



MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

EAE SIM 2

SESSION 2018

AGRÉGATION CONCOURS EXTERNE

Section : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR

Option : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR
ET INGÉNIERIE MÉCANIQUE

MODÉLISATION D'UN SYSTÈME, D'UN PROCÉDÉ
OU D'UNE ORGANISATION

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : *La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1414A	102	2680

Amélioration des performances dynamiques des motos de course

Dans certaines situations, les motos de course peuvent présenter des vibrations latérales de grande amplitude. Ce phénomène complexe est difficile à maîtriser et peut conduire à des accidents graves, surtout à grande vitesse. Un constructeur doit absolument être en capacité de prévoir et de caractériser ces vibrations latérales potentielles dès la phase de conception du véhicule. Il doit concevoir, dimensionner et mettre en œuvre des dispositifs d'amortissement de ces vibrations.

Deux modes de vibrations latérales sont pris en compte lors de la phase d'étude du comportement dynamique d'une moto de course : le guidonnage et le louvoisement.

Le guidonnage est une oscillation soudaine et violente de droite à gauche, pouvant désarçonner le pilote. Ce mode de vibration est le plus dangereux car toute tentative du pilote pour annuler le guidonnage ne fait que l'aggraver. Le temps de réaction du pilote est tel qu'il agit pour contrer le mouvement du guidon au moment où celui-ci repart déjà dans l'autre sens.

Le louvoisement est un phénomène qui, contrairement au guidonnage, affecte l'intégralité de la moto sous la forme d'un mouvement ondulatoire se propageant de l'avant vers l'arrière de la moto. Cela se traduit par une ondulation générale de la moto, qui peine alors à suivre sa trajectoire.

L'objectif de cette étude est de mettre en place et en application les outils de modélisation permettant de caractériser ces modes de vibration et de choisir les solutions technologiques d'amortissement associées.

Dans la première partie, on s'attachera à modéliser le phénomène de guidonnage en introduisant la rigidité de la fourche ainsi que la dérive au niveau des pneumatiques afin de montrer que ce mode de vibration présente une stabilité conditionnelle. Dans la seconde partie, on s'intéressera à l'introduction d'un amortisseur de direction et on montrera qu'il permet d'amortir le mode de guidonnage mais au détriment du mode de louvoisement. Dans la troisième partie, après avoir introduit le concept d'inertier, un modèle de compensateur - amortisseur et inertier en série - sera mis en place. Ce modèle sera utilisé dans la dernière partie pour valider l'effet de cet élément sur les deux modes de vibrations qui nous intéressent.

Partie 1. Modélisation du guidonage

L'objectif de cette partie est de mettre en place un modèle de moto prenant en compte la rigidité de la fourche avant et la dérive des pneumatiques afin de caractériser les vibrations de guidonage et déterminer leur stabilité.

Le guidonage est un mode de vibration, instable sous certaines conditions, dans lequel la fourche de la moto se met à osciller de gauche à droite à des fréquences comprises entre 4 et 10 Hz. Compte tenu de la valeur de cette fréquence, le pilote ne fait généralement qu'accentuer le phénomène vibratoire en tentant de le corriger. La souplesse de la fourche de la moto étant un paramètre critique de ce phénomène, la première section a pour objectif de calculer cette souplesse pour ensuite l'introduire dans le modèle dynamique de moto utilisé pour étudier le guidonage dans la seconde section.

1.1 Souplesse de la fourche de moto

L'objectif de cette section est de déterminer la rigidité latérale d'une fourche de moto.

Compte tenu de leur mode de construction, les fourches de moto sont le siège d'importantes déformations sous l'effet des actions mécaniques sol-pneu. On définit la rigidité latérale comme le coefficient de proportionnalité entre le déplacement latéral de l'axe de roue et l'effort à l'origine de cette déformation.

Pour cette étude, on travaille sur le modèle de fourche présenté sur la **figure 1**.

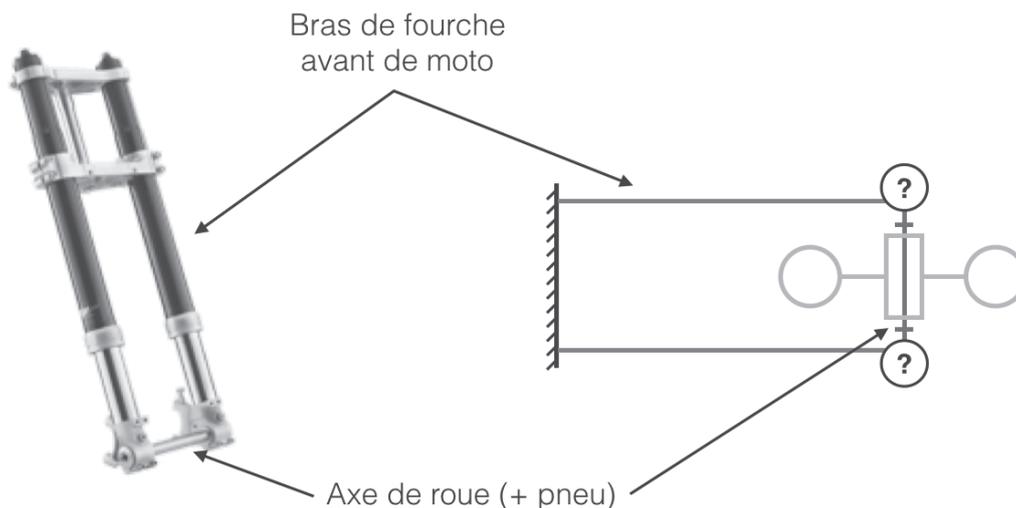


Figure 1 : fourche avant de moto et sa modélisation.

Question 1) Identifier les efforts à l'origine de la déformation latérale de la fourche en utilisation et indiquer les phases de fonctionnement où ces efforts sont susceptibles d'être les plus importants.

Question 2) Discuter du modèle d'encastrement utilisé pour représenter la liaison des bras de la fourche avec le reste de la moto.

Question 3) Discuter de la liaison entre l'axe de roue et le bras de fourche (**figure 1**)
On s'intéressera, en particulier, aux caractéristiques technologiques de la liaison permettant de faire le choix, en 2D, entre une modélisation par un encastrement ou par un pivot.

Question 4) Selon le choix retenu pour cette liaison, on obtient le système 1 ou 2 de la **figure 2** à résoudre. Discuter les différences que ces modélisations induisent en terme de chargement dans les différents éléments et préciser comment sera modifiée la raideur globale de la fourche.

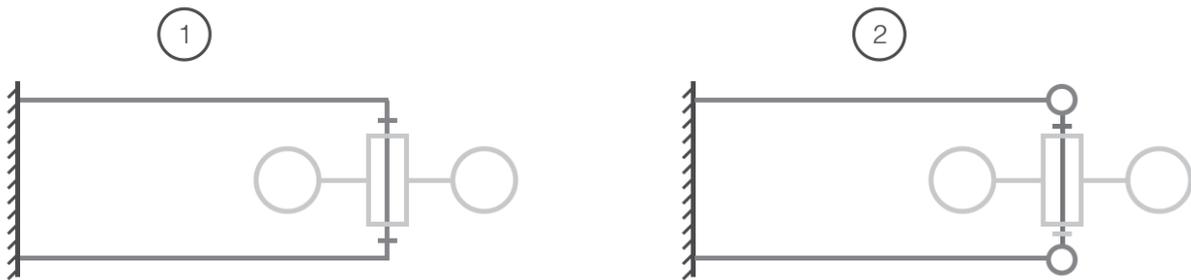


Figure 2 : deux modélisations possibles pour la fourche de moto.

Dans la suite, le modèle 2 sera utilisé pour calculer la raideur de la fourche.

La modélisation d'un bras de fourche est donnée **figure 3**.

Caractéristiques techniques :

- diamètre extérieur du fourreau : $D_1 = 55$ mm ;
- épaisseur du fourreau : $e_1 = 8$ mm ;
- longueur du fourreau à partir de la plaque inférieure : $L_1 = 300$ mm ;
- diamètre extérieur du tube: $d_2 = 39$ mm ;
- épaisseur du tube: $e_2 = 4$ mm ;
- longueur du tube: $L_2 = 400$ mm ;
- entraxe des tubes: $e = 190$ mm ;
- module de Young : $E = 210\,000$ MPa.

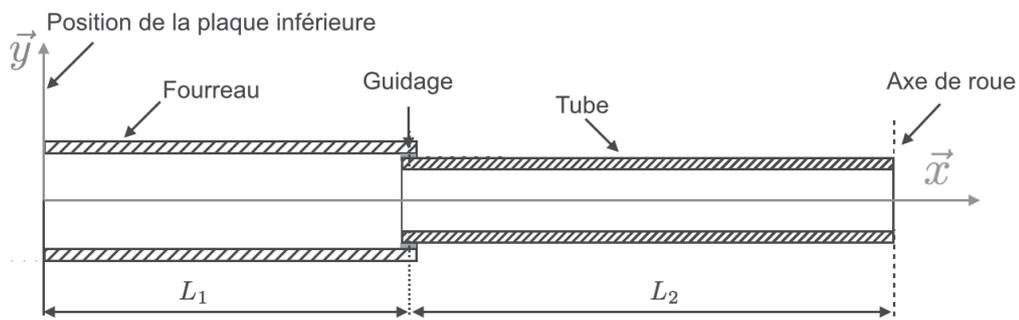


Figure 3 : modélisation d'un bras de fourche.

Question 5) Critiquer la modélisation du bras de fourche proposée.

Question 6) Calculer le moment quadratique de flexion en fonction de la position le long du bras, le guidage étant négligé dans la modélisation du bras. On utilisera les données techniques précédentes pour l'application numérique.

Question 7) En utilisant la symétrie de la fourche et en considérant l'axe de roue indéformable, montrer que le calcul de la rigidité latérale de la fourche peut se ramener à un problème de poutre encastree. Préciser la section de la poutre équivalente et les conditions aux limites. Rappeler les équations d'équilibre, les relations de comportement, les conditions aux limites et celles de raccordement permettant de résoudre un tel problème.

Question 8) Calculer la raideur latérale k de la fourche.

1.2 Modélisation du guidonage

L'objectif de cette section est de montrer le caractère conditionnel de la stabilité en mode guidonage.

Pour étudier le guidonage, on s'intéresse à un modèle de moto qui prend en compte la rigidité de la fourche et la dérive des pneumatiques (**figures 4 et 5**).

Le solide 0 – lié au sol – est le référentiel galiléen et le solide 1 représente le cadre de la moto. Le cadre est en translation rectiligne par rapport au sol, mouvement modélisé par la présence d'une liaison glissière entre les solides 0 et 1. Le solide 2 représente la fourche de la moto. Son élasticité est modélisée par le ressort de raideur latérale k calculée dans la partie précédente.

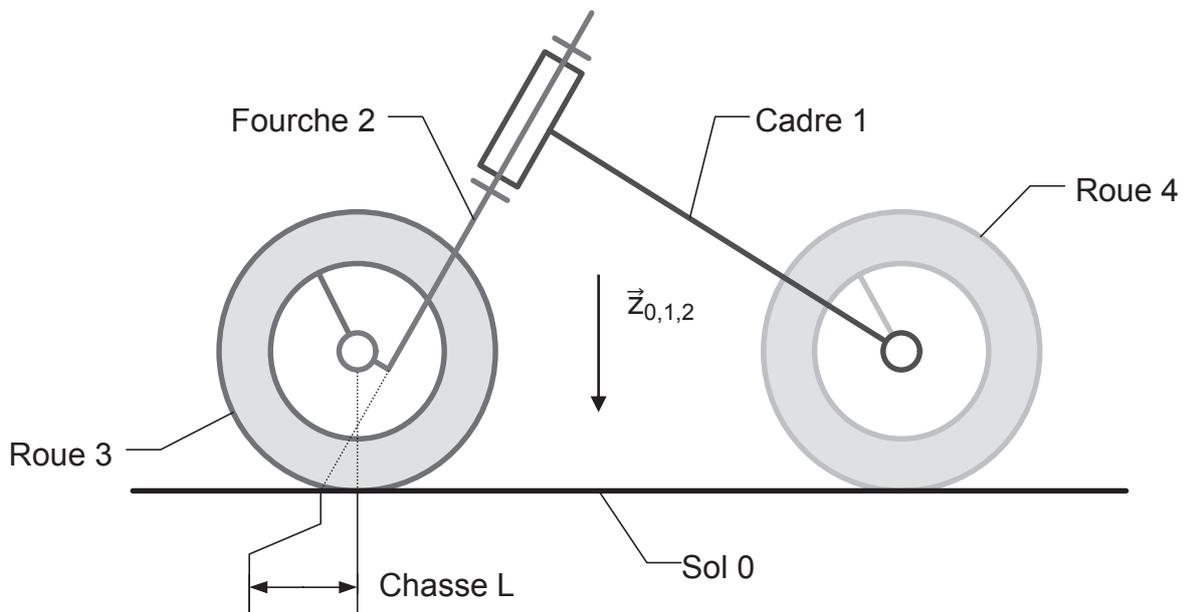


Figure 4 : modèle de moto.

Paramétrage géométrique

- $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \delta(t)$;
- $\vec{O}_2\vec{O}_3 = y(t)\vec{y}_2$;
- $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3) = \alpha(t)$;
- rayon de la roue : R ;
- chasse géométrique $L = \|\vec{O}_1\vec{O}_2\|$.

Paramétrage cinématique

- $\vec{V}(O_1 \in 1/0) = V\vec{x}_{0,1}$ où V est la vitesse connue, supposée constante, de la moto ;
- $\vec{\Omega}_{3/2} = \dot{\alpha}\vec{y}_{2,3} = \omega\vec{y}_{2,3}$, avec $\omega < 0$ dans le sens de la marche avant.

Paramétrage des efforts

- torseur des actions mécaniques de contact sol-pneu :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{0 \rightarrow 3} = X_{0 \rightarrow 3}\vec{x}_2 + Y_{0 \rightarrow 3}\vec{y}_2 + Z_{0 \rightarrow 3}\vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I ;$$

- dérive pneumatique : $\vec{R}_{0 \rightarrow 3} \cdot \vec{y}_2 = -D \frac{\vec{V}(I \in 3/0) \cdot \vec{y}_2}{V}$ où D est le coefficient de rigidité à la dérive, supposé constant dans ce modèle ;
- accélération de la pesanteur : $\vec{g} = g \cdot \vec{z}_{0,1,2}$.

Paramétrage inertiel

- Solide 2 : masse et inertie négligeables ;
- Solide 3 : masse m , centre d'inertie O_3 , matrice d'inertie au point O_3 :

$$[I_{O_3}(3)] = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}_{(\cdot, \vec{y}_{2,3}, \cdot)}$$

Hypothèse supplémentaire

- Pas de glissement longitudinal au point de contact I : $\vec{V}(I \in 3/0) \cdot \vec{x}_2 = 0$.

Question 9) Quel est le paramètre géométrique lié au phénomène de guidonnage ?

Les questions suivantes ont pour objectif d'écrire les équations de la dynamique de la moto ainsi modélisée afin d'étudier ce phénomène.

Question 10) Exprimer la vitesse de glissement entre la roue et le sol au point de contact I et donner ses composantes dans la base 2 en fonction des données géométriques.

Question 11) En s'appuyant sur un graphe des liaisons, expliciter la démarche à entreprendre afin de déterminer les équations dynamiques de la moto ainsi modélisée (équations relatives aux paramètres α , δ et y).

Question 12) Mettre en œuvre cette démarche.

Question 13) Vérifier qu'il existe un état stationnaire en $\begin{cases} y = 0 \\ \delta = 0 \\ \dot{\alpha} = \omega = \text{cste} \end{cases}$ où ω est une constante à préciser.

Question 14) Linéariser les équations de mouvement autour de l'état stationnaire et poser le système d'équations dynamiques sous la forme :

$$[M] \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\delta} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + [C] \cdot \begin{pmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + [K] \cdot \begin{pmatrix} \delta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec : $[M] = \begin{bmatrix} A_3 + mL^2 & -mL \\ -mL & m \end{bmatrix}$, $[C] = \begin{bmatrix} \frac{L^2 D}{V} & \frac{-LD}{V} \\ \frac{-LD}{V} & \frac{D}{V} \end{bmatrix}$ et $[K] = \begin{bmatrix} LD & 0 \\ -D & k \end{bmatrix}$.

Question 15) Préciser le sens physique des différents termes intervenant dans les deux équations de mouvement linéarisées ainsi obtenues.

La résolution du modèle, ou l'utilisation du critère de Routh, permet d'écrire la condition de stabilité du modèle sous la forme :

$$\begin{cases} V > 0 \\ kL - D > 0 \end{cases}$$

Question 16) Discuter cette condition de stabilité pour le mode de guidonage, et en particulier l'influence de la rigidité de la fourche et celle de la dérive des pneumatiques.

Partie 2. Introduction d'un amortisseur

L'**objectif** de cette partie est de valider le rôle bénéfique joué par un amortisseur de direction sur le mode vibratoire de guidonage et de mettre en évidence son rôle négatif sur celui du louvoiement.

Dans la partie précédente, il a été montré à partir d'un modèle simple que la stabilité de la moto en matière de guidonage est une stabilité conditionnelle. Pour améliorer le comportement dynamique, on souhaite donc amortir le mouvement de rotation dans le pivot de direction.

L'amortisseur généralement utilisé est un amortisseur de type rectiligne supposé caractérisé par une loi de comportement du type « force proportionnelle à la vitesse d'enfoncement » de coefficient d'amortissement f_v (**figure 6**).



Figure 6 : amortisseur rectiligne de direction.

Question 17) Proposer, sous forme de schéma cinématique, une implantation d'un ou plusieurs amortisseurs linéaires entre la fourche 2 et le cadre 1 de la moto afin qu'ils travaillent comme un amortisseur rotatif placé dans le pivot de direction modélisé par la relation $\vec{C}_{1 \rightarrow 2} = -c\dot{\delta} \cdot \vec{z}_{0,1,2}$ (où le coefficient c s'exprime en N.m/(rad/s)).

Le problème dynamique se résumait dans la partie précédente à l'équation linéarisée :

$$[M] \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\delta} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + [C] \cdot \begin{pmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + [K] \cdot \begin{pmatrix} \delta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Question 18) Préciser comment les matrices $[M]$, $[C]$ et $[K]$ sont modifiées par l'adjonction de l'amortisseur de direction de coefficient c . On ne demande pas l'expression complète des 3 matrices mais simplement la modification apportée par la mise en place de l'amortisseur de direction.

La résolution du système ainsi modifié permettrait de valider l'effet positif de l'amortisseur sur le mode de guidonage (non traité ici). Afin de quantifier l'impact de l'introduction de l'amortisseur sur le mode de guidonage et sur le mode de louvoiement, un modèle de moto plus complexe faisant intervenir 4 degrés de liberté – le modèle de R. Sharp – est utilisé. Il permet de prendre en compte et de modéliser simultanément les deux modes de vibrations. Ce modèle ne sera pas présenté et étudié dans ce sujet. Il sera utilisé pour vérifier les effets des éléments amortissants sur le comportement global de la moto.

Le **tableau 1** indique les résultats obtenus dans le cadre de l'introduction ou non de l'amortisseur de direction dans ce modèle. Les coefficients d'amortissement donnés correspondent aux coefficients d'amortissement du système du second ordre équivalent pour chacun des modes de vibration d'intérêt.

	Mode guidonage $V = 20$ m/s	Mode louvoiement $V = 20$ m/s
Sans amortisseur	0,27	0,34
Avec amortisseur	0,44	0,29

Tableau 1 : coefficient d'amortissement des modes de vibrations de guidonage et de louvoiement avec et sans amortisseur.

Question 19) Commenter l'effet de l'amortisseur de direction sur chacun des deux modes étudiés.

Afin de parer à cet effet de l'amortisseur, il est d'usage d'introduire un inerter en série avec celui-ci, formant ainsi un compensateur de direction qui est modélisé dans la suite de l'étude.

Partie 3. Modélisation d'un compensateur

L'objectif de cette partie est de mettre en place un modèle mécanique de compensateur – amortisseur en série avec un inerter – afin de l'introduire dans le modèle de moto.

L'amortisseur de direction, s'il a un effet favorable sur le mode de guidonage, impacte de manière néfaste le louvoisement. Afin de corriger cet effet néfaste, les ingénieurs se sont inspirés des solutions technologiques utilisées dans d'autres sports mécaniques comme la Formule 1, et en particulier les solutions de type « inerter ».

Dans un premier temps, le concept d'inerter est exploré au travers de l'étude d'un inerter linéaire. Puis son adaptation au cas du compensateur de direction pour moto est modélisée.

3.1 Modélisation d'un inerter linéaire

L'objectif de cette section est de valider les performances dynamiques du composant inerter.

Un inerter est un composant mécanique qui peut être représenté par le schéma sur la **figure 7**. Sa relation de comportement s'écrit : $f = b(\dot{v}_A - \dot{v}_B)$, où f est la force appliquée aux points A et B, v_i la vitesse galiléenne du point i et b est appelé l'inertance.

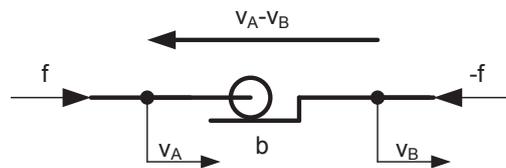


Figure 7 : représentation de l'inerter.

On souhaite valider que sous certaines conditions, le composant mécanique dont le schéma cinématique est donné sur la **figure 8** se comporte comme un inerter.

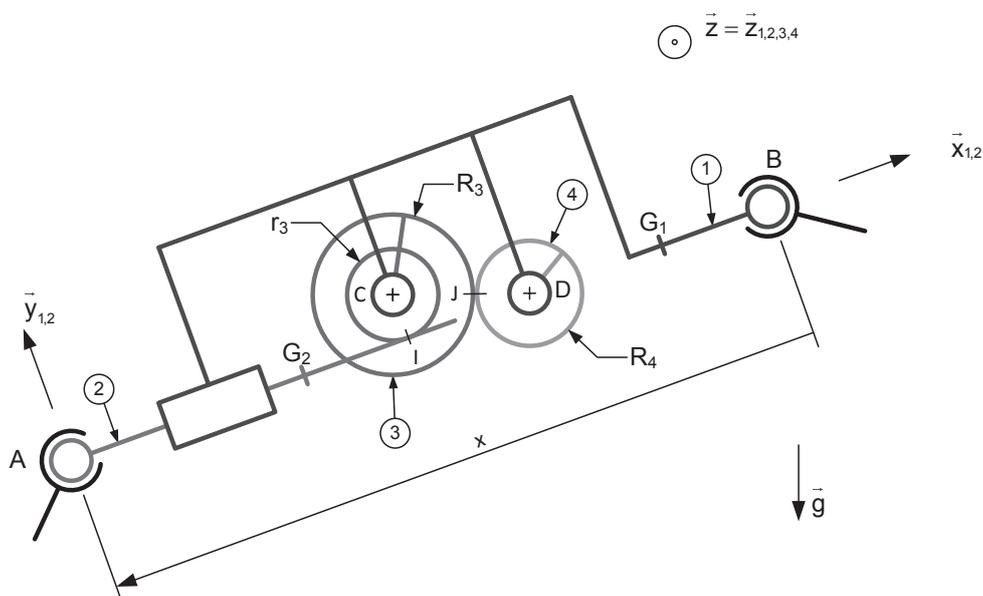


Figure 8 : schéma cinématique d'un inerter.

Paramétrage des pièces

0 : référentiel galiléen (non représenté)	3 : pignon
1 : corps	4 : volant d'inertie
2 : tige - crémaillère	

Paramétrage géométrique

- $\|\vec{CI}\| = r_3$;
- $\|\vec{CJ}\| = R_3$;
- $\|\vec{DJ}\| = R_4$;
- on définit x tel que $\vec{BA} = x \vec{x}_{1,2}$, avec $x < 0$.

Paramétrage cinématique

- $\vec{\Omega}_{3/1} = \omega_{3/1} \vec{z}$;
- $\vec{\Omega}_{4/1} = \omega_{4/1} \vec{z}$;
- $\vec{V}(A \in 2/0) = v_A \vec{x}_{1,2}$;
- $\vec{V}(B \in 1/0) = v_B \vec{x}_{1,2}$.

Nota : on pourra remarquer que $\dot{x} = v_A - v_B$.

Paramétrage des efforts

- $\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow 1}$: effort de l'extérieur de l'inertier sur 1 transmis par la rotule de centre B ;
- $\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow 2}$: effort de l'extérieur de l'inertier sur 2 transmis par la rotule de centre A ;
- \vec{g} : accélération de la pesanteur.

Paramétrage inertie

- Solide 1 : masse m_1 , centre d'inertie G_1 , matrice d'inertie au point G_1 :

$$[I_{G_1}(1)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_{1,2}, \vec{z})}$$

- Solide 2 : masse m_2 , centre d'inertie G_2 , matrice d'inertie au point G_2 :

$$[I_{G_2}(2)] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_{1,2}, \vec{z})}$$

- Solide 3 : masse et inertie négligées ;
- Solide 4 : masse m_4 , centre d'inertie D, matrice d'inertie au point D :

$$[I_D(4)] = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{(\vec{z}, \vec{z}_{1,2,3,4})}$$

Hypothèses complémentaires

- roulement sans glissement aux points de contact I et J ;
- liaisons parfaites.

On suppose dans un premier temps que le solide 1 est immobile par rapport au repère galiléen 0 : $\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{1/0} = \vec{0} \\ \vec{V}(B \in 1/0) = \vec{0} \end{Bmatrix}$, et $v_A = \vec{V}(A \in 2/0) \cdot \vec{x}_{1,2}$ et $v_B = \vec{V}(B \in 1/0) \cdot \vec{x}_{1,2}$.

Question 20) Déterminer la relation dynamique caractérisant ce mécanisme, en particulier la relation liant $\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow 1}$, $\vec{x}_{1,2}$ et \dot{v}_A et les données géométriques.

Question 21) Dire sous quelles conditions ce mécanisme se comporte comme un inerte et donner alors son inertance.

Le mouvement de la pièce 1 est maintenant a priori quelconque. On introduit les paramètres (non indépendants) suivants :

- $\vec{F}(G_1 \in 1/0) \cdot \vec{x}_{1,2} = Y_1$;
- $\vec{F}(G_2 \in 2/0) \cdot \vec{x}_{1,2} = Y_2$;
- $\vec{F}(D \in 4/0) \cdot \vec{x}_{1,2} = Y_4$;
- $\vec{\Omega}_{1/0} \cdot \vec{z}_{1,2,3,4} = \omega_z$.

Les autres éléments de paramétrage restent inchangés.

Question 22) Démontrer que l'on a toujours $\dot{x} = v_A - v_B$. Donner la relation entre $\omega_{4/1}$ et \dot{x} .

On donne les deux équations dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow 2} \cdot \vec{x}_{1,2} + m_2 \vec{g} \cdot \vec{x}_{1,2} + \frac{R_3}{R_4 r_3} C_4 (\dot{\omega}_z + \dot{\omega}_{4/1}) = m_2 Y_2 \\ \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow 1} \cdot \vec{x}_{1,2} + (m_1 + m_4) \vec{g} \cdot \vec{x}_{1,2} - \frac{R_3}{R_4 r_3} C_4 (\dot{\omega}_z + \dot{\omega}_{4/1}) = m_1 Y_1 + m_4 Y_4 \end{cases}$$

Question 23) Expliquer très précisément quelle a été la démarche d'isolement permettant d'écrire ces deux équations.

Question 24) Définir les conditions nécessaires pour que ce mécanisme se comporte comme un inerte. Déterminer alors la relation entre f et \dot{x} et en déduire l'inertance.

3.2 Effet de l'association d'un amortisseur et d'un inerte sur un système dynamique simple

L'objectif de cette section est de valider les performances dynamiques du composant inerte lorsqu'il est intégré dans un système dynamique.

Afin d'étudier les performances dynamiques de ce composant inerte associé à un amortisseur, on considère les modèles représentés sur la **figure 9**.

Une pièce 1, contrainte de se déplacer en translation rectiligne, est reliée au bâti galiléen par un combiné « ressort / amortisseur » ou « ressort / amortisseur / inerte » étudié précédemment. Le paramètre $z(t)$ caractérise le déplacement de la

pièce 1 par rapport à sa position d'équilibre statique. Cette pièce 1 est d'autre part soumise à un effort extérieur $\vec{F}(t) = f(t)\vec{z}$.

Le système étudié est vu comme un système dynamique dont l'entrée est la force appliquée $f(t)$ et la sortie le déplacement résultant $z(t)$.

Données

- pièce mobile : masse m ;
- ressort : raideur k ;
- amortisseur : coefficient d'amortissement c ;
- inerteur : inertance b .

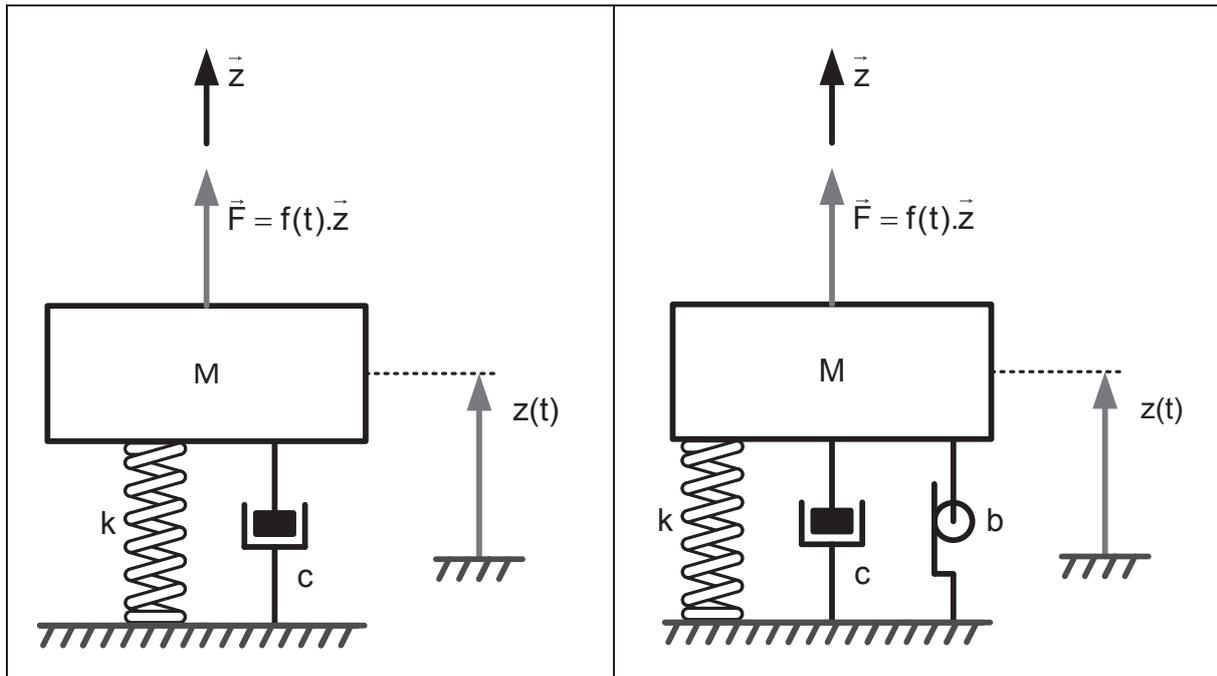


Figure 9 : systèmes dynamiques A (gauche) et B (droite).

Question 25) Pour chacun des deux cas A et B :

- écrire l'équation dynamique régissant l'évolution de $z(t)$ en fonction de $f(t)$;
- dans le formalisme de Laplace, donner sous forme canonique la fonction de transfert $\frac{Z(p)}{F(p)}$. On se placera sous les conditions de Heaviside ;
- déterminer les paramètres caractéristiques : gain statique K , coefficient d'amortissement ξ et pulsation propre du système non amorti ω_n .

Question 26) Discuter du rôle joué par l'inerteur et dire en quoi ce système, associé à l'amortisseur, peut apporter une réponse au problème d'instabilité dynamique des motos de course.

3.3 Modélisation d'un compensateur rotatif de moto

L'objectif de cette section est de mettre en place le modèle mécanique du compensateur de direction utilisé dans les motos de course.

Dans les faits, l'intégration d'un amortisseur et d'un inerteur linéaire sur la moto est technologiquement complexe. Des composants « tout en un » ont donc été

développés comme celui présenté dans la **figure 11** et utilisés à titre expérimental dans le pivot de direction de certaines motos de course. L'objectif de cette partie est de montrer que ce compensateur de direction est équivalent à la mise en série d'un amortisseur et d'un inerter comme représenté **figure 10**.

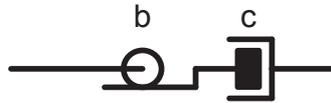


Figure 10 : compensateur constitué d'un inerter et d'un amortisseur en série.

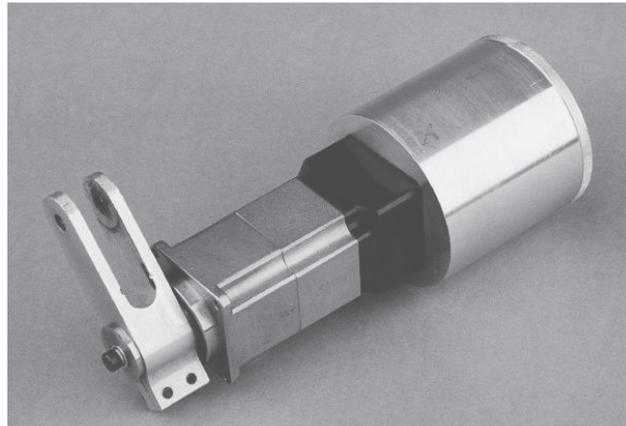


Figure 11 : compensateur de direction.

Un modèle cinématique du compensateur est proposé **figure 12**. Il est constitué d'un multiplicateur à double train épicycloïdal dont la sortie est un tube cylindrique 5, d'inertie relativement faible, immergé dans un bain d'huile. Ce tube 5 entraîne par viscosité un second tube 6 qui joue le rôle de volant d'inertie.

Éléments de paramétrage

- $\vec{\Omega}_{i/j} = \omega_{i/j} \cdot \vec{Z}$;
- J_6 : moment d'inertie du volant d'inertie 6 par rapport à son axe de rotation ;
- $n = \frac{\omega_{5/0}}{\omega_{1/0}}$ (> 1) : rapport de multiplication à calculer en fonction des nombres de dents Z_0 , Z_2 et Z_3 ;
- $\vec{C}_1 = C_1 \cdot \vec{Z}$: couple extérieur exercé sur l'inerter ;
- $\vec{C}_5 = C_5 \cdot \vec{Z}$: couple C_1 ramené sur la pièce 5.

Hypothèses

- liaisons parfaites et poids négligés ;
- inertie des pièces 1, 2, 3, 4 et 5 négligée.

Dans un premier temps, l'objectif est de déterminer le couple transmis entre les pièces 5 et 6 via l'étude du domaine fluide compris entre les deux tubes. Dans la suite, \vec{v} désignera la vitesse du fluide, et $\underline{\underline{\sigma}}$ la contrainte.

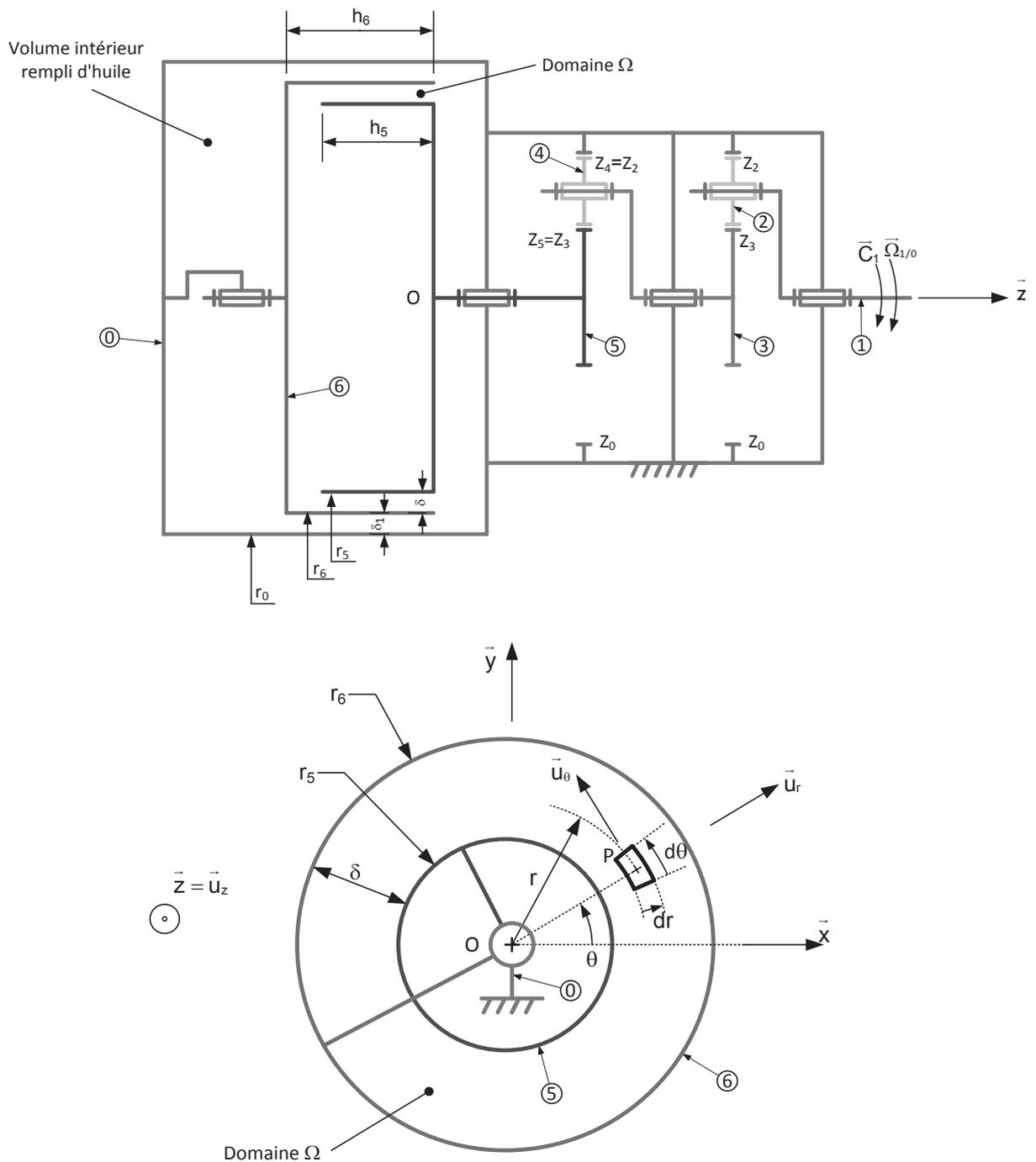


Figure 12 : schémas cinématiques du compensateur de direction.

Question 27) Proposer un modèle d'écoulement pour le fluide compris entre les deux surfaces cylindriques 5 et 6 (domaine Ω sur la **figure 12**) permettant d'obtenir le problème suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{v}) &= 0, \forall M \in \Omega; \\ \overline{\operatorname{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) &= \vec{0}, \forall M \in \Omega; \\ \underline{\underline{\sigma}} &= -p\underline{\underline{1}} + 2\eta\underline{\underline{D}}, \forall M \in \Omega; \\ \text{avec } \underline{\underline{D}} &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\vec{v} + \underline{\underline{\nabla}}\vec{v}^T). \end{aligned}$$

En particulier, donner les hypothèses retenues pour le fluide et préciser les conditions aux limites.

Question 28) Proposer, en la justifiant, une forme pour le champ de vitesse. Montrer que dans un système d'axe cylindrique adéquat $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, ce champ de vitesse vérifie l'équation :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dr} \right) = 0.$$

Calculer la vitesse du fluide.

Question 29) Montrer que le couple $\vec{C}_{\text{fluide} \rightarrow 6} = C_{\text{fluide} \rightarrow 6} \cdot \vec{z}$ exercé par le fluide sur le volant d'inertie (pièce 6) s'écrit $C_{\text{fluide} \rightarrow 6} = -\gamma \omega_{6/5}$ avec $\gamma = 4\pi h_5 \eta \frac{r_5^2 (r_5 + \delta)^2}{\delta (2r_5 + \delta)}$.

On donne les relations du divergent et du gradient en coordonnées cylindriques dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

$$\vec{\text{div}} \vec{A} = \begin{cases} \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (A_{rr} - A_{\theta\theta}) + \frac{\partial A_{rz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} A_{\theta r} + \frac{\partial A_{\theta z}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} A_{zr} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \end{cases} ; \quad \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{a_\theta}{r} & \frac{\partial a_r}{\partial z} \\ \frac{\partial a_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_r}{r} & \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Question 30) En isolant la pièce 6, déterminer l'équation reliant $\omega_{6/0}$, $\omega_{6/5}$, γ , J_6 et leurs éventuelles dérivées. En notant $\Omega_{i/j}(p)$ la transformée de Laplace de la fonction temporelle $\omega_{i/j}(t)$, en déduire la relation entre $\Omega_{6/0}(p)$ et $\Omega_{1/0}(p)$. On se placera sous les conditions de Heaviside.

Question 31) Déterminer l'équation reliant C_1 , $\omega_{6/0}$, $\omega_{1/0}$, γ , n et leurs éventuelles dérivées. Transformer cette relation dans le domaine de Laplace. On se placera encore sous les conditions de Heaviside.

Nota : on prolongera le résultat donnant la valeur du coefficient γ en phase dynamique alors que l'écoulement du fluide n'est a priori plus stationnaire.

Question 32) Déduire des deux questions précédentes l'admittance $Y(p) = \frac{C_1(p)}{\Omega_{1/0}(p)}$. Par décomposition de l'admittance, montrer que le compensateur peut donc être modélisé par un inerte rotatif en série avec un amortisseur rotatif. On notera b l'inertance (en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$) et c la raideur de l'amortisseur (en $\text{N.m}/(\text{rad/s})$).

Sur la **figure 13** sont représentés les résultats expérimentaux issus d'une campagne d'essais réalisée sur le compensateur de direction photographié sur la **figure 11** ainsi que les résultats issus de différents modèles de compensateur définis sur la **figure 14**, pour des fréquences comprises entre 0,1 et 40 Hz.

Question 33) Expliquer quelles hypothèses sont relâchées afin de passer du modèle 1, qui a été mis en place précédemment, aux modèles 2 et 3.

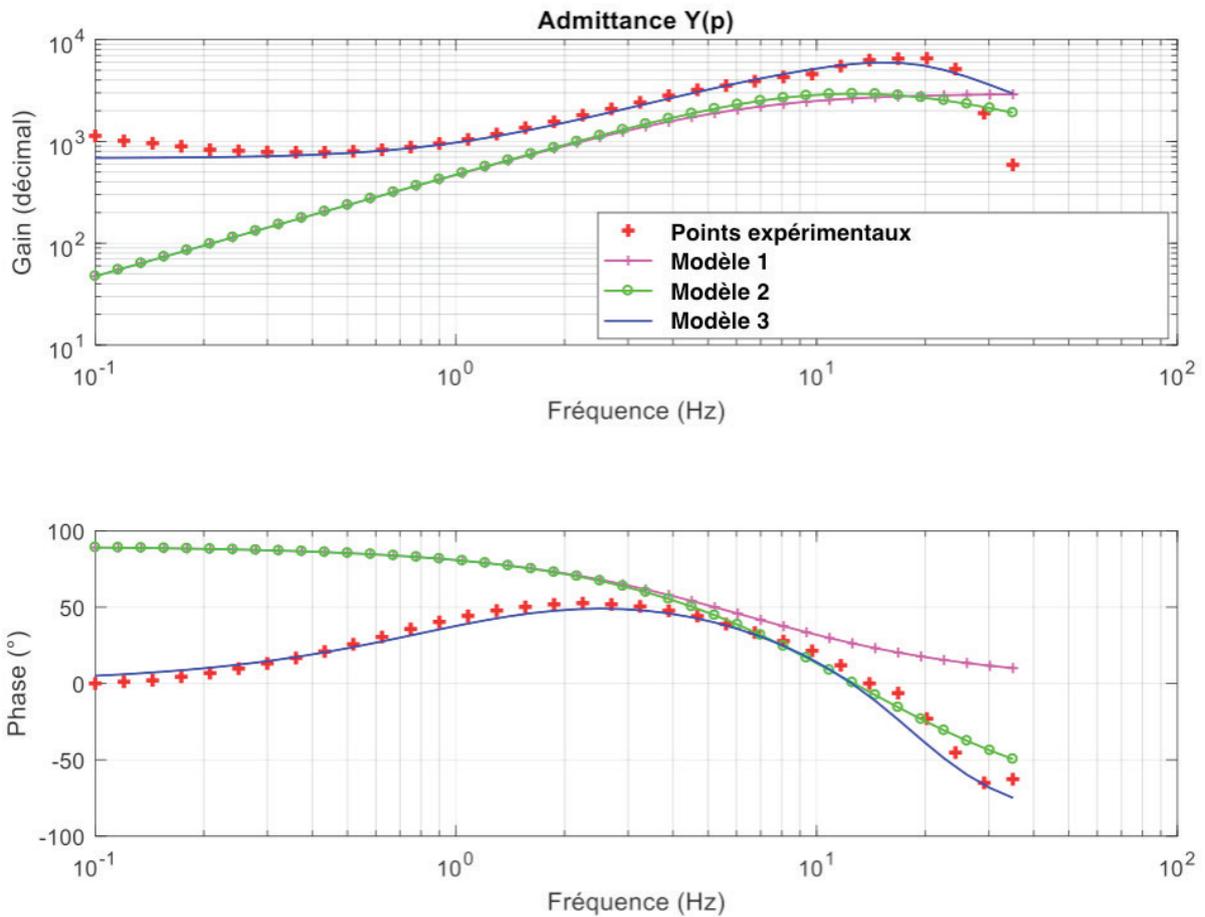


Figure 13 : comparaison entre comportement expérimental et comportement des trois modèles définis *figure 14*.

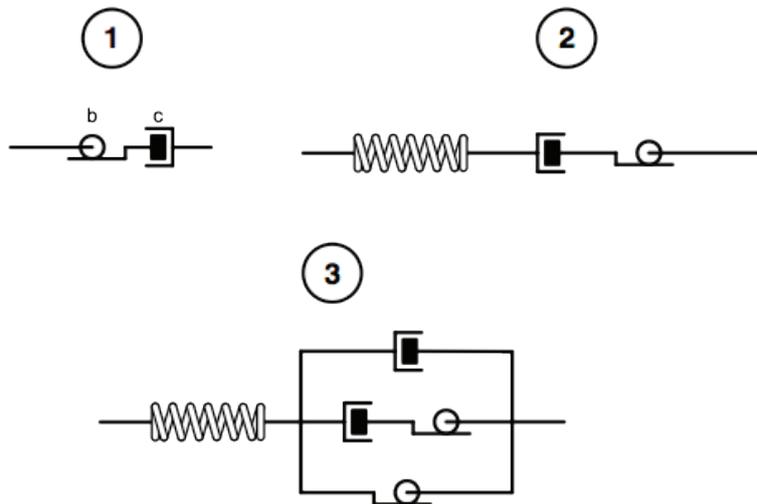


Figure 14 : modèles de compensateur : (1) issu de l'étude précédente, (2) et (3) incluant en plus du précédent une certaine élasticité et relâchant certaines hypothèses.

Question 34) Justifier le choix du modèle 3 pour représenter le compensateur de direction dans le modèle complet de moto.

Partie 4. Validation des performances de la moto avec le compensateur

L'**objectif** de cette partie est de valider le rôle bénéfique joué par le compensateur sur les modes vibratoires de guidonage et de louvoisement.

Dans la partie 2, il a été mis évidence qu'un amortisseur de direction seul, s'il avait un effet favorable sur le mode de guidonage, avait une tendance à diminuer l'amortissement du mode de louvoisement. La partie 3 a permis de confirmer les performances d'amortisseur dynamique de l'inerteur et de valider son extension sous forme de compensateur rotatif pour les motos.

Dans cette dernière partie, l'objectif est de valider l'utilisation de ce compensateur de direction formé d'un amortisseur et d'un inerteur en série dans le but d'améliorer les performances dynamiques globales de la moto.

Pour cela, le modèle de Sharp est de nouveau utilisé pour des motos comprenant :

- un pivot de direction sans compensateur de direction ;
- un amortisseur seul ;
- un compensateur de direction composé d'un amortisseur en série avec un inerteur.

Le **tableau 2** présente les coefficients d'amortissement ainsi calculés et correspondant aux coefficients d'amortissement du système du second ordre équivalent pour chacun des modes de vibration d'intérêt.

	Mode guidonage $V = 20 \text{ m/s}$	Mode louvoisement $V = 20 \text{ m/s}$
Sans amortisseur ni compensateur	0,27	0,34
Avec amortisseur	0,44	0,29
Avec compensateur	0,38	0,42

Tableau 2 : coefficient d'amortissement des modes de vibrations de guidonage et de louvoisement avec et sans amortisseur.

Question 35) Valider l'utilisation du compensateur de direction pour améliorer les performances dynamiques de la moto.