

SESSION DE 2008

**CONCOURS EXTERNE  
DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS**

**Section : GÉNIE ÉLECTRIQUE**

**COMPOSITION D'AUTOMATIQUE  
ET D'INFORMATIQUE INDUSTRIELLE**

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche, y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Dictionnaire technique anglais-français autorisé.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout autre dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.**

**Tournez la page S.V.P.**

# Sujet de la composition d'automatique

## PILOTAGE D' UNE PILE A COMBUSTIBLE DANS LE CADRE D' UNE APPLICATION DE TRACTION HYBRIDE

### Sommaire

1. Présentation Générale	3
2. Description et fonction des différents éléments	4
2.1 Tramway	
2.2 PAC	
2.3 Compresseur	
2.4 BS1	
2.5 CS1	
2.6 CS2	
2.7 Cœur de pile	
Partie 1 : Le générateur PAC et son compresseur	10
Partie 2 : Réglage de la tension bus : contrôle de CS1	14
Partie 3 : Réglage du courant dans la batterie de supercondensateurs BSC: contrôle de CS2 par approche fonction de transfert	16
Partie 4 : Gestion de l'énergie	20
Document réponse	23
Annexe	25

### Avertissements

Les quatre parties de cette composition sont indépendantes ; il est toutefois instamment recommandé de les traiter toutes et de consacrer à chacune un temps de travail proportionné. Chaque partie devra être rédigée sur une (des) copie(s) séparée(s).

Inversement, le questionnement dans chaque partie est généralement progressif, il est donc recommandé de traiter les questions dans l'ordre proposé.

# 1. Présentation Générale

La raréfaction des ressources fossiles associée aux problèmes de pollution atmosphérique a remis au goût du jour la pile à combustible (PAC) dont le principe a été découvert en 1839 par Sir William GROVE. L'utilisation d'hydrogène, conditionnée dans un réservoir sous pression, en réaction avec l'oxygène massivement présent dans l'air permet de générer de l'énergie électrique ainsi que de la chaleur et de l'eau. Si tant est que l'on soit capable de produire et stocker cet hydrogène, ce dispositif devient une solution particulièrement intéressante dans les applications de transport pour les raisons suivantes :

- c'est un bon substitut du pétrole, très utilisé pour le transport
- il annule ou réduit les émissions de  $CO_2$
- il supprime les caténaires pour les applications ferroviaires et participe ainsi à la réduction de la pollution visuelle.

Dans ce cadre nous proposons de traiter du management de l'énergie d'une chaîne de traction électrique, constituée d'une source hybride d'énergie, obtenue par association d'une PAC de type PEM (Membrane Échangeuse de Proton) et d'une Batterie de Supercondensateurs (BSC). Ces 2 éléments sont interconnectés à l'aide de convertisseurs statiques d'énergie électrique (CS1 et CS2), pour alimenter un groupe moto propulseur (GMP) entraînant un tramway sur un rail. L'ensemble est représenté sur le synoptique de la figure 1 et explicité sur le schéma de la figure 2.

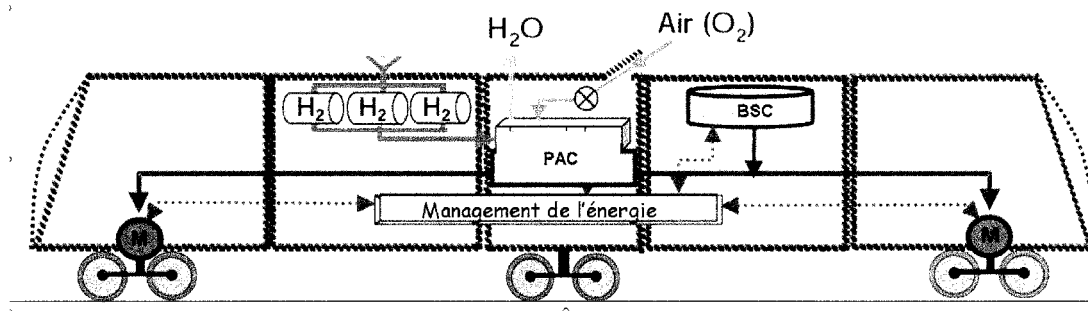


Figure 1 Représentation simplifiée du Tramway

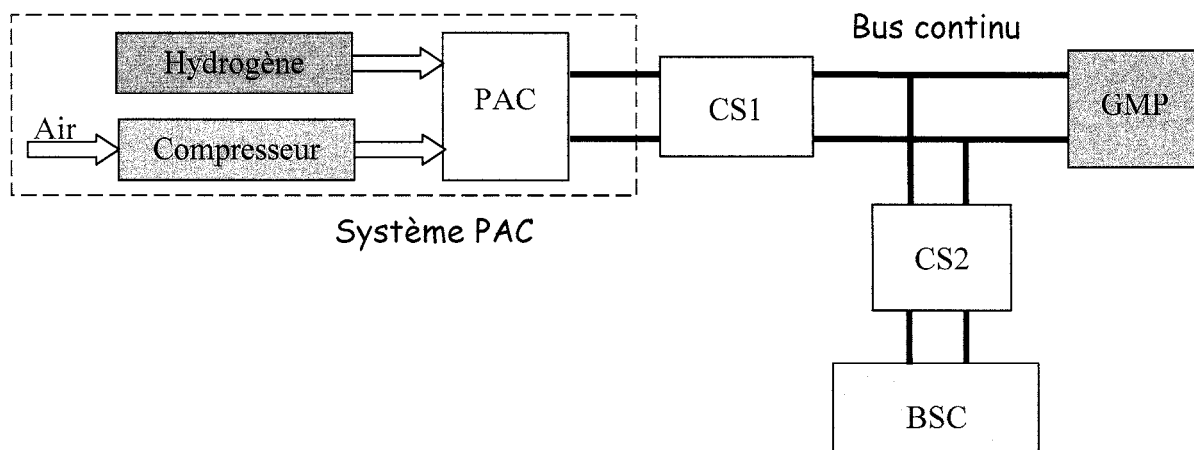


Figure 2 Schéma de principe

## 2. Description et fonction des différents éléments

### 2.1 Tramway

Le tramway (figure 3) faisant l'objet de l'étude est long de 30 m et pèse 60T. Sa vitesse maximale est de 70km/h. L'effort de traction en charge peut atteindre 72 kN. La traction est assurée par 2 moteurs d'une puissance totale de 450kW, pilotés selon une loi de commande vectorielle assurant le contrôle du couple électromagnétique de l'arbre en rotation. Au travers d'un réducteur, les roues sont mises en mouvement (figure 4). La tension nominale du bus continu est de 750V. Ceci constitue le GMP. La grandeur de pilotage est représentée par le couple désiré  $C_{des}(Nm)$  pour évoluer selon une vitesse de consigne  $V_{cons}(km/h)$ . La puissance utile nécessaire  $P_{des}(kW)$  est calculée en fonction de  $V_{cons}$ , du couple de traction  $C_{tr}(Nm)$ , en fonction du profil de la voie, du rendement de la transmission et des différentes pertes recensées.



Figure 3 : Tramway

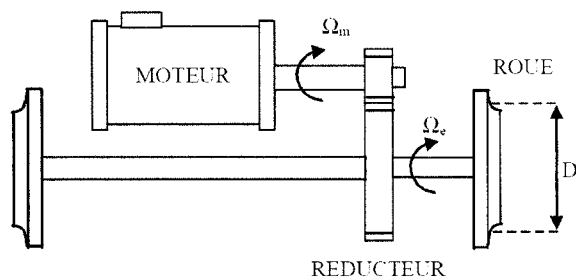


Figure 4 : Transmission mécanique

### 2.2 PAC

La pile est de type à membrane échangeuse de protons, dont le principe de fonctionnement pour une cellule est représenté ci-dessous (figure 5).

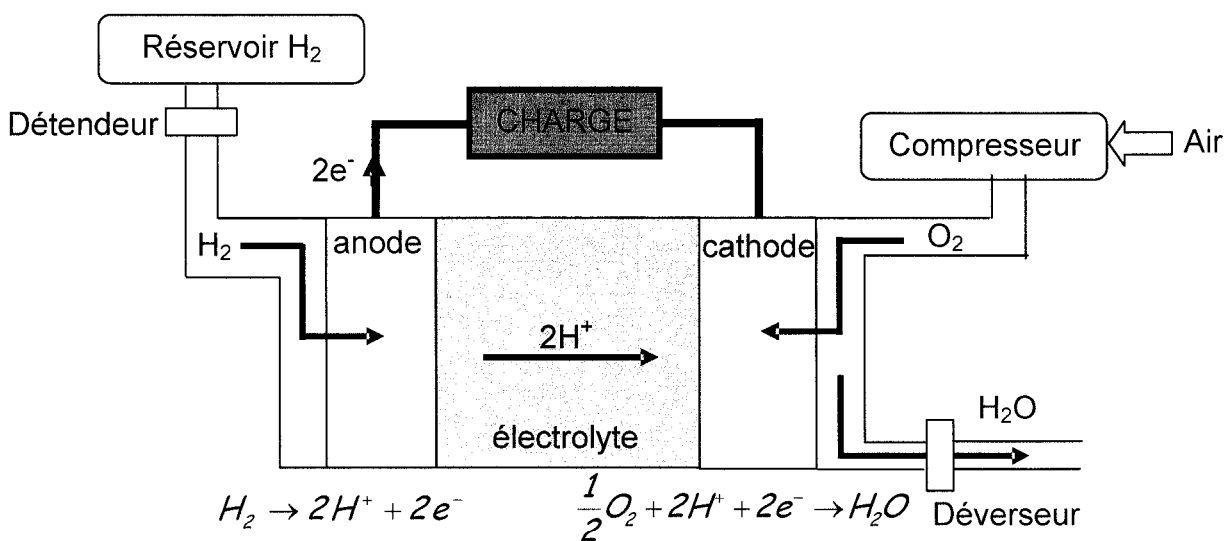


Figure 5 : Principe de fonctionnement

La tension disponible aux bornes d'une cellule élémentaire est donnée par la relation de Nernst :

$$E = E_{th} + \frac{RT}{2F} \ln \left( \sqrt{\frac{P_{O_2}}{10^5} \frac{P_{H_2}}{10^5}} \right) - \frac{RT}{2\alpha F} \ln \left( \frac{j}{j_o} \right) - r(j - j_o) - m e^{nj}$$

- Activation côté cathode :  $\frac{RT}{2\alpha F} \ln \left( \frac{j}{j_o} \right)$
- Limitation par la diffusion et noyage :  $m e^{nj}$
- Pertes ohmiques électrodes et membrane :  $r(j - j_o)$
- $m, n$  constantes caractéristiques  $m = 10^{-4} V$  et  $n = 5 cm^2 \cdot A^{-1}$
- $R$  : Constante des gaz parfaits  $R = 8,314 472 J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$
- $E_{th}$  potentiel théorique standard 1,23V
- $P_{O_2}$  et  $P_{H_2}$  représentant les pressions partielles d'Oxygène et d'Hydrogène en Pascal
- $F$  : Constante de Faraday 96485 Coulomb.mol<sup>-1</sup>.
- $T$  : Température de la couche active. (°K)
- $r$  Résistance de la membrane ( $\Omega$ )
- $j$  : Densité de courant (A/cm<sup>2</sup>)
- $j_o$  : Densité de référence 10<sup>-7</sup> A/cm<sup>2</sup>
- $\alpha$  : facteur de symétrie = 1/2

Ceci permet de décrire la courbe caractéristique tension / courant d'une cellule de pile à combustible PEM, avant la phase de noyage de la cellule (figure 6).

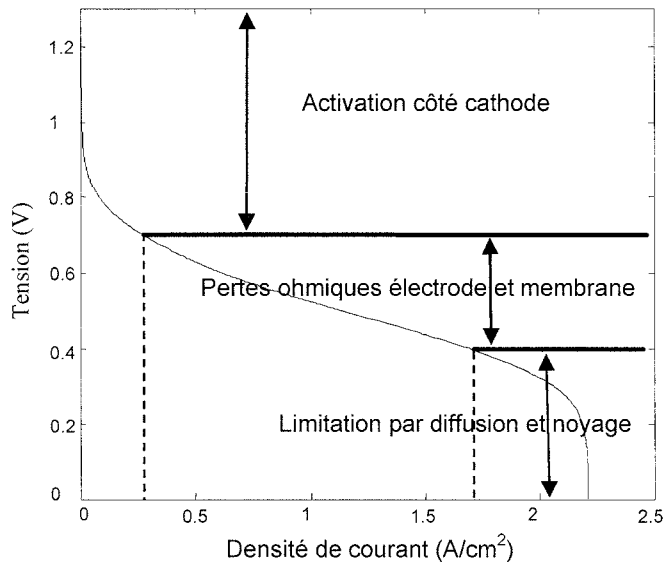


Figure 6 : Courbe caractéristique  $E = f(j)$  d'une cellule de la pile à combustible

Cette caractéristique peut être décomposée en trois parties représentant les phénomènes prépondérants en fonction de la valeur de la densité de courant.

- La première zone représente la surtension d'activation anode et cathode qui est le phénomène le plus important pour les faibles densités de courant.

- La deuxième zone caractérise le comportement ohmique de la cellule, c'est la zone la plus utilisée en fonctionnement car elle est linéaire et elle est valable sur une large plage de variation de la densité de courant.

- La troisième zone liée à la limitation par diffusion et noyage n'est pas exprimée directement dans la relation ci-avant. Cette dernière zone ne doit pas être utilisée en fonctionnement car le noyage détériore très fortement les performances de la pile.

### 2.3 Compresseur

Le compresseur d'air est constitué d'une turbine entraînée par une machine synchrone à aimants (MS) de 30 kW fonctionnant à haute vitesse et permettant d'avoir un débit molaire maximal  $Q_s, max = 15 mol.s^{-1}$ , (figure 7). Le convertisseur statique (CS) alimentant le moteur est connecté au bus continu et le démarrage du processus se fait au travers de la batterie BSC (voir figure 2). La puissance nécessaire au fonctionnement du compresseur est qualifiée de puissance auxiliaire. La commande de l'ensemble comporte une boucle de contrôle du couple  $C_{cp}$  développé par la machine électrique en cascade avec une boucle de vitesse permettant d'imposer la vitesse de rotation  $\Omega_c$  en relation avec la vitesse de référence  $\Omega_{ref}$ . La machine synchrone triphasée est à pôles lisses, elle fonctionne en mode autopiloté de telle sorte que son comportement est similaire à celui d'une machine à courant continu.

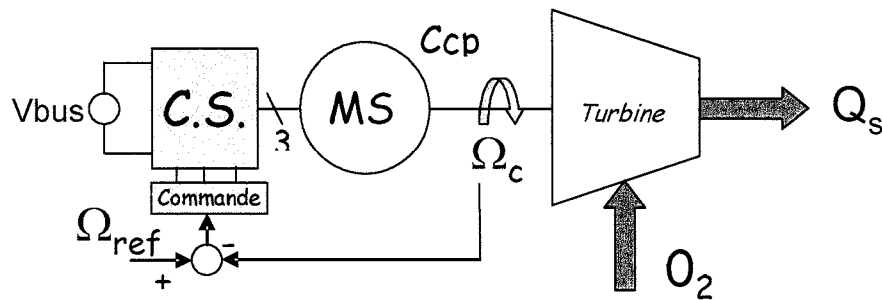


Figure 7 : Compresseur d'air

Dans les conditions normales de fonctionnement le débit molaire de sortie  $Q_s (mol.s^{-1})$  est lié à la vitesse de rotation  $\Omega_c (rad.s^{-1})$  par la relation  $Q_s = \frac{\Omega_c}{173} - 2$ . L'axe mécanique, constitué de la machine électrique et de la turbine possède les caractéristiques suivantes :

Inertie totale  $J_t = 0,00142 kg.m^2$ , frottement total  $f_t = 0,001 Nm.s.rad^{-1}$ . Dans la zone de fonctionnement utile le couple est contrôlé par l'injection de courants statoriques de valeurs efficaces  $I_{cpeff}$  et la loi  $C_{cp} = K_c * I_{cpeff}$  est applicable. ( $K_c = 0,2 Nm.A^{-1}$  : constante de couple). Le courant efficace nominal vaut  $I_{cpeffN} = 51 A$ . La turbine exerce sur l'arbre mécanique en rotation, un couple de charge dépendant du régime de fonctionnement, il sera noté  $C_{ch}$ .

### 2.4 BSC

A partir de la découverte du principe "de la double couche" par le physicien Helmholtz dans les années 1850 et en liaison avec le progrès incessant accompli sur les matériaux, le supercondensateur est aujourd'hui disponible sur le marché. Il permet, sous un faible volume, de stocker et de restituer de l'énergie électrique de manière très rapide, c'est ainsi qu'il se présente plutôt comme une source réversible de puissance. La technologie repose sur la formation d'une double couche électrochimique à l'interface d'un électrolyte et d'une électrode polarisable de grande surface spécifique. L'application d'une différence de potentiel aux bornes du dispositif complet entraîne le stockage électrostatique de charges aux deux interfaces électrode-électrolyte.

Le modèle simplifié d'un élément de supercondensateur est représenté sur la figure 8 ci-dessous :

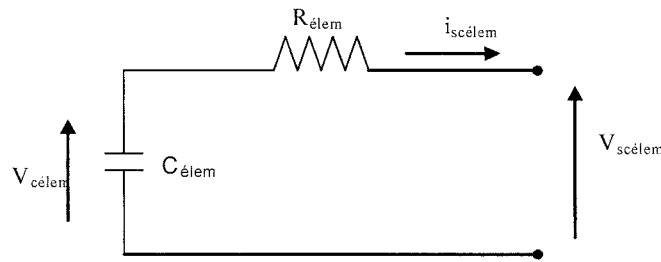


Figure 8 : Modèle simplifié d'un élément supercondensateur

La tension maximale en charge d'un élément de supercondensateur est limitée pour des raisons technologiques à une tension de 2,5V. De ce fait l'utilisation des supercondensateurs dans des applications de forte puissance ne peut se faire qu'en associant plusieurs éléments en série pour pouvoir atteindre des tensions importantes.

La BSC est constituée de supercondensateurs élémentaires branchés en série ( $N_s$ ) et en parallèle ( $N_p$ ) dont le modèle équivalent est un condensateur  $C_{sc}$  en série avec une résistance  $R_{sc}$  :

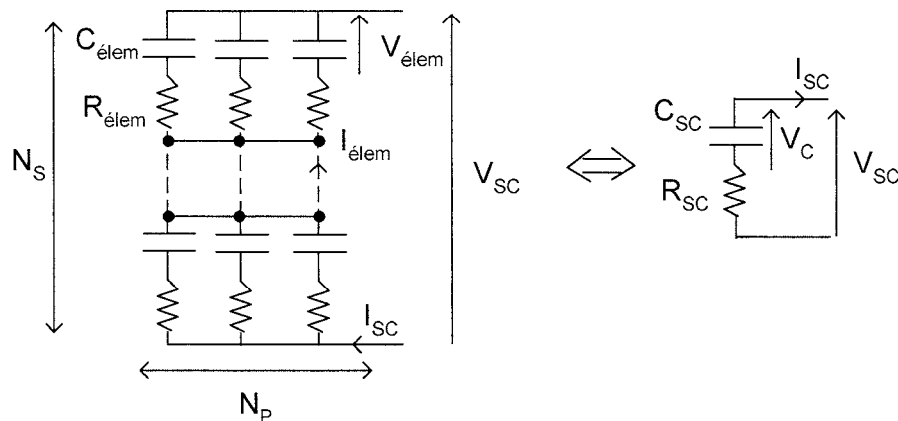


Figure 9 : Réalisation d'une BSC

La BSC mise en œuvre dans cette application utilise un dispositif actif assurant l'équilibre des différentes tensions aux bornes des supercondensateurs permettant une répartition harmonieuse de l'énergie stockée. Ce dispositif complexe n'est pas étudié ici et donc non représenté.

#### Caractéristiques de la BSC:

- Energie max transférée : 3,35 kWh
- Nombre total d'éléments :  $N_{élem}=2556$
- Nombre d'éléments en parallèle:  $N_p=9$
- Nombre d'éléments en série :  $N_s=284$
- Résistance du pack :  $R_{sc}=16m\Omega$
- Capacité du pack :  $C_{sc}=80,5F$
- Tension maximale  $V_{scmax}=730 V$
- Courant maximal  $I_{scmax}= +/- 1200 A$
- $V_{cmax}=710V$

La puissance utile stockée est définie par :  $P_{sc} = V_{sc} \times I_{sc}$ .

- $P_{sc} > 0$  en traction (décharge du pack SC)
- $P_{sc} < 0$  en freinage (charge du pack SC)

## 2.5 CS1

Il s'agit d'un convertisseur élévateur de tension de type BOOST (figure 10), non réversible et piloté en Modulation de Largeur d'Impulsion (MLI). Les paramètres sont les suivants :  $C_f = 8,1 \text{ mF}$  et  $L_1 = 2,3 \text{ mH}$ . Le dimensionnement est réalisé pour limiter, autour des valeurs nominales suivantes  $V_{bus} = 750V$  et  $I_L = 600A$ , l'ondulation de courant en entrée  $\Delta I_L \text{ max} = 40A$  et l'ondulation de la tension de sortie  $\Delta V_{bus} = 20V$  pour une fréquence de découpage de  $F_{ds} = 2kHz$ . La variable  $u$  est du type binaire et représente l'état de l'interrupteur de l'IGBT. (Interrupteur fermé  $u=1$  et interrupteur ouvert  $u=0$ ). Sauf précision particulière, les composants de puissance sont supposés parfaits, ainsi la résistance à l'état passant est nulle et la résistance à l'état bloquée est infinie. La commutation de l'état passant à l'état bloqué et inversement est instantanée.

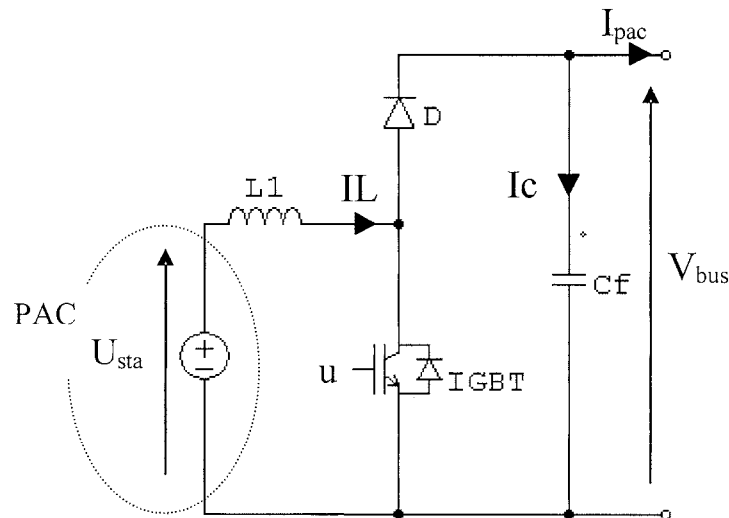


Figure 10 : Structure du CS1

## 2.6 CS2

Ce convertisseur est du type élévateur/abaisseur (BUCK/BOOST) conformément à la figure 11, ci-après. Le dimensionnement mené pour une limitation de l'ondulation de courant de  $\Delta I_{sc} \text{ max} = 40A$  avec une fréquence de découpage de  $F_{ds} = 2kHz$  se traduit par une inductance  $L_2 = 2,3 \text{ mH}$ . Les variables  $u_1$  et  $u_2$  sont de type binaire et représentent respectivement l'état des interrupteurs IGBT1 et IGBT2. (IGBTi fermé,  $u_i=1$  et IGBTi ouvert,  $u_i=0$ ). Sauf précision particulière, les composants de puissance sont supposés parfaits, ainsi la résistance à l'état passant est nulle et la résistance à l'état bloquée est infinie. La commutation de l'état passant à l'état bloqué et inversement est instantanée.



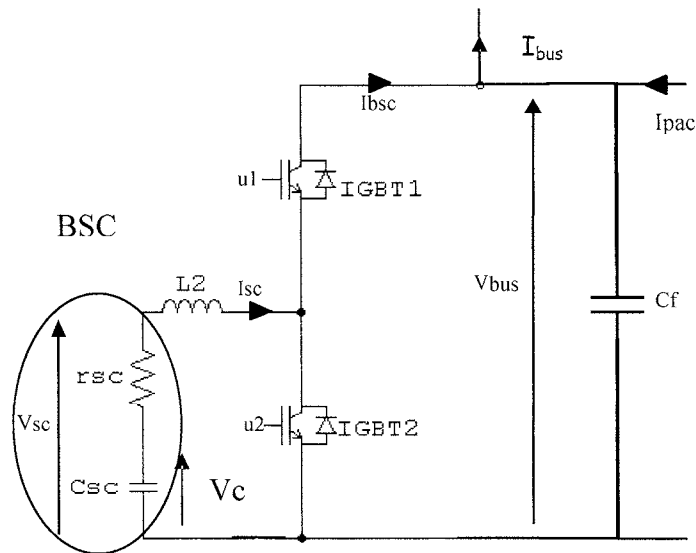


Figure 11 : Structure du CS2

## 2.7 Cœur de pile

Globalement l'architecture du système pile est représenté ci-dessous. On distingue sur la partie droite le circuit d'hydrogène ( $H_2$ ) ou système anodique, sur la partie supérieure gauche, le circuit d'air ( $O_2$ ) ou partie cathodique et sur la partie inférieure gauche le dispositif de contrôle de la température.

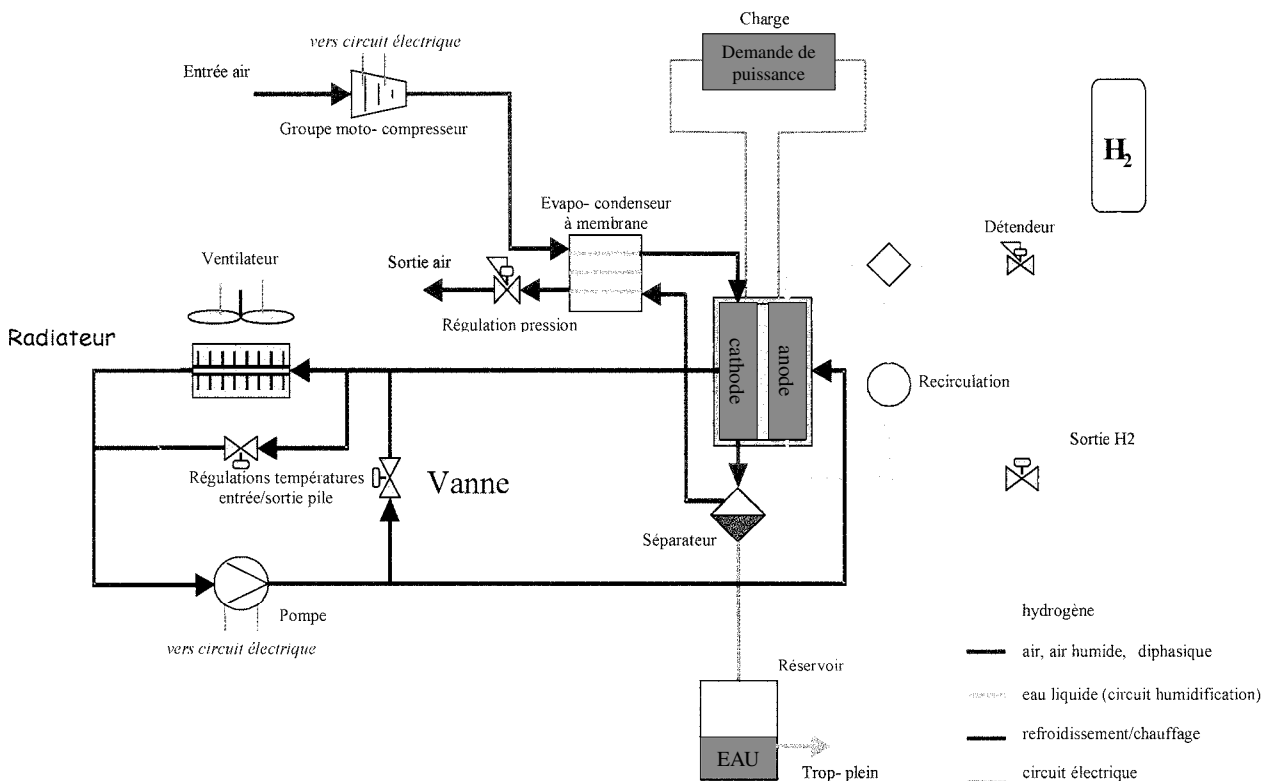


Figure 12 : Cœur de pile

Pour que la PAC fonctionne de manière correcte, il est nécessaire de contrôler la température à l'entrée de la pile  $T_e$ , ainsi que la température à la sortie,  $T_s$ , à l'aide du radiateur et des vannes "by\_pass". Cette partie n'est pas traitée dans ce sujet.

## Questionnement

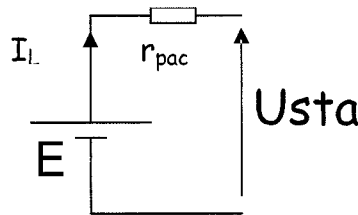
### Partie 1 : Le générateur PAC et son compresseur

La PAC utilisée dans l'application est réalisée en empilant 586 cellules ( $N_{cell} = 586$ ) afin de fournir une tension nominale de  $U_{sta} = 375V$  et un courant nominal  $I_L = 600A$ . Le courant maximal vaut  $I_{Lmax} = 1200A$ . La pression d'hydrogène sera considérée constante et égale à 2 bars et la pression cathodique également constante et égale à 1,5 bar. Il est à noter qu'une partie de l'eau produite par la pile est utilisée pour régler l'humidification de la membrane au travers du circuit d'air.

Un essai, en générateur débitant sur une charge résistive variable, effectué dans les conditions nominales d'utilisation (température et pressions partielles adéquates) a permis de dresser le tableau de résultats suivant :

$I_L(A)$	58,6	146,5	586	879	1230	1289
$U_{sta}(V)$	468,8	410,2	351,6	246,12	175,8	164

On souhaite identifier les paramètres d'une source de tension équivalente, représentant le comportement de la pile. Le schéma équivalent est représenté sur la figure suivante :



- 1.1 Etablir une équation de mesure liant les variables  $E$ ,  $U_{sta}$ ,  $I_L$ ,  $r_{pac}$ .
- 1.2 On définit le vecteur des paramètres à estimer  $\Theta^t = [E \quad r_{pac}]^t$ , exprimez la relation sous la forme  $Y = \Phi \cdot \Theta$ .
- 1.3 Etablir la matrice des mesures  $\Phi$  en utilisant toutes les mesures disponibles.
- 1.4 Donnez la meilleure estimée de  $\Theta$ , notée  $\hat{\Theta}$  au sens des moindres carrés.
- 1.5 En déduire les valeurs numériques de  $E$  et  $r_{pac}$

A partir d'une référence de courant  $I_{Lref}$  demandée à la PAC, on détermine le débit d'air de référence entrant dans la pile ( $\text{mol} \cdot \text{s}^{-1}$ ), à l'aide de la relation de Faraday suivante :

$$Q_{sref} = \frac{N_{cell} \cdot I_{Lref} \cdot St_{O_2}}{X_{O_2} \cdot 4 \cdot F} \quad \text{avec :}$$

$St_{O_2}$  Rapport stœchiométrique représentant le rapport entre le débit d'oxygène entrant dans la pile et débit d'oxygène consommé, fixé ici à 1.6.

$F$ : Constante de Faraday 96485 Coulomb  $\cdot \text{mol}^{-1}$ .

$X_{O_2}$  : Fraction molaire d'oxygène dans l'air ( 21 %)

1.6: Déterminez la relation analytique liant le courant de référence de la pile  $I_{Lref}$  et la référence de la vitesse de rotation du compresseur  $\Omega_{ref}$ .

1.7 :Exprimez cette relation sous la forme  $\Omega_{ref} = G_1 * I_{Lref} + G_2$  et donnez les valeurs numériques de  $G_1$  et de  $G_2$  en précisant les unités.

On suppose que la boucle de courant de la machine synchrone est parfaite à l'échelle de l'évolution de la vitesse et on confondra le courant et sa référence :  $I_{cpeff} \approx I_{cpref}$ .

Réglage de la vitesse du compresseur à l'aide d'un régulateur standard associé à un observateur de perturbation

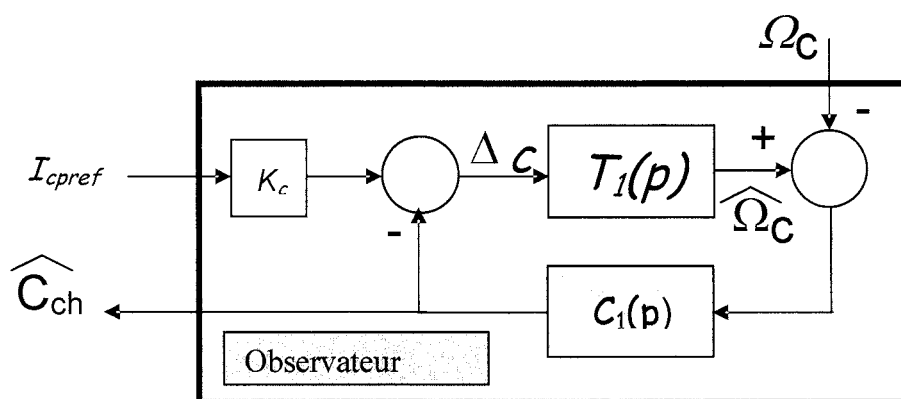
1.8: Déterminez l'équation différentielle donnant l'évolution temporelle de la vitesse  $\Omega_c$  de l'arbre mécanique en fonction de  $I_{cpref}$  et de  $C_{ch}$

1.9 : En considérant la grandeur  $\Delta C = C_{cp} - C_{ch}$ , exprimez la fonction de transfert  $T_1(p) = \frac{\Omega_c(p)}{\Delta C(p)}$ .

1.10 : Afin d'obtenir des hautes performances de réglage en vitesse, on propose de réaliser un observateur de charge à l'aide de la structure représentée ci-dessous.  $C_1(p)$  possède la forme suivante

$$C_1(p) = K_{po} + \frac{K_{io}}{p}$$

Expliquez le fonctionnement de cet observateur et expliquez l'intérêt d'utiliser la variable  $I_{cpref}$  au lieu de  $I_{cp}$ .



1.11 : Déterminez la fonction de transfert  $T_2(p) = \frac{\hat{C}_{ch}(p)}{I_{cpref}(p)}$  en faisant apparaître les paramètres de réglage.

1.12 : Calculez analytiquement les paramètres ( $K_{po}$  et  $K_{io}$ ) pour que  $T_2(p)$  possède un pôle double de valeur  $-30 * f_t / J_t \text{ rad.s}^{-1}$ . Justifiez ce choix.

1.13 : Donnez la valeur numérique des paramètres de ( $K_{po}$  et  $K_{io}$ ).

1.14 : Dessinez un schéma de contrôle faisant intervenir une régulation de vitesse et une procédure de compensation du couple de charge agissant sur la grandeur de commande  $I_{cpref}$ . L'idée étant d'atténuer l'influence des variations de charge sur l'évolution de la vitesse.

1.15 : Précisez la valeur du gain intervenant dans la compensation du couple de charge.

1.16 : On introduit un régulateur dans la boucle de réglage de la vitesse. En considérant la compensation parfaite, calculez analytiquement les paramètres d'un régulateur de type Proportionnel Intégral ( $K_{pr}$  et  $K_{ir}$ ) permettant d'imposer une dynamique du 2° ordre caractérisée par une pulsation propre de  $10 * f_t / J_t \text{ rad.s}^{-1}$  et un facteur d'amortissement unité.

$$C_2(p) = K_{pr} + \frac{K_{ir}}{p}$$

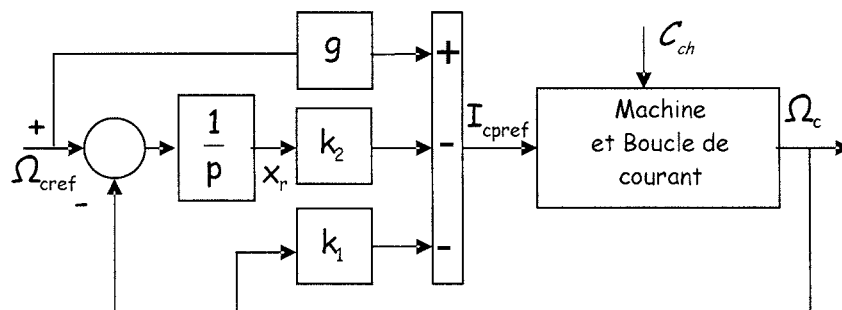
1.17 : Donnez les valeurs numériques de ( $K_{pr}$  et  $K_{ir}$ ).

1.18 : Exprimez la fonction de transfert en Boucle fermée  $T_3(p) = \frac{\Omega_c(p)}{\Omega_{ref}(p)}$  en fonction de  $J_t$  et  $f_t$ .

### Réglage de la vitesse à l'aide d'une loi de commande par retour d'état

1.19 : A partir de l'équation obtenue en 1.8, exprimez une équation d'état représentant l'évolution de la vitesse, de la forme  $\dot{\Omega}_c = A.\Omega_c + B.I_{cpref} + D.C_{ch}$ . Définir A,B,D analytiquement et numériquement

1.20 : On souhaite implanter une loi de commande par retour d'état avec action intégrale fidèlement au schéma ci-après, où  $x_r$  représente une variable d'état supplémentaire.



Justifiez l'appellation retour d'état et l'usage de l'intégrateur.

1.21 : Exprimez l'équation d'état augmentée sous la forme  $\dot{X} = P.X + R.I_{cpref} + S.\Omega_{cref} + N.C_{ch}$ , en boucle ouverte, c'est-à-dire en l'absence des 3 gains de réglage.  $X^T = [\Omega_c \quad x_r]$

Définir les matrices P,R,S,N analytiquement et numériquement

1.22 : Exprimez le polynôme caractéristique de la matrice P sous la forme  $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0$ . Les coefficients seront exprimés en fonction des paramètres de la machine de manière analytique.

1.23 : Exprimez la matrice de changement de base M définie par  $\tilde{X} = M \cdot X$ , de telle sorte que la matrice dynamique  $\tilde{P}$  soit sous forme compagne canonique de commande  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$  et la matrice de commande  $\tilde{R}$  de structure  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

1.24 : La dynamique souhaitée est caractérisée par 2 pôles simples de valeur  $-10 * f_t / J_t \text{ rad.s}^{-1}$  et  $-50 * f_t / J_t \text{ rad.s}^{-1}$ . Exprimez la dynamique souhaitée par un polynôme caractéristique de la forme  $\Delta_d(\lambda) = \lambda^2 + \gamma_1 \cdot \lambda + \gamma_0$ .

1.25 : Exprimez les gains du retour d'état dans la base compagne  $\begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 \end{bmatrix}^T$  en fonction de  $a_0, a_1, \gamma_1, \gamma_0$ .

1.26 Exprimez les gains dans la base des mesures  $\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}^T$ .

1.27 : Exprimez la fonction de transfert en boucle fermée  $T_4(p) = \frac{\Omega_c(p)}{\Omega_{cref}(p)}$  en fonction de  $f_t$  et  $J_t$ , en faisant apparaître le coefficient  $g$  (on considérera  $C_{ch} = 0$ ).

1.28 : Calculez le paramètre  $g$  pour compenser le pôle  $-50 * f_t / J_t \text{ rad.s}^{-1}$ . Justifiez ce choix.

1.29 : Exprimez à nouveau  $T_4(p) = \frac{\Omega_c(p)}{\Omega_{cref}(p)}$  avec la valeur  $g$  calculée précédemment.

1.30 : Exprimez  $T_5(p) = \frac{\Omega_c(p)}{C_{ch}(p)}$ , commentez le résultat obtenu.

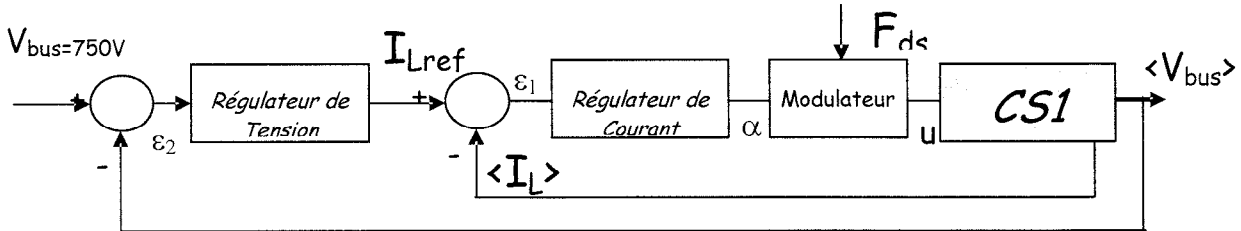
1.31 : Donnez les valeurs numériques de  $k_1, k_2, g$

1.32 : Comparez  $T_5(p)$  et  $T_4(p)$  et commentez le comportement induit.

1.33 : Comparez  $T_5(p)$  et  $T_3(p)$  et commentez les performances attendues.

## Partie 2 : Réglage de la tension bus : contrôle de CS1

Ce convertisseur est utilisé pour régler la tension de bus  $V_{bus}$  par action sur  $u$  (voir figure 10). On met en place pour cela un schéma de réglage de type cascade avec une boucle de courant imbriquée dans une boucle de tension, voir schéma ci-après.



2.1: Ce convertisseur est non réversible et élévateur de tension, justifiez ce choix.

2.2: Lorsque l'interrupteur est fermé ( $u=1$ ), modélisez ce convertisseur par un jeu d'équations différentielles, donnant l'évolution du courant dans l'inductance  $I_L$  et de la tension de sortie  $V_{bus}$  en fonction de  $U_{sta}$ ,  $V_{bus}$  et  $I_{pac}$ .

2.3: Même chose lorsque l'interrupteur est ouvert ( $u=0$ )

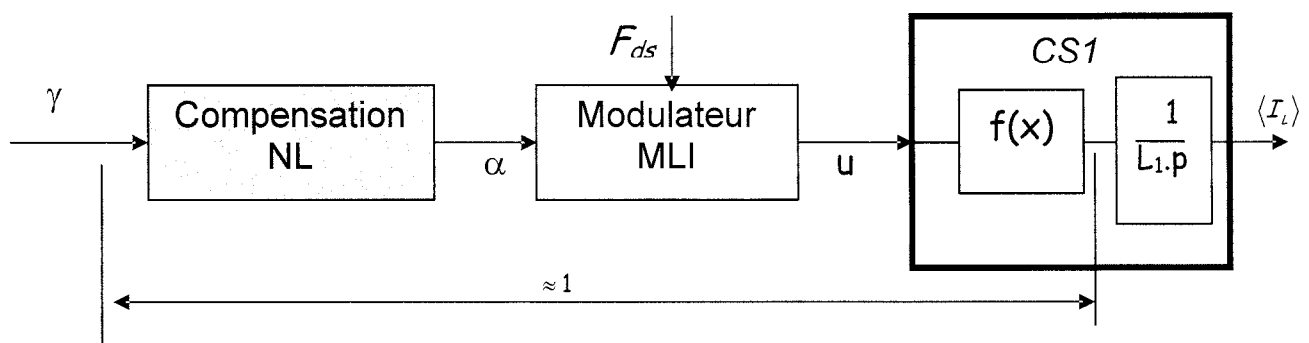
2.4: Unifiez les deux relations précédentes en utilisant la variable  $u$ .

2.5: On considère maintenant la moyenne de la variable  $u$  sur une période de découpage, c'est-à-dire le rapport cyclique  $\alpha$ . On notera  $\langle I_L \rangle$  valeur moyenne de  $I_L$ ,  $\langle V_{bus} \rangle$  la valeur moyenne de  $V_{bus}$ ,  $\langle I_{pac} \rangle$  valeur moyenne de  $I_{pac}$ , sur la période de découpage. A partir de 2.4 exprimez le modèle moyen du convertisseur.

2.6: Expliquez pourquoi ce modèle traduit un comportement non linéaire.

2.7: Donnez en régime permanent le gain  $G_V = \frac{\langle V_{bus} \rangle}{U_{sta}}$  et  $G_I = \frac{\langle I_{pac} \rangle}{\langle I_L \rangle}$

2.8: Afin de linéariser le comportement, on met en place une procédure de compensation dans le bloc de commande, visant à établir un lien direct ( $\approx 1$ ) entre une grandeur de commande intermédiaire  $\gamma$  et la tension aux bornes de l'inductance, fidèlement au schéma ci-dessous.  $F_{ds}$  représente la fréquence de découpage, soit  $\omega_{ds} = 2\pi \cdot F_{ds}$ .



Déterminez le bloc de compensation, en considérant que le modulateur, de type MLI, se comporte, en valeur moyenne, comme un gain unité.

2.9 : Déterminez alors la fonction de transfert  $T_i(p) = \frac{\langle I_L \rangle(p)}{\gamma(p)}$

2.10: Afin d'imposer un courant  $I_{Lref}$  dans l'inductance, on désire mettre en place un régulateur de type Proportionnel Intégral  $C_{s1}(p) = K_s \cdot \frac{(1 + T_{is} \cdot p)}{T_{is} \cdot p}$ , agissant à partir de l'erreur  $\varepsilon_1$  et fournissant une commande  $\gamma$ . On souhaite ainsi imposer la pulsation de coupure en boucle ouverte corrigée à une valeur  $\omega_{bps} = \frac{\omega_{ds}}{10}$ . Dessinez le diagramme de Bode asymptotique de  $C_{s1}$  et  $T_i$  (courbe de gain uniquement), correspondant à cette situation en choisissant  $\frac{1}{T_i}$ , 1/2 décade inférieure à  $\omega_{bps}$ .

*Utiliser le document réponse ci-joint.*

2.11 : Tracez la courbe de gain asymptotique de la boucle ouverte corrigée sur le même diagramme.

2.12 : En déduire la valeur analytique des gains du régulateur  $K_s$  et  $T_{is}$  en fonction de  $L_1$  et  $\omega_{bps}$ .

2.13 : Tracez la courbe de gain asymptotique en boucle fermée  $T_s(p) = \frac{\langle I_L \rangle(p)}{I_{Lref}(p)}$  sur le même diagramme. Justifiez la construction.

2.14 : Déduire de 2.13, le temps de réponse à 5% de la boucle de courant.

2.15 : Pour la boucle de tension on considère la boucle de courant parfaite, soit  $\langle I_L \rangle \approx I_{Lref}$ , justifiez cette hypothèse.

2.16 : Etablissez une équation différentielle liant en valeur moyenne le courant  $I_{Lref}$  à  $V_{bus}$ .

2.17 : On considère le courant  $\langle I_{pac} \rangle$  mesurable, à la lumière de la solution utilisée en 2.8, proposez une solution de compensation pour insensibiliser la tension de bus  $\langle V_{bus} \rangle$ . On notera  $\lambda(p)$  la nouvelle grandeur de commande.

2.18 : Etablir la fonction de transfert  $T_g(p) = \frac{\langle V_{bus} \rangle(p)}{\lambda(p)}$

2.19 : Définir un régulateur de tension de type Proportionnel Intégral (PI):  $C_{s2}(p) = K_{s2} \cdot \frac{(1 + T_{is2} \cdot p)}{T_{is2} \cdot p}$ , agissant à partir de l'erreur  $\varepsilon_2$  et fournissant une commande  $\lambda$ . Construire ce régulateur à partir du diagramme asymptotique afin d'imposer la tension bus avec une bande passante en boucle fermée égale à  $\omega_{bps2} = \frac{\omega_{bps}}{\sqrt{10}}$ . Donnez les valeurs de  $K_{s2}$  et  $T_{is2}$  de façon analytique. (On choisira  $\frac{1}{T_{is2}}$ , 1/2 décade inférieure à  $\omega_{bps2}$ ).

2.20 : Donnez les valeurs numériques de  $K_{s2}$  et  $T_{is2}$ .

2.21 : Évaluez le temps de réponse à 5% de la boucle de tension. Commentez le résultat obtenu.

## Partie 3 : Réglage du courant dans la batterie de supercondensateurs BSC: contrôle de CS2 par approche fonction de transfert

---

Le convertisseur CS2 est utilisé pour régler le courant dans la batterie de supercondensateurs BSC, c'est-à-dire  $I_{sc}$  par action sur  $u_1$  et sur  $u_2$  (voir figure 11).

3.1 : Cette structure est réversible en courant, justifiez ce choix.

3.2 : Lors des échanges d'énergie de la BSC vers le bus continu ( $I_{sc} > 0$ ),  $u_1$  sera maintenu à 0 et la commande s'opérera par action sur  $u_2$ . Il s'agit du mode S. Justifiez ce fonctionnement et exprimez la condition d'existence de ce mode.

3.3 : Lors des échanges d'énergie du bus continu vers la BSC ( $I_{sc} < 0$ ),  $u_2$  sera maintenu à 0 et la commande s'opérera par action sur  $u_1$ . Il s'agit du mode D. Justifiez ce fonctionnement et exprimez la condition d'existence de ce mode.

### Mode D

3.4 : Modélisez le comportement en grandeurs instantanées par un jeu d'équations différentielles faisant intervenir  $u_1$ ,  $I_{sc}$  et  $V_{sc}$ .

3.5 : On considère maintenant la moyenne de la variable  $u_1$  sur une période de découpage, c'est-à-dire le rapport cyclique  $\alpha_1$ . On notera  $\langle I_{sc} \rangle$  valeur moyenne de  $I_{sc}$  sur la période de découpage et  $\langle V_{sc} \rangle$  la valeur moyenne de  $V_{sc}$  sur la période de découpage. On considérera que la tension bus est ici constante et égale à sa valeur nominale  $V_{bus} = 750V$ . Exprimez alors le modèle moyen du convertisseur sous la forme d'une équation d'état analytique :  $\dot{\underline{x}} = A_1 \cdot \underline{x} + B_1 \cdot \alpha_1$  avec  $\underline{x}^T = [\langle I_{sc} \rangle \quad \langle V_{sc} \rangle]$  et  $\underline{y} = [1 \quad 0] \cdot \underline{x}$ .

3.6 : Rappelez la définition de la commandabilité et de l'observabilité pour les systèmes linéaires.

3.7 : Formulez les critères permettant d'évaluer les propriétés de commandabilité et d'observabilité dans le cas continu.

3.8 : Évaluez ces propriétés sur le modèle défini en 3.5.

3.9 : On souhaite exprimer l'évolution temporelle du vecteur d'état à partir d'une condition initiale  $\underline{x}_0$ , lorsqu'on applique un rapport cyclique de commande constant  $\alpha_1$ . Pour cela il s'agit de résoudre l'équation d'état. Donnez la solution de l'équation homogène  $\dot{\underline{x}}(t) = A_1 \cdot \underline{x}(t)$ .

3.10 : Donnez une solution particulière de l'équation d'état  $\dot{\underline{x}} = A_1 \cdot \underline{x} + B_1 \cdot \alpha_1$ . On suppose que la matrice  $A_1$  est régulière.

3.11 : Donnez la solution complète et démontrez qu'elle peut s'exprimer par :

$$\underline{x}(t) = \exp(A_1 \cdot t) \cdot \underline{x}_0 + A_1^{-1} \cdot (\exp(A_1 \cdot t) - I) \cdot B_1 \cdot \alpha_1.$$

3.12 : Calculez numériquement  $F = \exp(A_1 \cdot t)$  à l'aide de la relation  $\exp(A_1 \cdot t) = L^{-1}(pI - A_1)^{-1}$  ou l'opérateur  $L$  représente la Transformée de Laplace et  $L^{-1}$  son inverse, appelé également original.

3.13 : Calculez numériquement la matrice  $G = A_1^{-1} \cdot (\exp(A_1 \cdot t) - I) \cdot B_1$ .



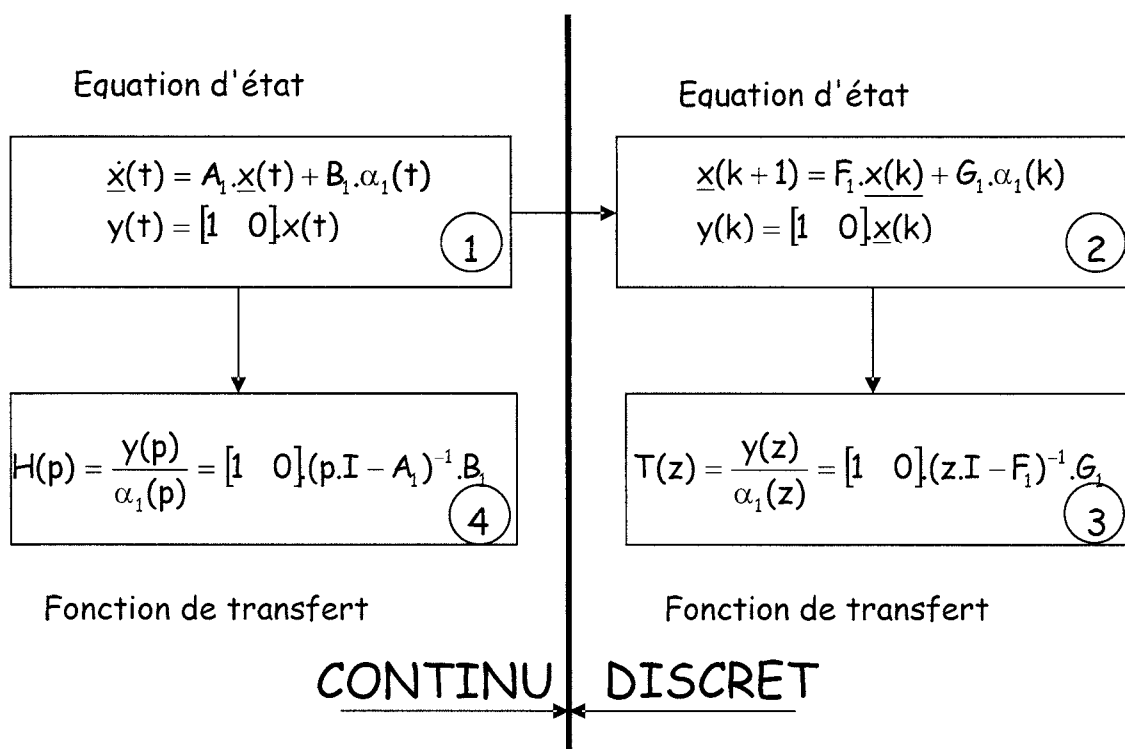
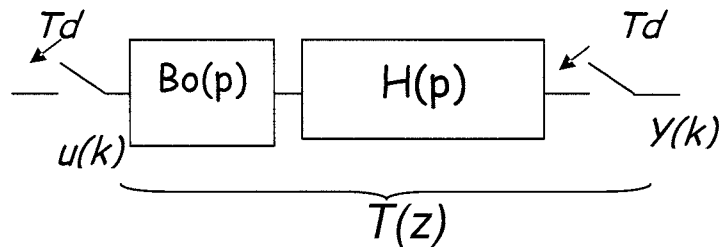
3.14 : Pour un rapport cyclique  $\alpha_1 = 0.5$  et une condition initiale définie par  $\underline{x}_0^T = [0 \ 300]$  donnez l'évolution temporelle de  $\langle I_{sc} \rangle$ .

3.15 : Exprimez, numériquement, la valeur d'équilibre  $\langle I_{sc} \rangle(\infty)$  et calculez les pôles et zéros de la fonction de transfert équivalente.

3.16 : En vue d'une commande échantillonnée, on souhaite discrétiser ce système avec une période d'échantillonnage égale à la période de découpage du convertisseur  $T_d = 1/F_{ds}$ , en utilisant les formulations d'état conformément à la procédure ci-dessous.

$B_o(p)$  représente un bloqueur d'ordre 0,  $z$  est un opérateur défini par  $z = \exp(p.T_d)$  et  $T(z)$  représente la transformée en  $z$  de l'association  $\overline{B_o(p).H(p)}$ .

Expliquez pourquoi sur une période d'échantillonnage donnée on peut poser  $u(t) = u(k.T_d)$



3.17 : En utilisant la relation définie en 3.11, entre deux instants d'échantillonnage consécutifs, démontrez la relation de passage de 2 vers 3. Exprimez  $F_1$  et  $G_1$ .

3.18 : De la même façon, démontrez la relation de passage de 1 vers 4. Calculez  $H(p)$ .

3.19 : Calculez  $T(z)$ , en privilégiant la forme polynomiale  $T(z) = \frac{\langle I_{sc}(z) \rangle}{\alpha_1(z)} = \frac{b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}$ .

Pour cela on considérera que  $F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,2170 \\ 0 & 0,9965 \end{bmatrix}$  et  $G_1 = \begin{bmatrix} -162,76 \\ 2,6047 \end{bmatrix}$

3.20 : Calculez le gain statique  $G_S$  de la fonction de transfert  $T(z)$ .

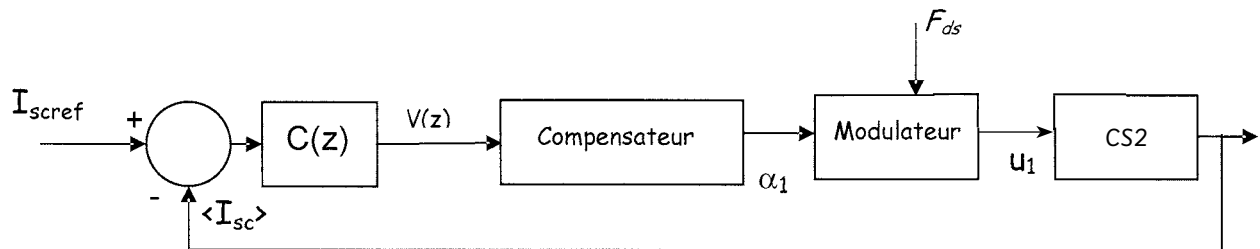
3.21 : Calculez les pôles et les zéros de la fonction de transfert  $T(z)$ . Commentez le résultat obtenu en comparant notamment avec les caractéristiques du modèle continu. Expliquez.

3.22 : On souhaite imposer un courant de référence  $I_{scref}$  dans la BSC et pour simplifier le réglage, on propose de réduire l'ordre du système à l'aide d'une compensation par inversion de modèle. A cet effet complétez le schéma bloc dans le document réponse, en donnant les 4 variables figurant dans les carrés. La nouvelle grandeur de commande  $V$  est homogène à une tension. Il peut être profitable d'utiliser les résultats de la question 3.4.

3.23 : En supposant parfaite cette compensation et transparent le modulateur, au sens des valeurs moyennes, déterminez la fonction de transfert continue  $H_i(p) = \frac{\langle I_{sc} \rangle(p)}{V(p)}$ .

3.24 : Donnez une représentation échantillonnée analytique de cette relation, soit  $T_{10}(z) = \frac{\langle I_{sc} \rangle(z)}{V(z)}$  en considérant la présence d'un bloqueur d'ordre 0.

3.25: Déterminez un régulateur RST de la forme suivante  $C(z^{-1}) = \frac{r_0 + r_1 \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}}$ , agissant sur  $V(z)$  permettant d'imposer une dynamique en boucle fermée caractérisée par un pôle double placé en  $\omega_{ds} / 20$  rd.s<sup>-1</sup>, avec  $\omega_{ds} = 2 \cdot \pi \cdot F_{ds}$ . Exprimez analytiquement  $r_0$  et  $r_1$ .

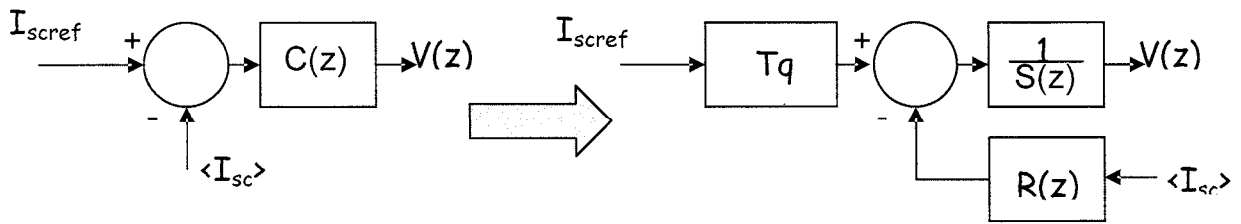


3.26 Exprimez analytiquement la fonction de transfert en boucle fermée  $T_{BF}(z) = \frac{\langle I_{sc} \rangle(z)}{I_{scref}(z)}$

3.27 Calculez les pôles et zéros de  $T_{BF}(z) = \frac{\langle I_{sc} \rangle(z)}{I_{scref}(z)}$

3.28 Qualitativement expliquez l'incidence des zéros sur la réponse à un échelon de référence.

3.29 : En vue d'améliorer la réponse du dispositif, on propose de réaliser une structure sans apport de zéros préservant les pôles en boucle fermée, fidèlement au schéma ci-après. Déterminer le contenu des 3 blocs  $R(z)$ ,  $S(z)$ ,  $T_q$ , en liens avec  $C(z)$ .



3.30 : Calculez la nouvelle fonction de transfert ainsi obtenue  $T'_{BF}(z) = \frac{\langle I_{sc} \rangle(z)}{I_{scref}(z)}$

3.31 : Commentez le résultat obtenu.

### Mode S

3.32 : Modélisez le comportement en grandeurs instantanées, par un jeu d'équations différentielles faisant intervenir  $u_2$ ,  $I_{sc}$  et  $V_{sc}$ .

3.33 : On considère maintenant la moyenne de la variable  $u_2$  sur une période de découpage, c'est-à-dire le rapport cyclique  $\alpha_2$  et la grandeur  $\alpha_3 = 1 - \alpha_2$ . On notera  $\langle I_{sc} \rangle$  valeur moyenne de  $I_{sc}$  sur la période de découpage et  $\langle V_{sc} \rangle$  la valeur moyenne de  $V_{sc}$  sur la période de découpage. On considérera que  $V_{bus}$  est toujours constant et égal à sa valeur nominale soit 750 v. Exprimez alors le modèle moyen du convertisseur sous la forme d'une équation d'état.  $\dot{\underline{x}} = \underline{A}_2 \underline{x} + \underline{B}_2 \alpha_3$  avec  $\underline{x}^T = [\langle I_{sc} \rangle \quad \langle V_{sc} \rangle]$  et  $\underline{y} = [1 \quad 0] \underline{x}$

3.34 : Comparez les matrices  $\underline{A}_2$ ,  $\underline{B}_2$  et  $\underline{A}_1$ ,  $\underline{B}_1$  et commentez le résultat.

3.35: Dans le but d'imposer un courant  $I_{scref}$  dans la BSC à l'aide d'un régulateur unique délivrant  $\alpha_1$ , on met en place une logique de commande représentée dans le document réponse. Définissez la variable c3 et indiquez les relations à satisfaire entre c1, c2 et c3.

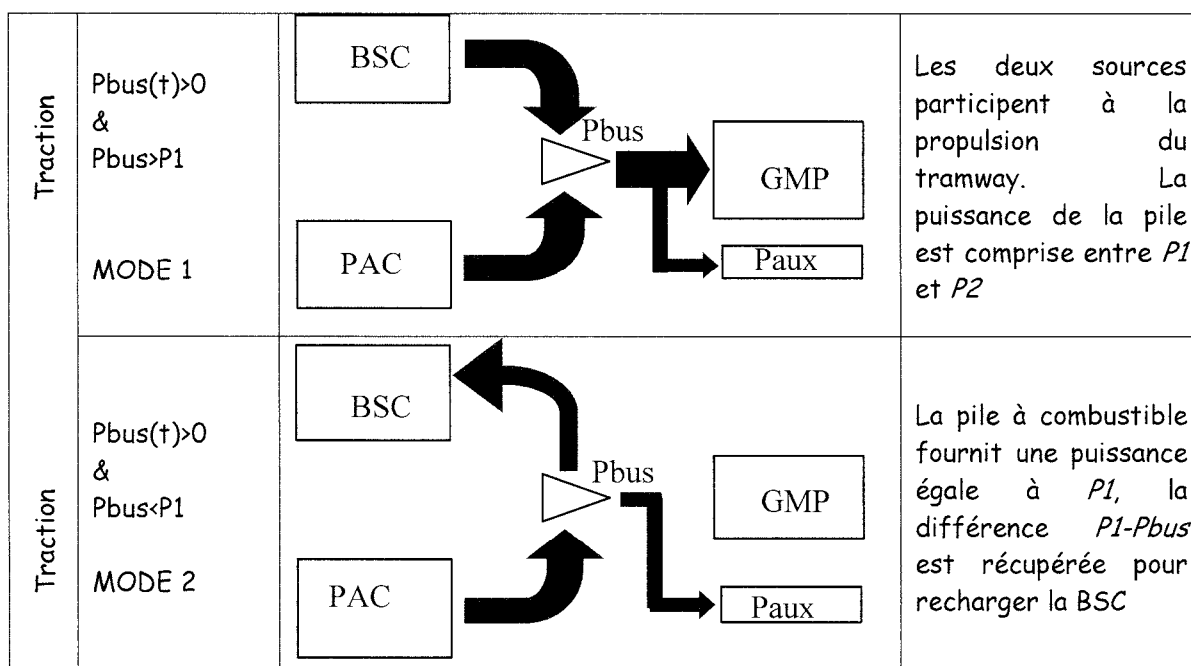
3.36 : Quelle précaution doit-on prendre pour générer c3 en fonction de  $I_{scref}$  ?

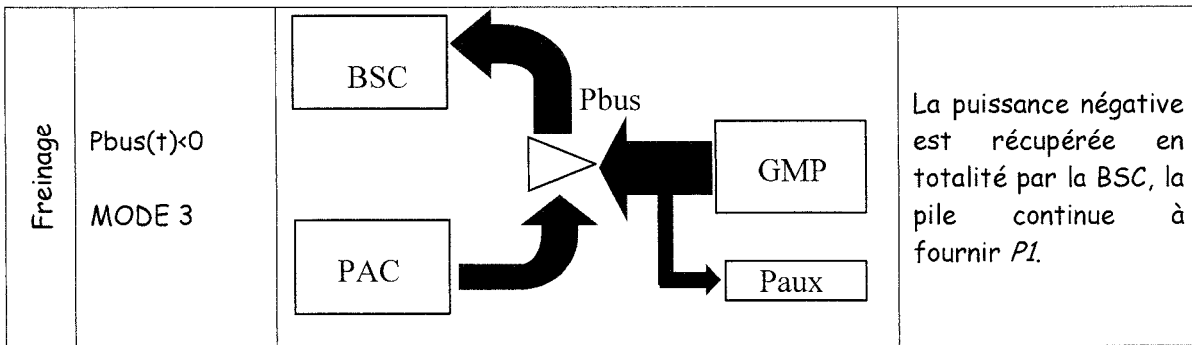
## Partie 4 : Gestion de l'énergie

L'idée directrice de la stratégie de pilotage consiste en la récupération intégrale de l'énergie de freinage du tramway. Le système de stockage d'énergie (BSC) est donc dimensionné en énergie par rapport à l'énergie de freinage maximale à récupérer qui dépend fortement du parcours mais qui est connue à l'avance, puisque le tramway évolue en site propre. A cet effet le parcours à accomplir est découpé en tronçons pour lesquels on peut définir la puissance nécessaire  $P_{des}$  ( $> 0$  ou  $< 0$ ). Pour une requête de puissance sur le bus  $P_{bus}$ , image de la puissance demandée par le GMP c'est-à-dire  $P_{des}$  à laquelle il faut ajouter la puissance des auxiliaires  $P_{aux}$  (compresseur d'air, ...), il faut établir la répartition des puissances pour le système PAC et pour le système de stockage BSC. Pour le système PAC on fixe une puissance de référence minimale  $P1$  correspondant à la puissance moyenne des auxiliaires  $P_{aux}$  et une puissance de référence maximale  $P2$  correspondant aux possibilités de la pile à l'instant donné. Le complément de puissance sera fourni ou absorbé par le BSC. Il est à noter que  $P2$  peut varier sur le parcours, mais sa valeur est connue pour chaque tronçon.

L'état de charge de la BSC est surveillée en permanence de telle sorte qu'à chaque instant une information binaire est disponible indiquant si la BSC est chargée (Energie stockée  $> 4/5$  de l'énergie max) alors la variable  $SOC=1$  ou si la BSC est déchargée (Energie stockée  $< 1/5$  de l'énergie max) soit  $SOC=0$ . Par ailleurs la connaissance du parcours et donc du profil des tronçons à venir, permet de générer une variable  $SOF$  prenant 3 états (-1 ; 0 ; 1). Lorsque  $SOF$  vaut -1 il convient de charger la BSC dès que possible, lorsque  $SOF$  vaut 1 il faut décharger la BSC le plus rapidement possible et enfin lorsque  $SOF$  vaut 0 il n'y a pas d'urgence relative à BSC. Cette dernière éventualité impose de ne pas procéder à des transferts d'énergie pour éviter les pertes. Cette variable est pertinente si l'on souhaite favoriser la récupération maximale de l'énergie. Bien entendu le tramway est équipé d'un dispositif de freinage traditionnel, par dissipation rhéostatique qui n'est pas représenté et qui demeure obligatoire pour ce type de transport.

Les différents modes de transfert de l'énergie sont décrits sur la figure ci-dessous :





Modes de traction et de freinage électrique du tramway hybride.

On considérera dans cette partie que la tension  $V_{bus}$  est parfaitement régulée et constante donc  $V_{bus} = 750V$ . On considère aussi que le convertisseur  $CS1$  possède un rendement constant dans la zone de fonctionnement utilisée et vaut  $\eta_1 = 0.96$ . De même le convertisseur  $CS2$  possède un rendement identique en mode D et en mode S ( $\eta = 0.95$ ).

4.1 Exprimez une relation entre  $I_{bus}$ ,  $I_{pac}$  et  $I_{bsc}$ .

4.2 Exprimez  $I_{bus}$  en fonction de  $P_{des}$ .

4.3 Exprimez  $I_{sc}$  en fonction de  $V_{bus}$ ,  $V_{sc}$  et  $I_{bsc}$ , pour chacun des deux modes du  $CS2$ .

4.4 Pour le mode 2, exprimez la référence de la boucle de courant  $I_{Lref}$  et la référence de la boucle de courant  $I_{scref}$  en fonction de  $P_{bus}$  et des autres paramètres ( $P1$ ,  $U_{sta}$  et  $V_{sc}$ ,  $\eta_1$  et  $\eta$ ).

4.5 Pour le mode 1, et dans le cas où  $P_{bus} > P2$  exprimez les références  $I_{Lref}$  et  $I_{scref}$  en fonction de  $P_{bus}$  et des autres paramètres ( $P1$ ,  $U_{sta}$  et  $V_{sc}$ ,  $\eta_1$  et  $\eta$ ).

4.6 Quel phénomène futur traduit la valeur -1 pour SOF ?

4.7 Quel phénomène futur traduit la valeur 1 pour SOF ?

4.8 Quel phénomène futur traduit la valeur 0 pour SOF ?

4.9 Pour le mode 1 et dans le cas où  $P_{bus} < P2$  et  $SOF=1$ , exprimez les références  $I_{Lref}$  et  $I_{scref}$  en fonction de  $P_{bus}$  et des autres paramètres ( $P2$ ,  $P1$ ,  $SOC$ ,  $U_{sta}$ ,  $V_{sc}$ ,  $\eta_1$  et  $\eta$ ).

4.10 Pour le mode 1 et dans le cas où  $P_{bus} < P2$  et  $SOF=-1$ , exprimez les références  $I_{Lref}$  et  $I_{scref}$  en fonction de  $P_{bus}$  et des autres paramètres ( $P2$ ,  $P1$ ,  $SOC$ ,  $U_{sta}$ ,  $V_{sc}$ ,  $\eta_1$  et  $\eta$ ).

4.11 Pour le mode 1 et dans le cas où  $P_{bus} < P2$  et  $SOF=0$ , exprimez les références  $I_{Lref}$  et  $I_{scref}$  en fonction de  $P_{bus}$  et des autres paramètres ( $P2$ ,  $P1$ ,  $SOC$ ,  $U_{sta}$ ,  $V_{sc}$ ,  $\eta_1$  et  $\eta$ ).

4.12 Pour le mode 3, exprimez les références  $I_{Lref}$  et  $I_{scref}$  en fonction de  $P_{bus}$  et des autres paramètres ( $P2$ ,  $P1$ ,  $SOC$ ,  $U_{sta}$ ,  $V_{sc}$ ,  $\eta_1$  et  $\eta$ ).

4.13 Etablir un algorithme de traitement général ( $P_{bus} < P2$ ) pour un tronçon donné. Pour cela compléter le document réponse ci-joint.

On considère maintenant que  $P_{bus} > P2$ , ce type de demande ne peut pas être satisfaite dans tous les cas de figure et le fonctionnement peut être dégradé en limitant la fourniture de puissance requise. Ce phénomène sera repéré par une variable MD. MD prendra la valeur 1 s'il y a des risques de dégradation des performances.

4.14 Pour  $P_{bus} > P2$  et  $SOF=1$ , exprimez les références  $I_{Lref}$ ,  $I_{scref}$  et MD, en fonction de  $P_{bus}$ , et des autres paramètres ( $P2$ ,  $SOC$ ,  $U_{sta}$ ,  $V_{sc}$ ,  $\eta_1$  et  $\eta$ ).

4.15 Pour  $P_{bus} > P_2$  et  $SOF=-1$ , exprimez les références  $I_{Lref}$ ,  $I_{scref}$  et MD, en fonction de  $P_{bus}$  et des autres paramètres ( $P_2$ , SOC,  $U_{sta}$ ,  $V_{sc}$ ,  $\eta_t$  et  $\eta$ ).

4.16 Pour  $P_{bus} > P_2$  et  $SOF=0$ , exprimez les références  $I_{Lref}$ ,  $I_{scref}$  et MD, en fonction de  $P_{bus}$  et des autres paramètres ( $P_2$ , SOC,  $U_{sta}$ ,  $V_{sc}$ ,  $\eta_t$  et  $\eta$ ).

4.17 Pour améliorer la gestion de l'énergie quelle information serait-il utile d'avoir ? Proposez une solution d'exploitation de cette grandeur.

**MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE**

Académie : \_\_\_\_\_ Session : \_\_\_\_\_

Concours : \_\_\_\_\_

Spécialité/option : \_\_\_\_\_ Repère de l'épreuve : \_\_\_\_\_

Intitulé de l'épreuve : \_\_\_\_\_

NOM : \_\_\_\_\_

(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)

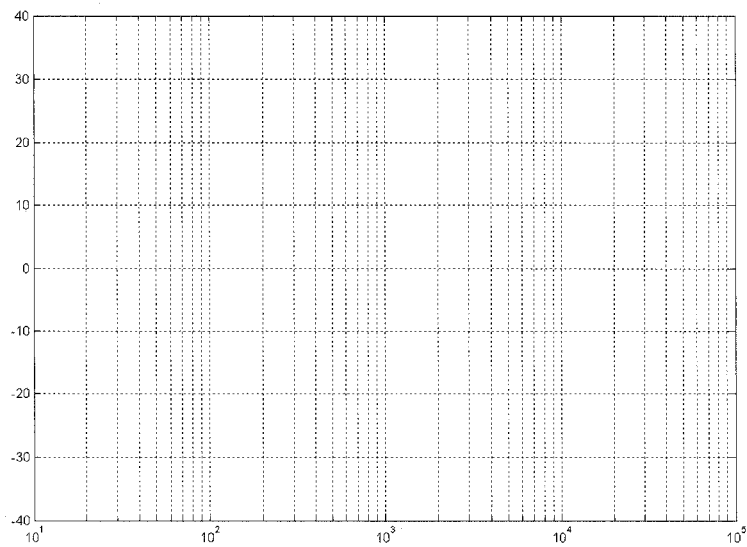
Prénoms : \_\_\_\_\_ N° du candidat

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

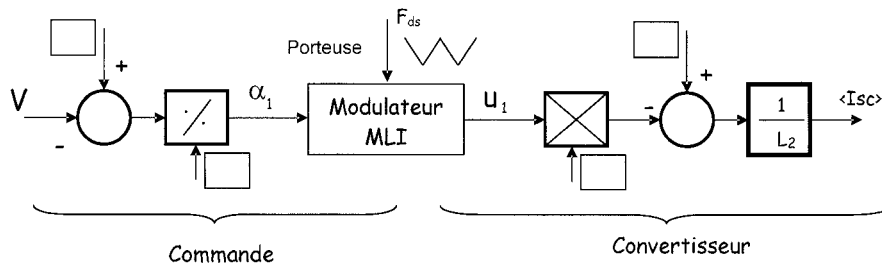
AE1-6

DOCUMENT REPONSE

Question 2.10



Question 3.22



**MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE**

Académie : \_\_\_\_\_ Session : \_\_\_\_\_

Concours : \_\_\_\_\_

Spécialité/option : \_\_\_\_\_ Repère de l'épreuve : \_\_\_\_\_

Intitulé de l'épreuve : \_\_\_\_\_

NOM : \_\_\_\_\_

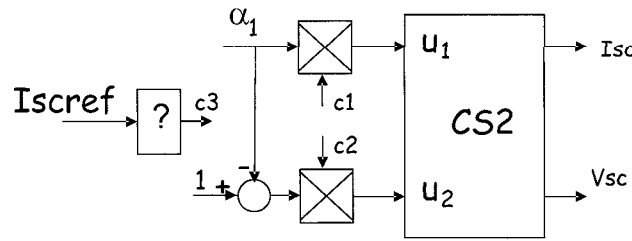
(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénoms : \_\_\_\_\_ N° du candidat  

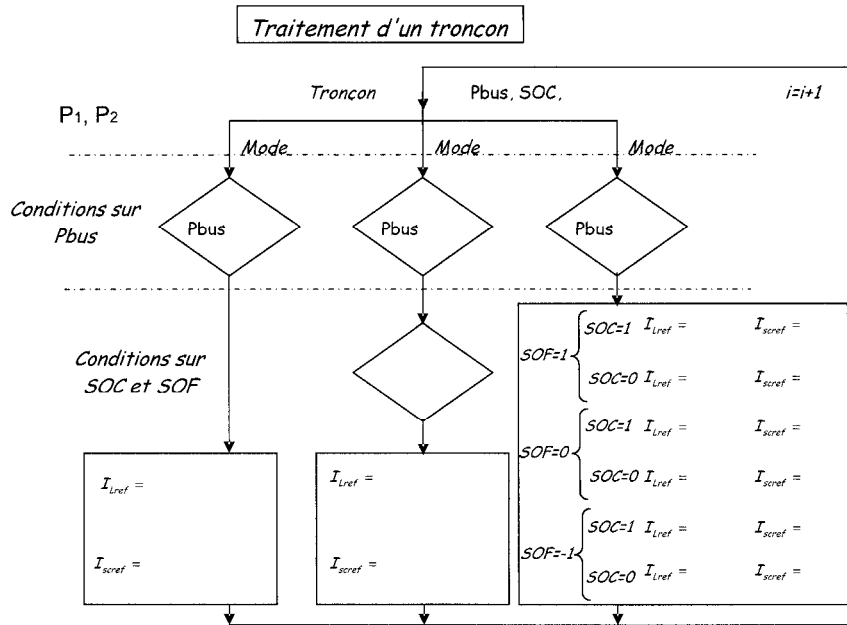
(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

AE1-6

Question 3.35



Question 4.13





## ANNEXE

**TRANSFORMEE de LAPLACE et TRANSFORMEE en Z**

Pierre-Simon Laplace, mathématicien français (1749-1827). Laplace entra à l'université de Caen à 16 ans. Très vite il s'intéressa aux mathématiques et fut remarqué par d'Alembert. En analyse, il introduisit la fonction potentielle et les *coefficients de Laplace*. Il travailla également beaucoup sur les équations aux différences et sur les équations différentielles. Contrairement aux apparences, l'utilisation de la *transformée de Laplace* pour la résolution d'équations différentielles n'est pas due à Laplace, mais à Heaviside

Soit  $f(t)$  une fonction du temps, sa transformée de Laplace  $F(p)$  est définie par :

$$F(p) = L(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-p.t} .dt$$

De même on peut définir la transformée de Laplace inverse donnant l'image  $f(t)$  de  $F(p)$  par :

$$L^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2\pi.j} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(p).e^{p.t} .dp$$

Pour une fonction discrète  $f(kT)$ , sa transformée en  $z$   $F(z)$  est définie par :

$$F(z) = Z(f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k.T).z^{-k}$$

Table des principales transformées

$f(t)$	$F(p)$	$F(z)$
1	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$a.t$	$\frac{a}{p^2}$	$\frac{a.T.z}{(z-1)^2}$
$b.e^{-a.t}$	$\frac{b}{p+a}$	$\frac{b.z}{z-e^{-a.T}}$
$\frac{c}{b-a} \cdot (e^{-a.t} - e^{-b.t})$	$\frac{c}{(p+a).(p+b)}$	$\frac{c}{b-a} \cdot \left( \frac{z}{z-e^{-a.T}} - \frac{z}{z-e^{-b.T}} \right)$
$\frac{1}{a-b} \cdot (a.c.e^{-a.t} - b.c.e^{-b.t})$	$\frac{p.c}{(p+a).(p+b)}$	$\frac{1}{a-b} \cdot \left( \frac{a.c.z}{z-e^{-a.T}} - \frac{b.c.z}{z-e^{-b.T}} \right)$
$\frac{1}{a-b} \cdot ((c-a).e^{-a.t} - (c-b).e^{-b.t})$	$\frac{p+c}{(p+a).(p+b)}$	$\frac{1}{a-b} \cdot \left( \frac{(c-a).z}{z-e^{-a.T}} - \frac{(c-b).z}{z-e^{-b.T}} \right)$