle  $L_{cs}$  et  $L_{ci}$  définies avec un risque  $\alpha$  faible, par exemple 0.27 %,
- 2 lignes de surveillance  $L_{ss}$  et  $L_{si}$  définies avec un risque  $\alpha$  important, par exemple 5 ou 10 %.

Les règles de décision relatives aux lignes de surveillance n'étant pas les mêmes que celles de contrôle, à savoir, dès qu'un point sort des limites, prélèvement immédiat d'un autre échantillon, si le point suivant est encore hors limite, intervention, tout ceci correspondant à des probabilités fortes de dysfonctionnement.

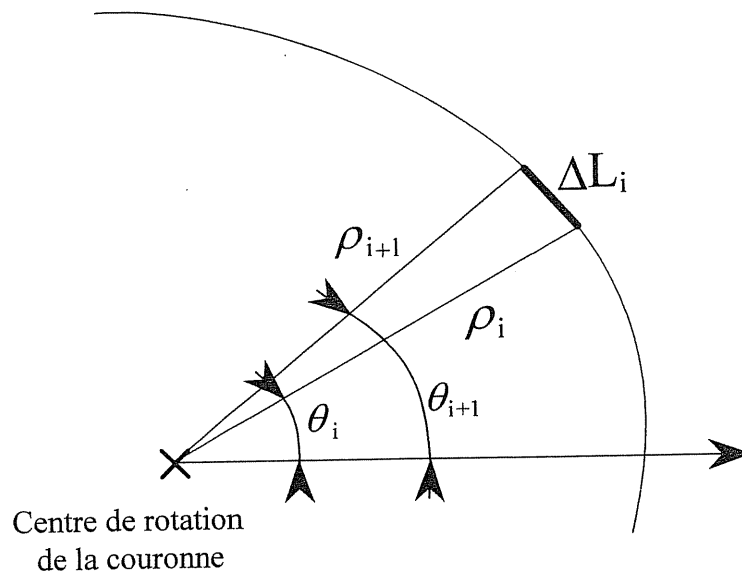
Une autre solution qui peut être adoptée est la mise en œuvre de cartes de contrôle d'autres types que Shewhart, par exemple CUSUM ou EWMA (normalisées NF X 06-031-3 et 4) qui ont l'avantage d'être sensiblement plus efficaces pour de petites dérives.

La deuxième solution qui vient à l'esprit est celle qui a d'ailleurs été adoptée dans l'entreprise où sont produits ces ensembles, c'est l'appairage entre le boîtier et la couronne, différentes organisations sont alors possibles, fabrication à la dimension ou tri pour réaliser les meilleurs assemblages.

**I.3.4.** Le choix qui a été fait est très judicieux, en effet l'étude menée sur les couronnes a montré que la dispersion de fabrication est sensiblement plus importante que celle des boîtiers. C'est assez cohérent avec l'idée que l'on se fait sur les difficultés relatives de fabrication d'un alésage ou d'un arbre. Il faut bien garder à l'esprit que ça n'occulte pas tous les problèmes, en effet lors de la mesure une dispersion est présente qui peut ne pas être négligeable. Par ailleurs, même si le procédé de finition de la portée de couronne sur le boîtier est réalisée sur une MOCN, il existe une dispersion potentielle qui peut elle aussi ne pas être négligeable. Il faudra aussi vérifier que ce même procédé ne subit pas de dérive. En conclusion l'appairage n'est pas la panacée, il faut là encore mener une étude préalable de faisabilité.

**I.3.5.** Pour déterminer le diamètre du boîtier qui va s'assembler au mieux avec la couronne fabriquée, il est nécessaire d'en déterminer le diamètre. La couronne étant supposée déformable, on peut faire l'hypothèse que le serrage est en fait la conséquence des différences de périmètres

Aussi, peut-on développer une technique permettant de déterminer le périmètre de la couronne à partir d'une digitalisation de la circonférence de la couronne exprimée dans un repère cylindrique physique.



$\theta_i$  pouvant être mesuré à partir d'un capteur incrémental

$\rho_i$  pouvant être mesuré à partir d'un capteur linéaire de technologie quelconque (inductif, ..)

$\forall i, \theta_{i+1} - \theta_i = C^{te}$  car la fréquence de rotation de la pièce est constante et la fréquence de prélèvement de mesures aussi. Nommons  $\theta_{i+1} - \theta_i = \Delta\theta$ .

Si la fréquence d'échantillonnage est suffisamment élevée,  $\Delta\theta$  est petit et l'on peut écrire :

$$\Delta L_i \approx \frac{\rho_i + \rho_{i+1}}{2} \Delta\theta \text{ d'où :}$$

$$L = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta L_i = \Delta\theta \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\rho_i + \rho_{i+1}}{2} = n \cdot \Delta\theta \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\rho_i}{n} = 2\pi \cdot \rho_{\text{moyen}} \text{ il ne reste alors plus qu'à adapter le rayon du boîtier à } \rho_{\text{moyen}} \text{ et au serrage désiré.}$$

**I.3.6.** On sait que la dimension des boîtiers si le procédé est à chaque fois bien réglé est telle que :

$$X_B \sim N(\text{CIBLE}, \sigma_{gB}) \text{ avec } \text{CIBLE} = X_C + 0,1 \text{ mm, } X_C \text{ étant variable.}$$

Par conséquent, au risque  $\alpha$  on peut écrire :

$$\text{CIBLE} - u_{(1-\alpha/2)} \cdot \sigma_{gB} \leq X_B \leq \text{CIBLE} + u_{(1-\alpha/2)} \cdot \sigma_{gB}$$

$$\text{soit : } -u_{(1-\alpha/2)} \leq \frac{X_B - \text{CIBLE}}{\sigma_{gB}} \leq u_{(1-\alpha/2)} \text{ ce qui, au risque } \alpha = 0.27 \% \text{ donne}$$

$$-3 \leq \frac{X_B - \text{CIBLE}}{\sigma_{gB}} \leq 3 ,$$

-3 et 3 sont les lignes de contrôle du procédé de finition de la portée de couronne si la variable surveillée est  $\frac{X_B - \text{CIBLE}}{\sigma_{gB}}$  avec CIBLE variable.

## II. MÉTROLOGIE DE LA COURONNE BOULONNÉE

**II.1.** Il s'agit d'une spécification de localisation multiple relative aux 10 alésages  $\phi 8.5 \text{ H}12$ .

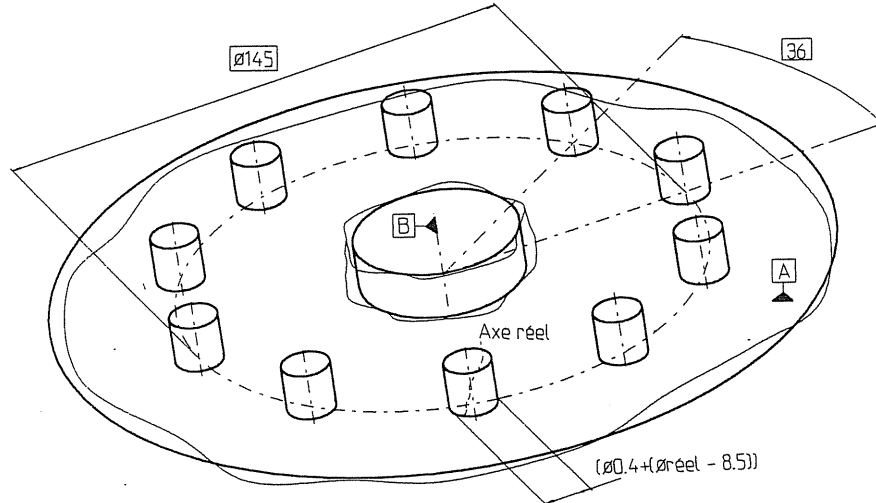
Les entités assujetties à la spécification sont les axes réels des 10 alésages, c'est à dire les lignes reliant les centres des cercles obtenus dans des sections droites perpendiculaires à l'axe supposé de chaque alésage.

Les éléments constituant le système de référence sont :

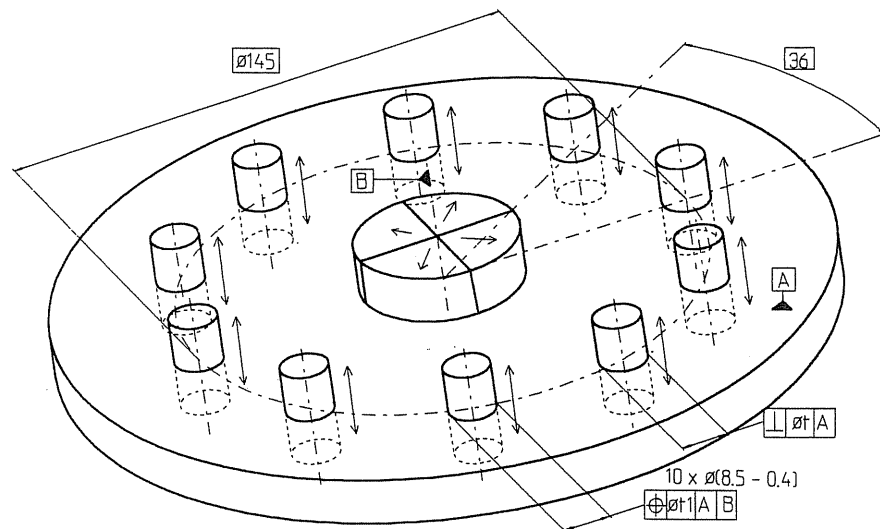
- un plan référencé A, plan tangent du coté libre de la matière et minimisant l'écart maxi avec la surface réelle,
- un cylindre référencé B, plus grand cylindre normal au plan A et tangent du côté libre de la matière à la surface réelle B.

La zone de tolérance est un ensemble de 10 cylindres de hauteur 16 mm, situés sur un cercle de  $\phi 145 \text{ mm}$  et répartis angulairement régulièrement .  
 Le  $\phi$  de chacun des 10 cylindres dépend du  $\phi$  de chacun des alésages, en effet la valeur de la zone de tolérance est au maxi matière, c'est à dire que si le  $\phi$  de l'alésage est supérieur à 8.5 mm la zone de tolérance augmente d'autant en fait la localisation pour chaque alésage peut s'écrire  $\phi (0.4 + (\phi \text{ réel} - 8.5)) \text{ mm}$ .

ILLUSTRATION :



**II.2.** Le montage de contrôle proposé ne permet de vérifier la couronne vis à vis de sa spécification de localisation multiple que parce que cette cotation l'est au maximum de matière.



Les flèches indiquent les mobilités  
 B est un centreur expansible.

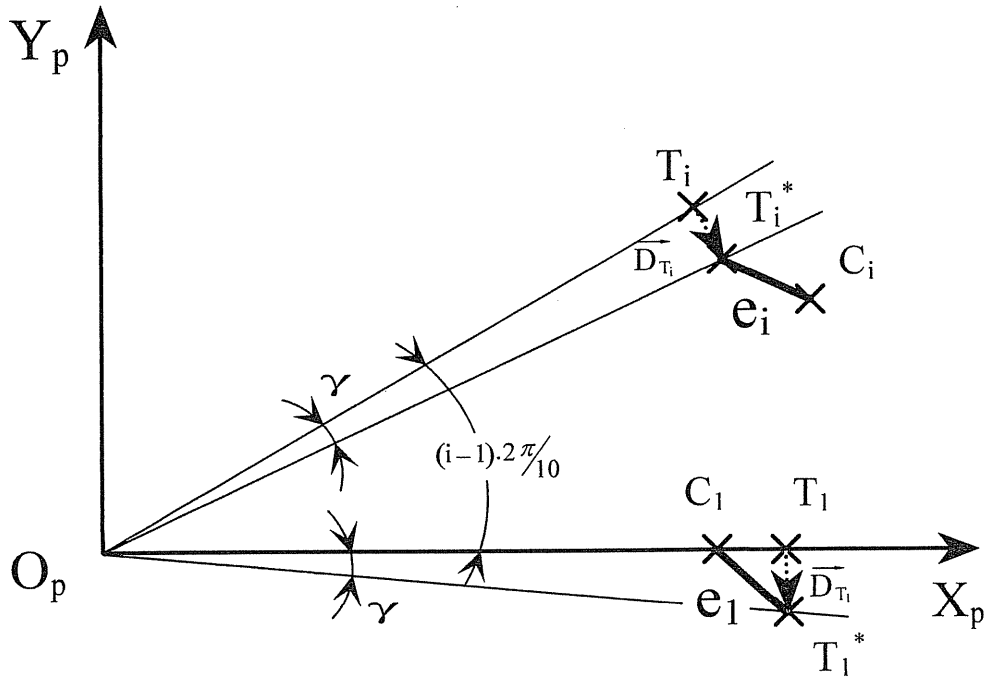
Le mode opératoire est le suivant :

- poser la couronne sur le plan de référence du montage de contrôle,
- expandre le mandrin le plus possible, tout en garantissant une mobilité de rotation sans forcer ,



- pousser l'ensemble des 10 piges et essayer de les faire entrer sans forcer à l'intérieur des 10 alésages en exploitant le degré de liberté en rotation de la couronne. Si l'exécution se fait avec succès la pièce peut être déclarée bonne avec une incertitude liée à la qualité de réalisation du montage de contrôle.

### II.3.1. Illustration



II.3.3. D'après l'interprétation de la spécification géométrique, la seule mobilité de l'ensemble des zones de tolérances est une rotation dans le plan  $(O_p, \vec{X}_p, \vec{Y}_p)$ , aussi peut-on écrire :

$$\vec{D}_{T_i} \text{ déplacement de } T_i \text{ conséquence d'un torseur de petits déplacements } [D]_{O_p/R_p} \begin{vmatrix} 0 \\ \bar{\Omega} \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \\ \bar{D} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$e_i = \|\vec{T}_i^* C_i\| \text{ or } \vec{T}_i^* C_i = \vec{T}_i^* O_p + \vec{O}_p C_i$$

$$\text{avec } \vec{O}_p T_i^* = \vec{O}_p T_i + \vec{D}_{T_i} = \vec{O}_p T_i + \vec{D} - \vec{O}_p T_i \wedge \vec{\Omega}$$

$$\vec{O}_p T_i^* = \begin{vmatrix} X_{T_i} \\ Y_{T_i} \\ 0 \end{vmatrix} + \bar{0} - \begin{vmatrix} X_{T_i} \\ Y_{T_i} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_{T_i} - \gamma \cdot Y_{T_i} \\ Y_{T_i} + \gamma \cdot X_{T_i} \\ 0 \end{vmatrix}$$

**II.3.4.** Le critère de Gauss, propose de déterminer  $\gamma$  permettant de minimiser  $W = \sum_{i=1}^{i=n} e_i^2$ ,

soit dans notre cas  $\sum_{i=1}^{i=10} \left[ \left( X_{C_i} + \gamma \cdot Y_{T_i} - X_{T_i} \right)^2 + \left( Y_{C_i} - \gamma \cdot X_{T_i} - Y_{T_i} \right)^2 \right]$

rechercher  $\gamma$  tel que  $W$  soit mini, c'est trouver  $\gamma$  tel que  $\frac{dW}{d\gamma} = 0$

$$\frac{dW}{d\gamma} = \frac{d \sum_{i=1}^{i=10} \left[ \left( X_{C_i} + \gamma \cdot Y_{T_i} - X_{T_i} \right)^2 + \left( Y_{C_i} - \gamma \cdot X_{T_i} - Y_{T_i} \right)^2 \right]}{d\gamma} =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=10} 2 \cdot \left[ Y_{T_i} \cdot \left( X_{C_i} + \gamma \cdot Y_{T_i} - X_{T_i} \right) + X_{T_i} \cdot \left( Y_{C_i} - \gamma \cdot X_{T_i} - Y_{T_i} \right) \right]$$

$\frac{dW}{d\gamma} = 0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{\sum_{i=1}^{i=10} \left[ Y_{T_i} \cdot \left( X_{C_i} - X_{T_i} \right) - X_{T_i} \cdot \left( Y_{C_i} - Y_{T_i} \right) \right]}{\sum_{i=1}^{i=10} \left[ Y_{T_i}^2 + X_{T_i}^2 \right]}$
---

**II.3.5.** Connaissant  $\gamma$  et l'expression de  $e_i$ , on peut, pour chaque alésage calculer  $e_i$ , l'écart de localisation est alors  $2 \cdot \sup_{i=1}^{i=10} \{e_i\}$

**II.3.6.** Dans le cas où les diamètres des trous ne seraient pas constants les zones de tolérance n'ont pas toutes la même dimension. Si l'objectif est de vérifier la conformité de la pièce, le critère des moindres carrés utilisé de façon classique n'est pas forcément le mieux adapté. En effet, plus le diamètre du trou  $i$  est faible, plus il faut favoriser le rapprochement de  $T_i$  du centre réel  $C_i$ , à l'opposé un alésage de diamètre important peut supporter un éloignement plus important de  $T_i$  par rapport à  $C_i$ .

## TROISIEME PARTIE

### I. CHAÎNE VECTORIELLE CARACTERISANT L'USINAGE

I.1. Chaîne vectorielle :

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO_{pi}} + \overrightarrow{O_{pi}O_{pp}} + \overrightarrow{O_{pp}O_B} + \overrightarrow{O_B O_M} + \overrightarrow{O_M O_{cz}} + \overrightarrow{O_{cz} O_{cx}} + \overrightarrow{O_{cx} O_T} \\ + \overrightarrow{O_T O_{out}} + \overrightarrow{O_{out} O_{co}} + \overrightarrow{O_{co} O_{plaq}} + \overrightarrow{O_{plaq} M}$$

Dans cette modélisation vectorielle les composantes nécessaires à la compensation de rayon en correction normale au profil ne sont pas mises en place.

#### I.2.1. Origines

##### **OM : Origine Machine**

point zéro physique défini par le « 0 » codeur suivant l'excitation d'une butée origine (électrique, inductive, optique...) sur chaque axe

##### **Om : Origine mesure**

« zéro » défini en un point choisi comme nouvelle origine pour des raisons de commodité, compteur à (0,0) si on met un mobile donné en contact avec un autre solide. Exemple : face avant tourelle en contact avec le plan du cône de broche.

On a alors  $P_T/O_m = (0,0)$

$\overrightarrow{O_m P_T}$  est le vecteur dont les composantes sont affichées sur la plupart des machines outils à commande numérique.

#### I.2.2 On peut regrouper certains vecteurs

$$\overrightarrow{O_B O_M} + \overrightarrow{O_M O_{cz}} + \overrightarrow{O_{cz} O_{cx}} + \overrightarrow{O_{cx} O_T} = \overrightarrow{O_B O_T}$$

Mais  $\overrightarrow{O_B O_m} = \vec{0}$ ,  $O_m$  est confondue avec  $O_B$ , donc,

$$\overrightarrow{O_B O_T} = \overrightarrow{O_m O_T} \text{ coordonnées du point courant}$$

$$\overrightarrow{O_{pp} O_B} = \overrightarrow{O_{pp} O_m}$$

$$\overrightarrow{O_T O_{out}} + \overrightarrow{O_{out} O_{co}} + \overrightarrow{O_{co} O_{plaq}} = \overrightarrow{O_T O_{plaq}} \text{ car on a des liaisons complètes}$$

On peut donc écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO_{pi}} + \overrightarrow{O_{pi} O_{pp}} + \overrightarrow{O_{pp} O_m} + \overrightarrow{O_m O_T} + \overrightarrow{O_T O_{plaq}} + \overrightarrow{O_{plaq} M}}$$

### I.3.1. Explicitation des vecteurs

$\overrightarrow{PO_{pi}} = -\overrightarrow{O_{pi}P}$  et  $\overrightarrow{O_{pi}P}$  exprime les coordonnées du point voulu sur la pièce,  $O_{pi}$  est l'origine programme choisie arbitrairement par le programmeur.

$\overrightarrow{O_{pi}O_{pp}} = -\overrightarrow{O_{pp}O_{pi}}$  et  $\overrightarrow{O_{pp}O_{pi}}$  exprime les coordonnées de l'origine programme  $O_{pi}$  dans le repère lié au porte-pièce.

Le vecteur  $\overrightarrow{O_{pp}O_{pi}}$  est appelé décalage (DEC1) sur les directeurs de commandes numériques NUM.

$\overrightarrow{O_{pp}O_m} = -\overrightarrow{O_mO_{pp}}$  et  $\overrightarrow{O_mO_{pp}}$  exprime les coordonnées de l'origine porte-pièce dans le repère mesure,  $O_{pp}$  peut être choisi sur la face avant du mandrin, sur les mors ou sur la face du cône de broche...; il est appelé prise de référence (PREF) sur les commandes numériques NUM

$\overrightarrow{O_mO_T}$  exprime les coordonnées du point courant par rapport à l'origine mesure.

$\overrightarrow{O_TO_{plaq}}$  exprime les jauges outils.

Le point  $O_{plaq}$  peut être à l'intersection des plans tangents en X et en Z à la plaquette, cas le plus courant.

$\overrightarrow{O_{plaq}M} = \overrightarrow{O_{plaq}C} + \overrightarrow{CM}$  si C est le centre de la plaquette ou du bec d'outil,  $CM = R\varepsilon$ .

$\overrightarrow{O_{plaq}M} = \vec{0}$  dans le cas où l'on ne travaille pas en correction normale au profil, on peut donc avoir des différences entre l'usinage voulu et celui réalisé en contournage (cône ou cercle). En correction normale au profil (G41 ou G42), le calculateur tiendra compte du point réel en contact sur le bec d'outil.

$\overrightarrow{O_{plaq}C}$  est donné par  $R\varepsilon$  et le cadran  $C_i$ .

$\overrightarrow{CM}$  est calculé pour être tangent au profil.

### I.3.2 Caractérisation des vecteurs

$\overrightarrow{O_{pi}P}$  : Donnée mathématique issue du plan, erreur nulle si plan correct (voir dessin en cotes moyennes en DAO), programmation.

$\overrightarrow{O_{pp}O_{pi}}$  : Donnée mathématique : choix de la position de l'origine programme par rapport à l'origine pièce.

A noter : si  $O_{pp}$  ne correspond pas aux surfaces de contact pièce - porte-pièce, il faudra donc déterminer une nouvelle composante  $\overrightarrow{O_{pp}O_{surfaced'appui}}$  avec une rigueur plus ou moins grande (de quelques  $\mu\text{m}$  à 0,01mm)

Restent les problèmes liés au posage de la pièce (5 à 10 $\mu\text{m}$ )

$\overrightarrow{O_m O_{pp}}$  : Mesure sur machine (aux imprécisions machine près), erreur de 0,01 à 0,02mm si on procède par frottement doux sur cales étalon pour tangence de surface, de 5 $\mu$ m à 0,01mm avec l'emploi de mandrin à enfoncement NIKKEN (au mieux). Il est à noter que ce type de manipulations est exceptionnel (1 fois par an, ou après un dysfonctionnement important de type collision, intervention mécanique, intervention sur les capteurs...), aussi doit-elle être faite avec un maximum de soin et en particulier, il ne faut pas hésiter à la réaliser plusieurs fois afin de diminuer la variance d'estimation de la valeur, cet aspect se ra développé à la question III.2.3.4..

$\overrightarrow{O_m O_T}$  : lié à la résolution et exactitude des capteurs et surtout mesure directe (règle) ou indirecte (résolveur ou capteur incrémental rotatif (en bout de vis) de 1-2  $\mu$ m à 5-10  $\mu$ m (voire plus si grande longueur)...) sans compter les perturbations.

$\overrightarrow{O_T O_{plaq}}$  : Les jauges outils sont souvent mesurées sur un banc de mesurage d'outils appelés aussi banc de pré-réglage d'outil car il faut garder à l'esprit

- défaut de posage porte-outil / tourelle et banc
- erreur de mesure (appréciation de la tangente sur système optique, erreur au contact sur système à comparateur...)
- défaut d'exactitude et de répétabilité du système de mesure
- pas d'actions mécaniques sur l'outil (surtout pour les outils d'alésage), donc détermination au mieux 0,01 mm...

$\overrightarrow{O_{plaq} M}$  est surtout fonction de R $\epsilon$ , mesuré à quelques 0,01 mm près par des cercles concentriques sur les systèmes optiques. Le plus souvent on évalue si R vaut 0,4 - 0,8...mm, sans le mesurer réellement...

## II.1. Etude des diamètres

$$Cap = Cpk = 1.33$$

Donc les 2 distributions sont centrées, or

$$Cap = \frac{IT}{6\sigma_p} = 1.33 = \frac{4}{3} \quad \text{donc} \quad IT = \frac{4}{3} \times 6\sigma_p = 8\sigma_p$$

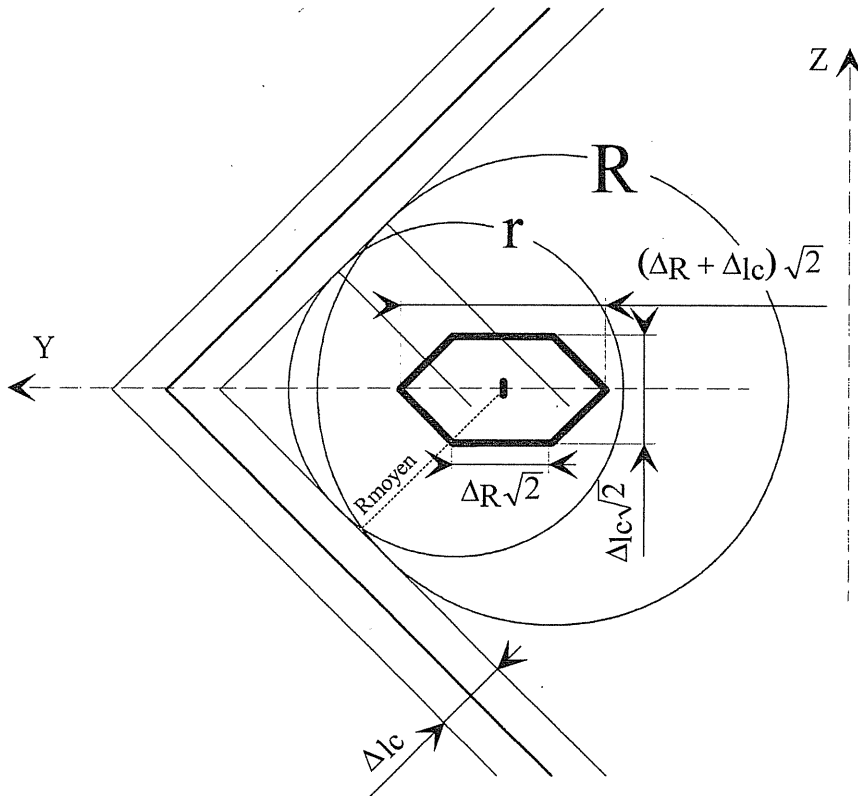
$$\text{donc } \sigma_p = \frac{IT}{8} = \frac{0.03}{8} = 3.75\mu\text{m}$$

au risque  $\alpha = 5\%$  (Cf. abaque de la loi normale centrée réduite), 95% de la population se situe entre  $Cible - 1.96\sigma_p$  et  $Cible + 1.96\sigma_p$

avec  $Cible = \frac{T_s + T_i}{2} = 30.015mm$

$$\begin{aligned} 30.0075 \leq \phi \leq 30.02235 \\ 30.008 < \phi < 30.022 \end{aligned}$$

### II.2.1 Dessin des positions possibles des centres



### II.2.2. Ecart maximum

$$e_y = \pm \left( \frac{\Delta R + \Delta lc}{2} \right) \sqrt{2}$$

$$e_z = \pm \frac{\Delta lc \sqrt{2}}{2}$$

### II.3.1 On cherche le torseur d'écarts au point $O_s$ , donc

$$\left\{ T_{pièce/pp} \right\}_{O_s} = \left\{ \begin{aligned} \vec{\Omega}_{pièce/pp} &= 0\vec{X}_{pp} + \beta\vec{Y}_{pp} + \gamma\vec{Z}_{pp} \\ \vec{D}_{O_s/pièce/pp} &= 0\vec{X}_{pp} + v\vec{Y}_{pp} + w\vec{Z}_{pp} \end{aligned} \right\}$$

Le point M1 subit un déplacement :

$$\vec{D}_{M_1} = \vec{D}_{O_s} + M_1 \vec{O}_s \wedge \vec{\Omega}_{pièce/pp}$$

$$\vec{D}_{M_1} = \vec{D}_{O_s} + (l_1 \vec{X}_{pp}) \wedge (\beta \vec{Y}_{pp} + \gamma \vec{Z}_{pp})$$

$$\vec{D}_{M_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ v - \gamma l_1 \\ w + \beta l_1 \end{pmatrix}$$

de même

$$\vec{D}_{M_2} = \vec{D}_{O_s} + M_2 \vec{O}_s \wedge \vec{\Omega}_{pièce/pp}$$

$$\vec{D}_{M_2} = \vec{D}_{O_s} + (-l_2 \vec{X}_{pp}) \wedge (\beta \vec{Y}_{pp} + \gamma \vec{Z}_{pp})$$

$$\vec{D}_{M_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \gamma l_2 \\ w - \beta l_2 \end{pmatrix}$$

or  $\vec{D}_{M_1}$  est l'écart de position par rapport au point théorique pour  $R_{moyen}$  et  $\Delta l_c$ , donc :

$$\vec{D}_{M_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{1y} \\ \xi_{1z} \end{pmatrix} \text{ de même pour } \vec{D}_{M_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{2y} \\ \xi_{2z} \end{pmatrix} \text{ donc on obtient le système d'équations :}$$

$$\begin{cases} \xi_{1y} = v - \gamma l_1 & (1) \\ \xi_{1z} = w + \beta l_1 & (2) \\ \xi_{2y} = v + \gamma l_2 & (3) \\ \xi_{2z} = w - \beta l_2 & (4) \end{cases}$$

système de 4 équations à 4 inconnues, en faisant (1)-(3) et (2)-(4), il vient :

$$\boxed{\gamma = \frac{\xi_{2y} - \xi_{1y}}{l_1 + l_2}} \text{ et } \boxed{\beta = \frac{\xi_{1z} - \xi_{2z}}{l_1 + l_2}}$$

en substituant dans (1) :

$$\boxed{v = \frac{1}{l_1 + l_2} (l_2 \xi_{1y} + l_1 \xi_{2y})}$$

en substituant dans (2) :

$$\boxed{w = \frac{1}{l_1 + l_2} (l_2 \xi_{1z} + l_1 \xi_{2z})}$$

II.3.2 On a d'après la question II.2.2

$$e_y = \pm \left( \frac{\Delta R + \Delta l_c}{2} \right) \sqrt{2}$$

$$e_z = \pm \frac{\Delta l_c \sqrt{2}}{2}$$

Donc :

$$\Delta e_y = (\Delta R + \Delta l_c) \sqrt{2} = 0.034 \text{ mm} \quad \text{intervalle de variation de } \xi_{1y}$$

$$\Delta e_z = \Delta l_c \sqrt{2} = 0.014 \text{ mm} \quad \text{intervalle de variation de } \xi_{1z}$$

De même pour le vé2.

II.3.3

$$|\xi_{1y}|_{MAXI} = OC - BC \quad \text{car l'angle du vé est à } 90^\circ$$

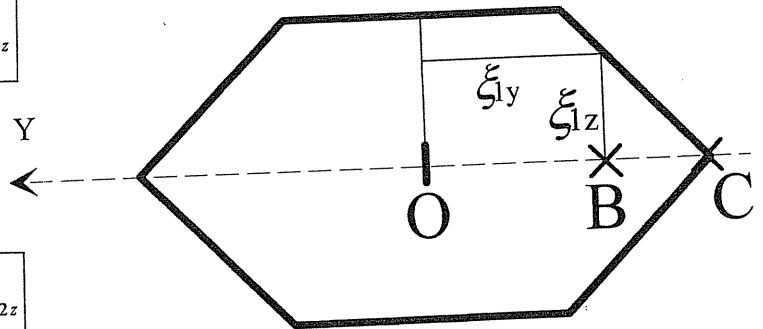
$$\text{si } BC = \xi_{1z} \Rightarrow |\xi_{1y}|_{MAXI} = \left( \frac{\Delta R + \Delta l_c}{2} \right) \sqrt{2} - \xi_{1z}$$

$$\text{et} \quad |\xi_{1z}|_{MAXI} = \frac{\Delta l_c \sqrt{2}}{2}$$

De même pour le vé 2

$$|\xi_{2y}|_{MAXI} = \left( \frac{\Delta R + \Delta l_c}{2} \right) \sqrt{2} - \xi_{2z}$$

$$\text{et} \quad |\xi_{2z}|_{MAXI} = \frac{\Delta l_c \sqrt{2}}{2}$$



$$\text{II.3.4} \quad -\Delta l_c \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \xi_{1z} \leq \Delta l_c \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Donc} \quad \xi_{1z} - \left( \frac{\Delta \phi}{2} + \Delta l_c \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \xi_{1y} \leq \left( \frac{\Delta \phi}{2} + \Delta l_c \right) \frac{\sqrt{2}}{2} - \xi_{1z} \quad \text{si } \xi_{1z} \geq 0$$

$$\text{Et} \quad -\xi_{1z} - \left( \frac{\Delta \phi}{2} + \Delta l_c \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \xi_{1y} \leq \left( \frac{\Delta \phi}{2} + \Delta l_c \right) \frac{\sqrt{2}}{2} + \xi_{1z} \quad \text{si } \xi_{1z} \leq 0$$

$$|\xi_{1y}| \leq \left( \frac{\Delta R + \Delta l_c}{2} \right) \sqrt{2} - |\xi_{1z}|$$

$$\text{AN : } |\xi_{1y}| \leq \left( \frac{0.075 + 0.01}{2} \right) \sqrt{2} - |\xi_{1z}| \quad \text{donc} \quad |\xi_{1y}| \leq 0.0124 - |\xi_{1z}|$$

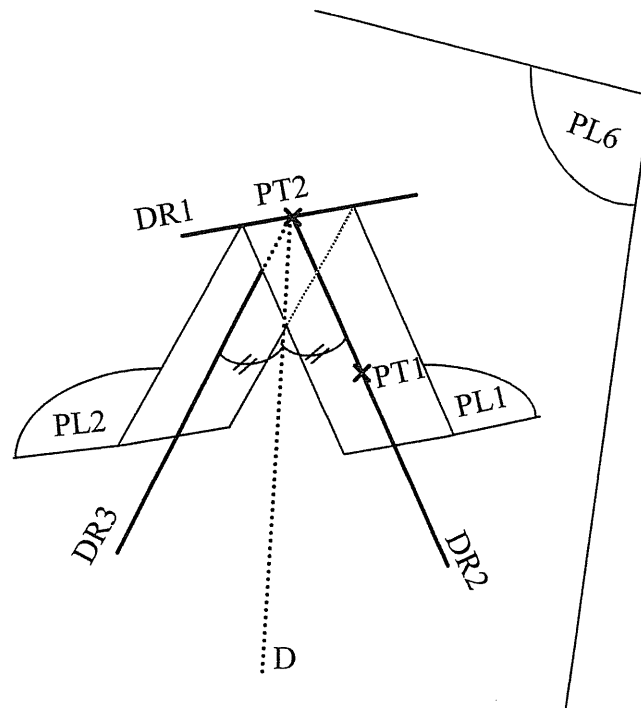


## II.4.1 Gamme de mesurage

### -Etalonnages palpeurs et prise d'origine

#### -Mesures

- palpage de PLO
- palpage du cône CONE 1
- palpage des plans PL1 → PL5



#### -Constructions

$$PT0 = PL0 \cap CONE 1$$

détermination de M1, centre de C1

$$DR1 = PL1 \cap PL2$$

-palpage d'un point PT1 dans le plan PL1 (à peu près au milieu)

PL6 = plan perpendiculaire à DR1 et passant par PT1

$$DR2 = PL1 \cap PL6$$

$$DR3 = PL2 \cap PL6$$

$$\alpha_1 = \text{angle} (DR2, DR 3)$$

DR4 = Bissectrice de  $\alpha_1$  (DR3, DR4)

PT2 = DR1  $\cap$  PL6

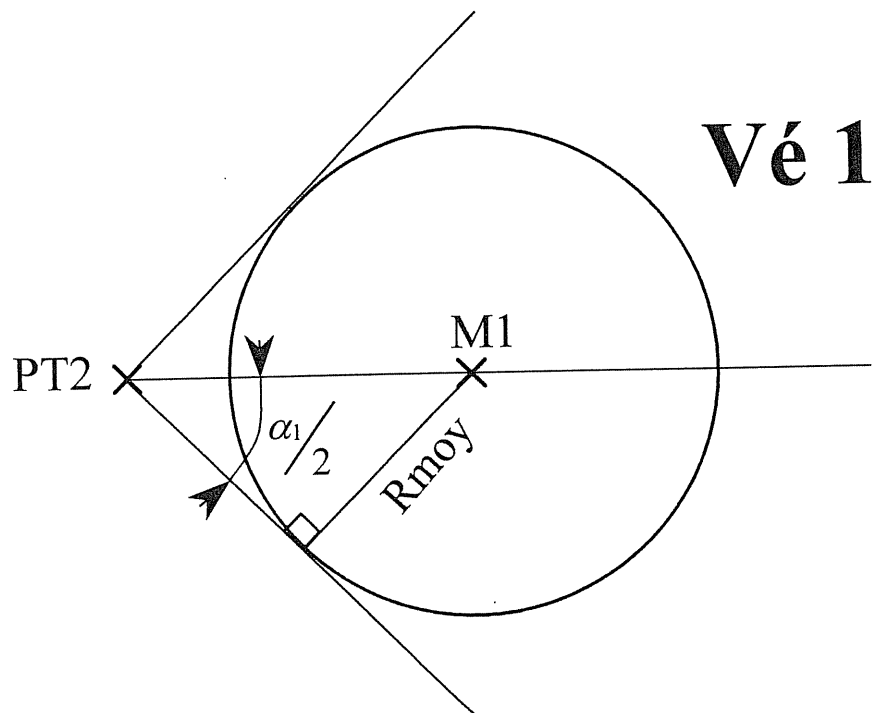
Repère de dégauchissage 1 axe RP1 défini par :

RP1 : axe X : DR4

origine: PT2

direction plus(sens positif) vers l'intérieur du vé ( palpage d'un point)

création du point M1 nominal



$$\overrightarrow{PT2M1} = x_1 \vec{X}_{RP1} \quad \text{avec} \quad x_1 = \frac{R_{moyen}}{\sin \frac{\alpha_1}{2}}$$

$$\text{point théorique PT3 tel que : } PT3 = M1 = \frac{R_{moyen}}{\sin \frac{\alpha_1}{2}} \vec{X}_{RP1}$$

De même pour le Vé 2 et donc le point M2 mis en place.

Revenir dans le repère machine

$$DR5 = PL3 \cap PL4$$

-palpage d'un point PT4 dans le plan PL4

PL7 = plan  $\perp$  à DR5 et passant par PT3

DR6 = PL7  $\cap$  PL3

DR7 = PL7  $\cap$  PL4

$\alpha_2$  = angle (DR6, DR7)

DR8 = bissectrice de l'angle  $\alpha_2$

PT4 = DR5  $\cap$  PL7

*Deuxième repère de dégauchissage 1 axe RP2 défini par*

RP2 : axe X : DR8

origine : PT4

direction plus(sens positif) vers l'intérieur du vé

Création du point M2 nominal :

$$\overrightarrow{PT4M2} = x_2 \vec{X}_{RP2} \quad \text{avec} \quad x_2 = \frac{R_{moyen}}{\sin \frac{\alpha_2}{2}}$$

$$\text{point théorique PT5 tel que : } PT5 = M2 = \frac{R_{moyen}}{\sin \frac{\alpha_2}{2}} \vec{X}_{RP2}$$

Revenir dans le repère machine

Construction de l'axe M1 M2

DR9 = droite passant par M1 et M2 (PT3, PT4)

DR10 = projection de DR9 dans PL0

*Troisième repère de dégauchissage RP3 défini par :*

-axe Z perpendiculaire à PLO

-origine PT0

-axe X parallèle à DR9

-axe Y tel que le repère X, Y, Z soit direct (avec axes positifs conformément au document III.B.3)

On travaille dans le repère RP3

PT6 = DR9  $\cap$  PL5 (intersection axe M1M2 avec butée 5)

PT6 =  $(x_6, y_6, z_6)$  dans le RP3

Position de Os nominal voulu à 73,375 mm de PL5 donc de PT6

*Quatrième repère de dégauchissage 1 axe RP4 défini par :*

RP4 : axe X : DR9  
origine : PT6 sens plus du dessin

Construction de Os :

point théorique PT7  $\rightarrow x_7 = +73,375 (X_{RP4})$

$$\text{Distances de } \begin{cases} (Os, PL0) \rightarrow d1 \\ (Os, XZRP3) \rightarrow d2 \\ (Os, YZRP3) \rightarrow d3 \end{cases}$$

à moins que la MMT ne donne directement la distance Os à PT0 directement sous forme de vecteur dans RP3...

II.4.2. On connaît les trois composantes du vecteur  $\overrightarrow{O_{pp}Os}$  dans le repère lié au porte-pièce mesuré sur celui-ci

\*d1 : la composante suivant X ou X' (dessin) devrait être nulle car Os devait appartenir au plan (tournant) YZpp.

Si d1 est non nulle, on génère un défaut de position de l'axe de la sphère qui se réalisera sur l'axe Zpp de par la cinématique de la machine.

*Correction possible si PL5 est réglable.*

\*d2 : défaut de position de la sphère

Les surfaces des vés étant des pièces d'usure, on peut envisager de les "ajuster" ou de les refaire, on vérifiera par une nouvelle mesure.

\*d3 : distance suivant Zpp de Os à Opp, sa connaissance permettra de mettre en place les trajectoires nécessaires à l'usinage.

On pourra afficher d3 comme composante en Z du vecteur  $\overrightarrow{O_{pi}O_{pp}}$  de la chaîne vectorielle (question I.2.2), les deux autres composantes devant être nulles.

Éventuellement  $\overrightarrow{DEC1} = (0,0,d3)$  dans le cas où  $\overrightarrow{PREF} = (0,0,0)$

II.4.3 Les mesures de d1, d2, d3 sont réalisées sur Machine à Mesurer Tridimensionnelle probablement munie d'un système de palpage RENISHAW dont la répétabilité n'est que de quelques micromètres (erreur de mesure plus ou moins importante suivant les directions de palpage et fonction aussi de la longueur des palpeurs, ici 100 à 150 mm, en quelque sorte anisotropie et homothétie...).

Les erreurs de mesure sur les axes sont de l'ordre de  $\pm(5 + L/150)\mu\text{m}$  donc, au mieux, chaque point est mesuré à  $\pm 5$  à  $10\mu\text{m}$  (voir p 56-57 Rapport sujet 98), éventuellement  $\pm 5\mu\text{m}$  si on a une calibration d'axe, au mieux !...

II.4.4. Si  $d_1 \neq 0$

On peut réaliser une butée réglable pour corriger le défaut, la position exigée n'est pas très précise néanmoins, il faut noter que pour simplifier le sujet, la butée 5 est sur l'axe or la pièce est percée donc l'appui sera réalisé sur la face sur un diamètre 30 et que cette face peut avoir un écart de battement de 0,1 mm...

Si  $d_2 \neq 0$  éventuellement vés réglables, il suffit de les rerégler, sinon vérifier que cet écart est compatible avec les spécifications voulues...

II.5.1.

$$\boxed{O_{\text{idéal}} = O_{S_{\text{voulu}}} = 0\vec{X}_{Om} + 0\vec{Y}_{Om} + d_3\vec{Z}_{Om}}$$

II.5.2.

$$\overrightarrow{O_{\text{idéal}} O_{\text{idéal réel}}} = \overrightarrow{O_{S_{\text{voulu}}} O_{S_{\text{réel}}}} = \overrightarrow{D_{O_S \text{ pièce/broche}}}$$

$\{T_{i/j}\}_M$  exprime un torseur d'écart

$$\{T_{\text{pièce/broche}}\}_{O_S} = \{T_{\text{pièce/vés}}\}_{O_S} + \{T_{\text{vés/pp}}\}_{O_S} + \{T_{\text{pp/broche}}\}_{O_S}$$

avec  $\{T_{\text{pièce/vés}}\}_{O_S}$  = torseur d'écart au niveau du posage pièce-surface d'appui

$\{T_{\text{vés/pp}}\}_{O_S}$  = torseur d'écart de position des surfaces d'appui par rapport au porte-pièce

$\{T_{\text{pp/broche}}\}_{O_S}$  = torseur d'écart au niveau du posage porte-pièce/broche.

$\{T_{\text{pièce/vés}}\}_{O_S} = \{T_{\text{pièce/pp}}\}_{O_S}$  de la question II.3

$$\{T_{\text{pièce/pp}}\}_{O_S} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{\text{pièce/vés}} = \beta \vec{Y}_{pp} + \gamma \vec{Z}_{pp} \\ \vec{D}_{O_S} = v \vec{Y}_{pp} + w \vec{Z}_{pp} \end{cases}$$

Mais  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $v$  et  $w$  sont des écarts fonction des  $\xi_i$  variant dans des intervalles définis à la question II.3.4, ils n'ont pas une valeur mais des valeurs possibles

$$\{T_{\text{vés/pp}}\}_{O_S} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{\text{vés/pp}} = \beta_3 \vec{Y}_{pp} + \gamma_3 \vec{Z}_{pp} & (1) \\ \vec{D}_{O_S \text{ vés/pp}} = d_1 \vec{X}_{pp} + d_2 \vec{Y}_{pp} + 0 \vec{Z}_{pp} & (2) \end{cases}$$

(1) → le défaut autour de  $\vec{X}$  est supposé nul

(2) → si  $d_3$  a été correctement mesuré, à l'incertitude près, son écart est nul

$\beta_3$  et  $\gamma_3$  sont les écarts angulaires de la droite M1M2 par rapport à  $\vec{X}$  (ou  $\vec{X}'$ ), donc :

$$\beta_3 = \text{angle}(\overrightarrow{M1M2}, \vec{Y}_{RP3})$$

$$\gamma_3 = \text{angle}(\overrightarrow{M1M2}, \vec{Z}_{RP3})$$

il est à noter que  $\beta_3$  et  $\gamma_3$  ont une valeur mesurée à l'incertitude de mesure près, or un montage réalisé avec soin montrera des valeurs faibles et voisines de 0, du même ordre de grandeur que l'incertitude de mesure, on pourrait écrire :

$$\begin{cases} \beta_3' = \beta_3 + \varepsilon_{\beta_3} \\ \gamma_3' = \gamma_3 + \varepsilon_{\gamma_3} \end{cases}$$

$\beta_3'$  et  $\gamma_3'$  représentant les valeurs possibles des écarts.

De même  $d_1$  et  $d_2$  représentent les écarts déterminés à la question II.4.1 aux incertitudes de mesures près (II.4.3)

On pourrait donc écrire

$$\begin{cases} d_1' = d_1 + \varepsilon_{d1} = u_1' \\ d_2' = d_2 + \varepsilon_{d2} = v_1' \end{cases}$$

$d_1'$  et  $d_2'$  représentant les valeurs possibles de  $d_1$  et  $d_2$ .

$$\left\{ T_{pp/broche} \right\}_{Os} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{pp/broche} \\ \vec{D}_{Os pp/broche} \end{cases}$$

$$\text{or } \left\{ T_{pp/broche} \right\}_{Om} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{pp/broche} = \alpha_2 \vec{X} + \beta_2 \vec{Y} \\ \vec{D}_{Os pp/broche} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\vec{D}_{Os pp/broche} = \vec{D}_{Om pp/broche} + \overrightarrow{OsO_m} \wedge \vec{\Omega}_{pp/broche}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{OsO_m} = 0 \vec{X} + 0 \vec{Y} + (-d_3 + \varepsilon_{d_3}) \vec{Z} = -d_3' \vec{Z}$$

$$\text{d'où } \vec{D}_{Os} = \vec{0} - d_3' \beta_2 \vec{X} - d_3' \alpha_2 \vec{Y} + 0 \vec{Z}$$

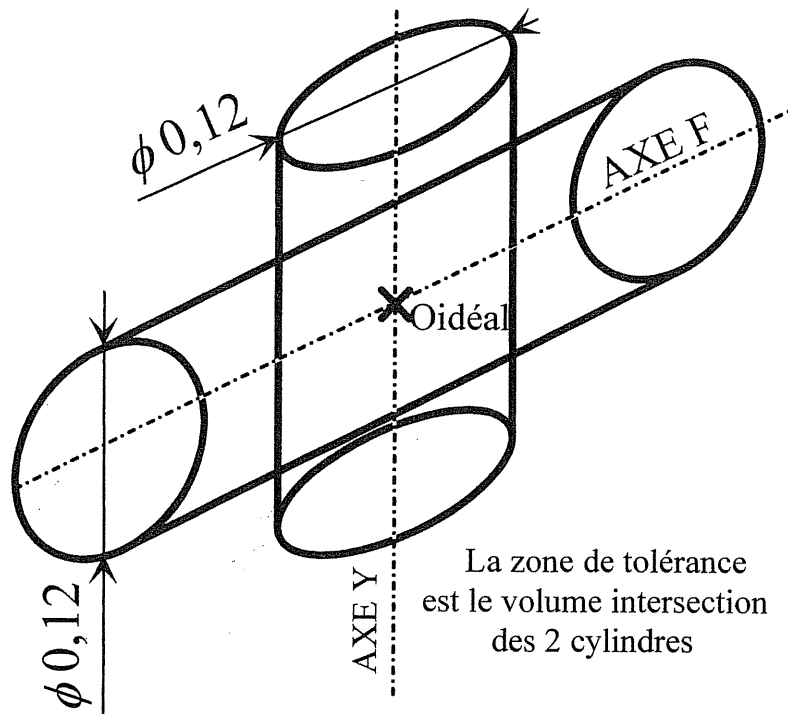
Donc :

$$\vec{D}_{Os\ pi\grave{e}ce/broche} = \vec{D}_{Os\ pi\grave{e}ce/v\acute{e}s} + \vec{D}_{Os\ v\acute{e}s/pp} + \vec{D}_{Os\ pp/broche}$$

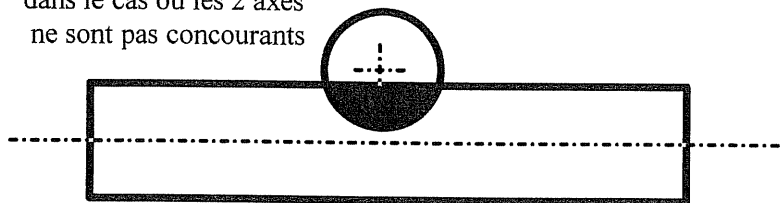
$$\vec{D}_{Os\ pi\grave{e}ce/broche} = \begin{cases} 0 + d'_1 + d'_3\beta_2 \\ v + d'_2 - d'_3\alpha_2 \\ w + 0 + 0 \end{cases}$$

$$\vec{D}_{Os\ pi\grave{e}ce/broche} = \begin{cases} d'_1 + d'_3\beta_2 = d_x \\ \frac{1}{l_1 + l_2} [l_2\xi_{1y} + l_1\xi_{2y}] + d'_2 - d'_3\alpha_2 = d_y \\ \frac{1}{l_1 + l_2} [l_2\xi_{1z} + l_1\xi_{2z}] = d_z \end{cases}$$

### MISE EN PLACE DE Oidéal



La zone de tolérance dans le cas où les 2 axes ne sont pas concourants



écart suivant z :  $z = d_z \approx \frac{1}{l_1 + l_2} [l_2 \xi_{1z} + l_1 \xi_{2z}] < 0,06$ , voir schéma page précédente.

- dans le plan XY

Soit  $e_1$  : écart de localisation possible de l'axe de la sphère suivant X

$$e_1 = \sqrt{d_y^2 + d_z^2} < 0,06 \text{ car on aura un écart possible de coaxialité entre F et G}$$

de même pour la localisation suivant Y

$$e_2 = \sqrt{d_x^2 + d_z^2} < 0,06$$

On ne peut pas juger directement du respect des spécifications de localisation, il faudrait étudier les phases précédentes... Ce n'est plus l'objet du sujet....

II.5.3. La plupart des paramètres intervenant dans le calcul du déplacement  $\overrightarrow{D_{O_s}}$  sont variables dans des intervalles. Pour avoir le maximum, on ne peut que calculer systématiquement le déplacement pour des écarts donnés. On devra donc calculer toutes les configurations possibles (chaque paramètre variant dans son intervalle) et chercher l'écart maxi à partir de là, on pourra prendre des décisions quant à la faisabilité.

Les variables intervenant dans la modélisation sont parfois aléatoires, aussi, la détermination des écarts potentiels au travers d'étendues est-elle pessimiste. Aussi, si l'écart obtenu n'est pas compatible avec les exigences, on ne peut conclure.

Il faudrait utiliser une modélisation permettant de donner à chacune des variables des valeurs équiprobabilistes à un risque  $\alpha$  choisi au départ, 0.27% étant communément utilisé.

*Remarque : on ne peut employer  $\alpha_2 = \pm 2.10^{-5} rd =$  intervalle de  $4.10^{-5} rd$  directement dans le calcul*



## DEFAUTS LIES A L'OUTIL

III.1.1 Soit  $R_p$  le rayon programmé et  $r_u$  le rayon usiné :

Sur X en B :

$$\Delta r = R_p - r_{u2} = \delta = 0.015 \text{ mm}$$

$$\text{AN} : r_{u2} = 34.885 \text{ mm}$$

En C ou A :

$$\text{Dans ODA, } OD^2 + DA^2 = r_{u1}^2$$

$$\text{avec } \begin{cases} DA = \frac{l}{2} \\ OD = r_{u2} - x \\ x = DB = R_p - \sqrt{R_p^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \end{cases}$$

$$r_{u1}^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (r_{u2} - x)^2 \quad \text{donc}$$

$$r_{u1} = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left[ \sqrt{R_p^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} - \delta \right]^2}$$

$$\text{AN} : r_{u1} = \sqrt{(20)^2 + \left[ \sqrt{34.9^2 - (20)^2} - 0.015 \right]^2} = 34.8877 \text{ mm}$$

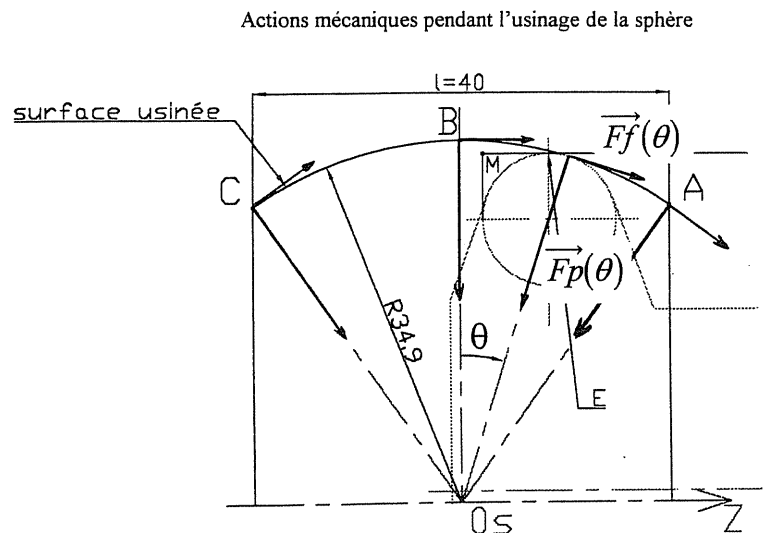
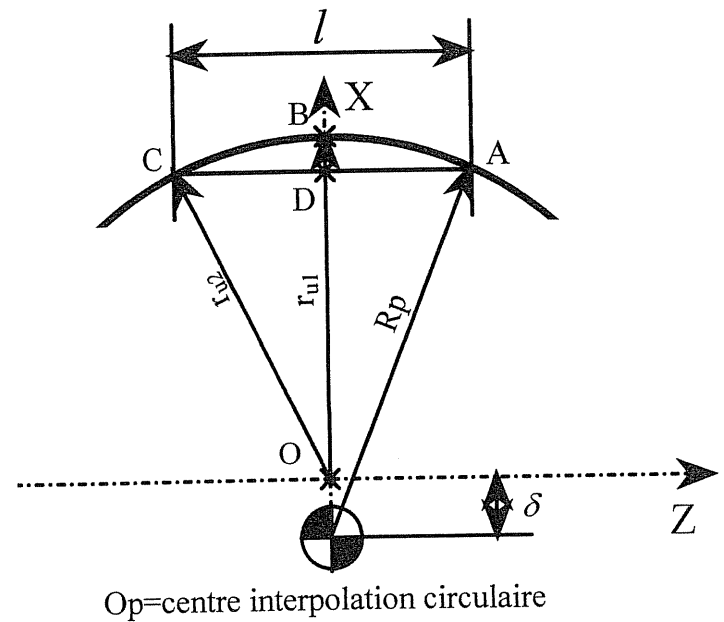
Donc  $\Delta r_u = r_{u1} - r_{u2} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ , l'écart de forme généré par ce défaut sera faible...

III.2.1.1 La définition des actions mécaniques pièce-outil donne :

$\vec{F}_c$  parallèle à  $\vec{V}_c$

$\vec{F}_f$  parallèle à  $\vec{V}_f$

$\vec{F}_p$  perpendiculaire à  $\vec{F}_c$  et à  $\vec{F}_f$

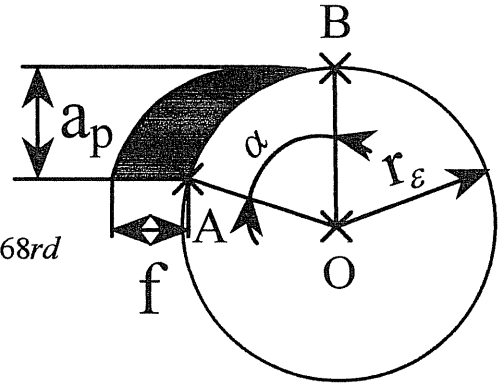


III.2.1.2 Epaisseur moyenne du copeau :  $h_m = \frac{S_{\text{copeau}}}{l_{\text{arêteenprise}}}$

$$l_{\text{arêteenprise}} = R_\varepsilon \cdot \alpha$$

dans ABO  $\cos \alpha = \frac{BO}{R_\varepsilon} = \frac{R_\varepsilon - a_p}{R_\varepsilon}$  donc

$$\alpha = \arccos\left(\frac{R_\varepsilon - a_p}{R_\varepsilon}\right) = \arccos\left(\frac{6.35 - 0.4}{6.35}\right) = 20.445^\circ = 0.3568 \text{rd}$$



$$l_{\text{arêteenprise}} = R_\varepsilon \cdot \alpha = 6.35 \times 0.3568 = 2.266 \text{mm d'où}$$

$$h_m = \frac{a_p \times f}{l_{\text{arêteenprise}}} = \frac{0.4 \times 0.55}{2.266} = 0.097 \text{mm}$$

$$K_c = K_{c0.097} = 1800 \times \left(\frac{0.4}{0.097}\right)^{0.29} = 2714.6 \text{MPa}$$

$$F_c = K_{c0.097} \times a_p \times f = 2714.6 \times 0.55 \times 0.4 = 597.2 \text{N}$$

$$F_f = 0.5 \times F_c = 0.5 \times 597.2 = 298.6 \text{N car } 0 < |\kappa_r| \leq 35^\circ \text{ et } \kappa_{re} \approx 0$$

$$F_p = \left( \frac{0.65}{\left(\frac{0.4}{6.35}\right)^{0.3}} \right) \times F_c = 1.49 F_c = 889.7 \text{N car } 0 < |\kappa_r| \leq 35^\circ \text{ et } \kappa_{re} \approx 0$$

### III.2.3. Comparaison modèle-essais

$$\frac{F_{c \text{ modèle}}}{F_{c \text{ essai}}} = \frac{597,2}{601} = 0,99 \quad \text{très bonne adéquation}$$

$$\frac{F_{f \text{ modèle}}}{F_{f \text{ essai}}} = \frac{298,6}{237} = 1,26 \quad \text{écart de 26\% dû à } \kappa_{re} \approx 0 \text{ et à } R_\varepsilon \text{ grand}(6.35\text{mm})$$

$$\frac{F_{p \text{ modèle}}}{F_{p \text{ essai}}} = \frac{889,7}{479} = 1,86 \quad \text{écart de 86\% dû à } \kappa_{re} \approx 0 \text{ et à } R_\varepsilon \text{ grand}(6.35\text{mm})$$

II.2.1.4. Les modèles proposés concernent les outils « classiques » d'usinage dotés de plaquette avec des rayons  $R_\varepsilon$  normalisés faibles (de 0.4mm à 1.6mm) et pour des  $\kappa_{re}$  grands (minimum  $45^\circ$ , voire  $90^\circ$ ). Le cas de l'usinage à plaquette ronde n'est pas traité et seuls les essais permettent d'obtenir des valeurs fiables !...

III.2.2.1. En projetant sur les axes X et Z les forces  $\vec{F}_c$  et  $\vec{F}_f$

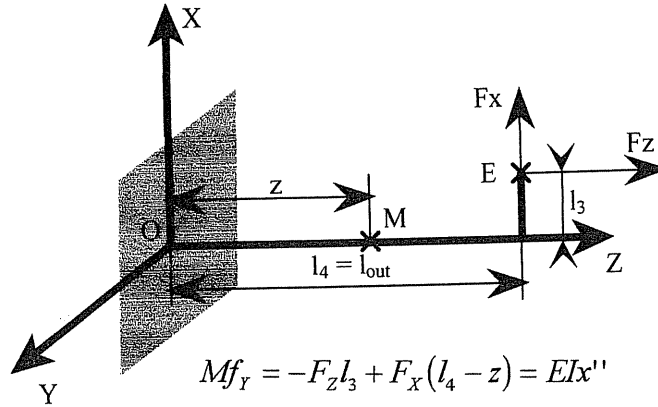
$$\begin{cases} F_{f_x} = F_f \sin \theta \\ F_{f_z} = F_f \cos \theta \end{cases} \quad \text{et ceci, quelle que soit la valeur de } \theta \quad -35^\circ \leq \theta \leq 35^\circ$$

$$\begin{cases} F_{p_x} = -F_p \cos \theta \\ F_{p_z} = F_p \sin \theta \end{cases} \quad \text{et ceci, quelle que soit la valeur de } \theta \quad -35^\circ \leq \theta \leq 35^\circ$$

$\theta$  est positif dans le sens Z vers X, donc les projections sur les axes X et Z s'écrivent :

$$\begin{cases} F_x = Ff \sin \theta - Fp \cos \theta \\ F_z = Ff \cos \theta + Fp \sin \theta \end{cases}$$

### III.2.2.2 Déformée de l'outil



Avec E : module d'Young de la barre

I : Moment quadratique de la barre par rapport à l'axe Y,  $I_Y = \frac{\pi D^4}{64}$

$$EI x' = -F_z l_3 z + F_x l_4 z - F_x \frac{z^2}{2} + K_1$$

$$x' = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ donc } K_1 = 0$$

$$EI x = -F_z l_3 \frac{z^2}{2} + F_x l_4 \frac{z^2}{2} - F_x \frac{z^3}{6} + K_2$$

$$x = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ donc } K_2 = 0$$

Equation de la déformée : 
$$x = \frac{1}{EI} \left( -F_z l_3 \frac{z^2}{2} + F_x l_4 \frac{z^2}{2} - F_x \frac{z^3}{6} \right)$$

Flèche maximale pour  $z = l_4$

$$x_M = \frac{1}{EI} \left( -F_z l_3 \frac{l_4^2}{2} + F_x l_4 \frac{l_4^2}{2} - F_x \frac{l_4^3}{6} \right) = \frac{1}{EI} \left( -F_z l_3 \frac{l_4^2}{2} + F_x \left( l_4 \frac{l_4^2}{2} - \frac{l_4^3}{6} \right) \right)$$

$$x_M = \frac{1}{EI} \left( -F_z l_3 \frac{l_4^2}{2} + F_x l_4^3 \left( \frac{3-1}{6} \right) \right)$$

Flèche maximale pour un angle  $\theta$  :

$$x_M(\theta) = \frac{1}{EI} \left( -F_z(\theta) \frac{l_3 l_4^2}{2} + F_x(\theta) \frac{l_4^3}{3} \right)$$

Application Numérique :

$\theta(^{\circ})$	FX(N)	FZ(N)	Flèche $x_M(\theta)$ (mm)
-35°	-528.3	-80.6	-0.031
0	-479	237	-0.025
35°	-256	468.9	-0.058

III.2.2.4. La différence de rayon génère un écart sur la sphère tel que :

$$\Delta x = \Delta r_{\text{sphère}} = |-0.058 + 0.025| \approx 0.033 \text{ mm}$$

On génère un écart sur le diamètre de 0.066mm, générant un écart de forme, et ceci hors les problèmes de coupe interrompue quand l'outil passe sur les rayons comprenant les perçages...

III.2.2.5. Le moyen de minimiser la flexion de l'outil à alèser est de :

-**maximiser le module d'Young** de la barre en employant une barre carbure monobloc, E vaudra entre 300 et 350 Gpa, donc diminuera la flèche dans un rapport 1.5 mini (voire 1.75) et ceci pour un investissement très raisonnable, et cela diminuera sensiblement les vibrations....

-**maximiser le diamètre** de la barre en se rapprochant de la « limite garantie par les fondeurs » et prendre une barre d'au moins 40mm de diamètre, le moment quadratique I augmenterait dans un rapport 1.7...

Par ces 2 moyens, on pourrait diminuer dans un rapport proche de 3 (1.7\*1.7) la flèche, donc obtenir une flèche inférieure à 0.025mm...

Mais si la répétabilité était prouvée (surépaisseur sensiblement constante d'une pièce à l'autre), le plus simple serait de **reprogrammer la trajectoire** pour juguler cet écart.

III.2.3.1.  $\Delta JZ$  : génère un écart de position de la sphère

III.2.3.2.  $\Delta JX$  : génère un écart de forme de la sphère pour la même raison qu'en III.1.1 et un écart dimensionnel sur le pseudo-diamètre qui vaudra  $2\Delta JX$ , au point B.

III.2.3.3.  $\Delta R\epsilon$  : génère un décalage NON CONSTANT de trajectoire en correction normale au profil, ce qui occasionne un écart sur Z et sur X et un écart de forme.

III.2.3.4. Il est très difficile de discriminer les causes donc de corriger les différents éléments. Néanmoins, il faut s'attacher lorsque c'est possible à apporter un maximum de robustesse lors de l'estimation des composantes de certains vecteurs de la chaîne caractéristique de l'usinage. Des manipulations répétées visant à quantifier ces composantes auront pour but de diminuer la variance d'estimation de l'espérance mathématique de chaque variable aléatoire, ce qui permettra de déterminer des écarts systématiques (ce qui revient à discriminer la part déterministe de la part aléatoire...)...

Exemple : étalonnage d'un banc de mesure d'outil ....

En conclusion, il faut cesser de tout imputer aux « dispersions »...

# **Commentaires du jury sur l'épreuve de composition des technologies de fabrication**

## **Commentaire relatif à la première partie**

Cette partie traitait la réalisation de la pièce brute et se subdivisait en deux sous-parties : élaboration du matériau et réalisation des pièces. Le candidat y était très guidé, et pour éviter tout blocage, les résultats intermédiaires nécessaires à la poursuite de l'étude étaient fournis dans le sujet.

Cette première partie a été traitée honorablement, mais ne faisait appel qu'à des connaissances générales plus ou moins bien appliquées.

Les connaissances en métallurgie de base sont moyennement maîtrisées, et en particulier sur les fontes.

Le dessin d'un simple noyau pose des difficultés à nombre de candidats. Les justifications des réponses ne sont parfois pas appliquées à la spécificité de la pièce, voire oiseuses.

La question sur les quantités économiques, sortie de l'application numérique de la première partie a été plutôt mal traitée.

## **Commentaire relatif à la deuxième partie**

Cette partie portait sur une étude statistique concernant l'assemblage de la couronne sur le boîtier et la mesure d'une spécification de localisation multiple.

L'étude statistique a été plutôt bien traitée, les candidats pour la plupart n'ont pas fait l'impasse dans ce domaine.

Les spécifications ont été souvent trop imprécisément interprétées en particulier concernant l'association de surfaces de référence à des surfaces réelles.

Très peu de candidats ont su mettre en place l'exploitation des points mesurés en vue de quantifier l'écart de localisation et se sont contentés d'appliquer de façon primaire l'optimisation d'un cercle.

## **Commentaire relatif à la troisième partie**

Cette partie portait sur la chaîne caractéristique de l'usinage, le posage de la pièce en phase 70 et les défauts liés à l'outil.

La chaîne caractéristique de l'usinage a été bien abordée par la majorité des candidats jusqu'à l'identification des constituants de cette chaîne.

Le problème concernant le posage de la pièce a très rarement été correctement traité, beaucoup de candidats malgré tout ont fait des efforts en géométrie parfois couronnés de succès, peu ont utilisé des outils modernes adaptés à ce genre d'étude.

Beaucoup de candidats ne peuvent s'adapter à des boîtes à outil standard sur les MMT, des opérations de construction comparables à ce qui est disponible sur des systèmes de CAO sont proposées par certains candidats.

L'étude des défauts liés à l'outil a été traitée par peu de candidats et très peu d'entre eux l'ont mené de façon rigoureuse comme on est en droit de l'attendre d'un futur professeur agrégé.

### Les résultats de l'épreuve :

