**Correction sujet Automatique**

## 1ère Partie

Q.1 1 $V_S = V_E$

Q.1 2 $V_S = 0$

Q.1 3 $V_S = V_E - V_{C2} + V_{C1}$

Q.1 4 $V_S = u_3 V_E - (u_3 - u_2)V_{C2} - (u_2 - u_1)V_{C1}$

Q.1.5 $\frac{dV_{c1}}{dt} = \frac{1}{C_1} i_s (u_2 - u_1)$ et $\frac{dV_{c2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_s (u_3 - u_2)$

Q.1.6 $L\frac{di_s}{dt} + R_{ch} i_s = V_s$

Q.1.7 Il faut que les temps de charge et décharge des condensateurs soient égaux donc d'après Q.1.5, il faut que le temps durant lequel $u_3 < u_2$ corresponde au temps durant le quel $u_3 > u_2$, idem pour $u_1 < u_2$ et $u_1 > u_2$.

Q.1.8 par symétrie, on s'aperçoit que ceci est toujours vérifié

| Condensateur C1 | Condensateur C2 | Durée | $U^T$ |
|---|---|---|---|
| 0 | décharge | t2-t1 | 1,1,0 |
| charge | décharge | t3-t2 | 0,1,0 |
| charge | 0 | t4-t3 | 0,1,1 |
| 0 | charge | t5-t4 | 0,0,1 |
| décharge | charge | t6-t5 | 1,0,1 |
| décharge | 0 | T+t1 – t6 | 1,0,0 |

Q.1.9 $V_{smoy} = \alpha V_E = 200V$

Q.1.10 $i_{smoy} = \frac{\alpha V_E}{R_{ch}} = 6.67A$

Q.1.11 On a $V_{fond} = \frac{2V_E}{3\pi} = 84.88$ V. Ainsi, l'amplitude du fondamental des oscillations en courant est égale à $i_{fond} = \frac{2V_E}{3\pi} \frac{1}{(R_{Ch}^2 + (L_{ch}\omega_{Ch})^2)^{0.5}}$ avec $\omega_C = 3\omega$ d'où $i_{fond} = 0.135mA$ donc très inférieure à 1% du courant moyen.

Q1.12 on a :

$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{C_1} x_3 (u_2 - u_1)$

$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{C_2} x_3 (u_3 - u_2)$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{L_{Ch}}(-R_{ch}x_3 + u_3 V_E - x_2(u_3 - u_2) - x_1(u_2 - u_1))$$

Avec $y = x_3$.

Q1.13 Cette représentation d'état n'est pas linéaire, il y a des produits commandes variables d'état.

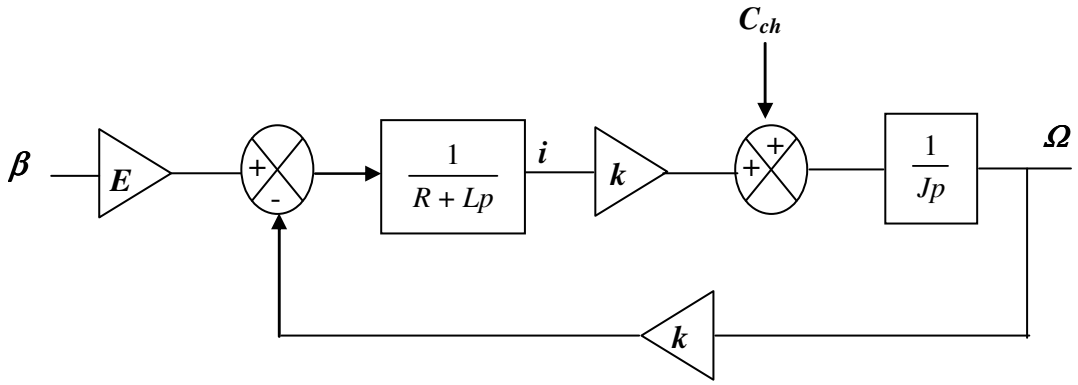
Q.1.14 Le système n'est pas observable. L'information, sur la tension aux bornes du condensateur, $C_1$ n'est pas accessible par la simple dérivation du courant dans la charge.

Q.1.15 Le système n'est pas observable. L'information, sur la tension aux bornes du condensateur, $C_2$ n'est pas accessible par la simple dérivation du courant dans la charge.

Q.1.16 Oui, il est alors observable, car $U_a$ nous permet d'observer la tension aux bornes de $C_1$ et $U_b$ nous permet d'observer la tension aux bornes de $C_2$. Le critère du rang, de la matrice d'observabilité, est un critère pour les systèmes linéaires, donc inadapté ici.

**2ème Partie**

Q.2.1




Q.2.2 nous trouvons

$$H(p) = \frac{kE}{Jp(R+Lp)+k^2}$$

Q2.3

$H(p) = \frac{kE}{Jp(R+Lp)+k^2} = \frac{508}{10^{-3}p^2 + 0.1p + 1.612}$ on trouve des pôles égaux à -79.7993 et à -20.2007.

Q.2.4

$$G(p) = \frac{(R + Lp)}{Jp(R + Lp) + k^2}$$

Q.2.5

$G(p) = \frac{(R + Lp)E}{Jp(R + Lp) + k^2} = \frac{+400 + 4p}{10^{-3} p^2 + 0.1p + 1.612}$ on trouve des pôles égaux à -79.7993 et à -20.2007 cf. dénominateur inchangé.

Q.2.6 Les pôles étant stables, on a le droit d'utiliser le théorème de la valeur finale

$$Lim_{t\to\infty}\Omega(t) = Lim_{P\to 0^+} p\frac{kE}{Jp(R + Lp) + k^2}\frac{0.5}{p} = \frac{508 * 0.5}{1.612}.$$

Q.2.7 On obtient $\Omega(\infty) = 157.5682$rad/s=1504,73tr/min.

Q.2.8 On utilise le théorème de la valeur finale, aussi dans le cas 2, les pôles sont stables. On a

$$\Omega(p) = \frac{(R + Lp)C_{ch}(p)}{Jp(R + Lp) + k^2} + \frac{Ek\beta(p)}{Jp(R + Lp) + k^2}$$

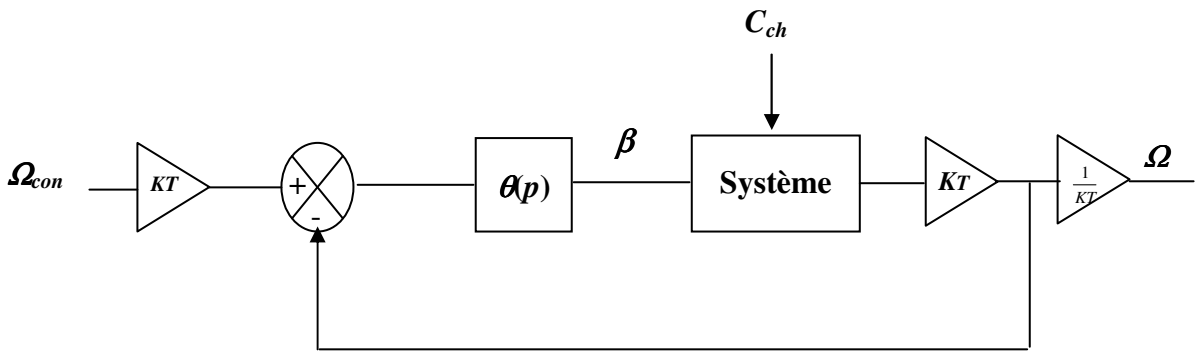
D'où

$$Lim_{p\to 0^+} p\Omega(p) = \lim_{p\to 0^+} \frac{(R + Lp)C_{ch0}}{Jp(R + Lp) + k^2} + \frac{Ek\beta_0}{Jp(R + Lp) + k^2} = \frac{20 + 508 * 0.5}{1.612}.$$

Q.2.9 On obtient $\Omega(\infty) = 169.97$rad/s= 1623tr/min.

Q.2.10 Oui, il suffit de comparer les réponses aux questions Q.2.7 et Q.2.9.

Q.2.11



Q.2.12

La fonction de transfert en boucle ouverte est

$$H_\gamma(p) = \frac{EkK_T\gamma}{Jp(R+Lp)+k^2}.$$

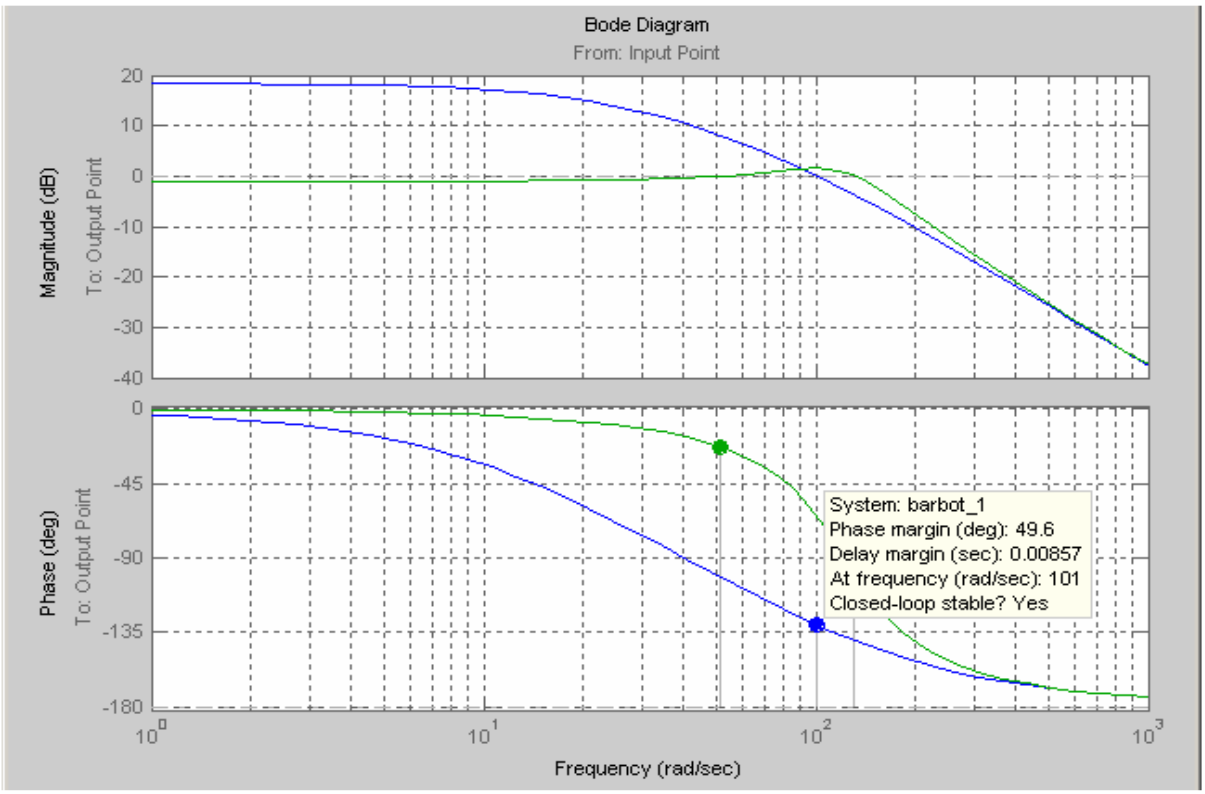
Et pour $\omega = 100 rad/s$ on veut

$1 = \frac{EkK_T\gamma}{\sqrt{(JR\omega)^2 + (k^2 - JL\omega^2)^2}}$ On trouve $\gamma = 0.4097 \approx \frac{1}{2.5}$.

Q.2.13 la marge de phase est égale à $\arcsin(\frac{JR\omega}{\sqrt{(JR\omega)^2 + (k^2 - JL\omega^2)^2}}) = 48.88° \approx 49°$.

Q.2.14

La fonction de transfert en boucle fermée est $H_{BF}(p) = \frac{EkK_T\gamma}{Jp(R+Lp)+k^2+EkK_T\gamma}$




Q.2.15 La marge de phase étant de +48%, donc stable, on peut utiliser le théorème de la valeur finale.

$$Lim_{t\to\infty}\Omega(t) = Lim_{P\to 0^+} p \quad \frac{80.89}{0.001p^2 + 0.1p + 82.51} \quad \frac{78.5}{p} = 76.965 \text{rad/s}$$

Q.2.16 Pour les mêmes raisons qu'en Q.2.15, on peut utiliser le théorème de la valeur finale.

$$Lim_{t\to\infty}\Omega(t) = Lim_{P\to 0^+} p \quad (\frac{80.89}{0.001p^2 + 0.1p + 82.51} \quad \frac{78.5}{p} + \frac{0.0637(1+0.01p)}{0.001p^2 + 0.1p + 82.51} \frac{20}{p}) = 76.98 \text{rad/s}$$

Q.2.17 Oui il est très légèrement sensible.

Q.2.18 Nous obtenons $\gamma \approx 0.4097$

Q.2.19 La marge de phase est de 48.88- 1.3982=47.4818° ≈ 47.50°

Q.2.20 Le système n'est plus sensible aux perturbations de couple, car il y a un intégrateur pur en aval de la perturbation.

**3ème Partie**

Q.3.1

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{J} \\ \frac{-k}{L} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} \frac{1}{J} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \quad C=(1,0)$$

Q.3.2.

Rang C(AB)=Rang(B,AB)= $Rang\begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{JL} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R}{L^2} \end{pmatrix}$ est égal à 2, donc commandable.

Q.3.3

Rang O(AC)=Rang$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}$ = $Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-R}{L} \end{pmatrix}$ est égale à 2, donc observable.

Q.3.4

$$\xi(t)=e^{-t/\tau}\xi(0)$$

Q.3.5

Pour que l'évolution sur la surface soit stable, il faut que $\tau < 0$.

Q.3.6

$$\frac{ds(.)}{dt} = \frac{k}{J} z_2 + \frac{C_{Ch}}{J} - \frac{d\Omega_{ref}}{dt} + \tau\left( \frac{k}{LJ} v - \frac{kR}{LJ} z_2 - \frac{k^2}{JL} z_1 - \frac{d^2\Omega_{ref}}{dt^2} \right).$$

Q.3.7

$$\frac{d\vartheta}{dt} = s\frac{ds(.)}{dt} = s(\frac{k}{J} z_2 + \frac{C_{Ch}}{J} - \frac{d\Omega_{ref}}{dt} + \tau\left( \frac{k}{LJ} v - \frac{kR}{LJ} z_2 - \frac{k^2}{JL} z_1 - \frac{d^2\Omega_{ref}}{dt^2} \right)).$$

Q.3.8

On trouve alors

$$\frac{d\vartheta}{dt} = s\frac{ds(.)}{dt} = s(\frac{C_{Ch}}{J} - \frac{d\Omega_{ref}}{dt} + \tau\left( -\frac{k}{LJ} \lambda sign(s(t)) - \frac{d^2\Omega_{ref}}{dt^2} \right)).$$

D'où, la condition est

$$\lambda > \left| \frac{C_{Ch}}{J} - \frac{d\Omega_{ref}}{dt} - \tau\frac{d^2\Omega_{ref}}{dt^2} \right|.$$

Q.3.9

$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{-\lambda}{2}\sqrt{\vartheta}$ d'où en intégrant : $\vartheta(t) = (\frac{-\lambda}{4}t + \sqrt{\vartheta_0})^2$ , on obtient le temps qu'il faut pour atteindre $\vartheta = 0$. Ce temps est : $t = \frac{4}{\lambda}\sqrt{\vartheta_0}$.

Q.3.10

Après ce temps, le système évoluera sur la surface de glissement s(t)=0.

Q.3.11

La fréquence, vue par la charge, sera plus élevée et l'amplitude des discontinuités peut être un multiple de $\frac{V_E}{k}$ avec k le nombre de cellules. Ainsi, le phénomène de broutement (chattering en anglais) est très fortement atténué.

## 4ème Partie

Q.4.1 Le rôle de l'équation 4.1 est de borner $u$.

Q.4.2 Ce sera $-\alpha_M$.

Q.4.3 On trouve $t_1 = \dfrac{x_2(0)}{\alpha_M}$ et $\sigma(t_1) = \dfrac{x_2(0)^2}{2\alpha_M}$.

Q.4.4 Ce sera $-\alpha_m$.

Q.4.5 On trouve $t_2 = \dfrac{x_2(0)}{\sqrt{\alpha_M \alpha_m}}$ et $\overset{\circ}{\sigma}(t_1 + t_2) = -\sqrt{\dfrac{\alpha_m}{\alpha_M}} x_2(0)$.

Q.4.6 Ce sera $\alpha_M$.

Q.4.7 On trouve $t_3 = \sqrt{\dfrac{\alpha_m}{\alpha_M}} \dfrac{x_2(0)}{\alpha_M}$ et $\sigma(t_1 + t_2 + t_3) = \sqrt{\dfrac{\alpha_m}{\alpha_M}} \dfrac{x_2(0)^2}{2\alpha_M}$.

Q.4.8 En comparant les relations précédentes, on obtient

$$\frac{t_{2k+1}}{t_{2k-1}} = \sqrt{\frac{\alpha_m}{\alpha_M}} \text{ et } \frac{t_{2k}}{t_{2k-2}} = \sqrt{\frac{\alpha_m}{\alpha_M}}.$$

Q.4.9 On obtient les mêmes relations

$$\frac{\sigma(T_{2k+1})}{\sigma(T_{2k-1})} = \sqrt{\frac{\alpha_m}{\alpha_M}} \text{ et } \frac{\sigma(T_{2k})}{\sigma(T_{2k-2})} = \sqrt{\frac{\alpha_m}{\alpha_M}}.$$

Q.4.10 La relation est $\sqrt{\dfrac{\alpha_m}{\alpha_M}} < 1$ donc $\alpha_m < \alpha_M$.

Q.4.11 La solution littérale est

$$T_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\alpha_m}{\alpha_M}}\right)^i \left(\frac{1}{\alpha_m} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_m \alpha_M}}\right) x_2(0)$$

Q.4.12 Pour que $T_{+\infty}$ soit borné, il faut simplement que $\alpha_m < \alpha_M$. Alors, on obtient

$$T_\infty = \frac{1}{1 - \sqrt{\dfrac{\alpha_m}{\alpha_M}}} \left(\frac{1}{\alpha_m} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_m \alpha_M}}\right) x_2(0).$$

Q.4.13 D'après les relations, ayant servies à établir Q.4.3 et Q.4.5, on trouve que $\sigma(t) = O(\delta^2)$ et $\overset{\circ}{\sigma}(t) = O(\delta)$.

Q.4.14 Il faut avoir au moins cinq cellules par multicellulaire, sur la figure 1.5, il n'y a que 3 cellules, donc il en faut deux cellules de plus.