

Composition d'automatique et d'informatique industrielle

CORRECTION

PARTIE 1 Modélisation d'un gyromètre mécanique vibrant

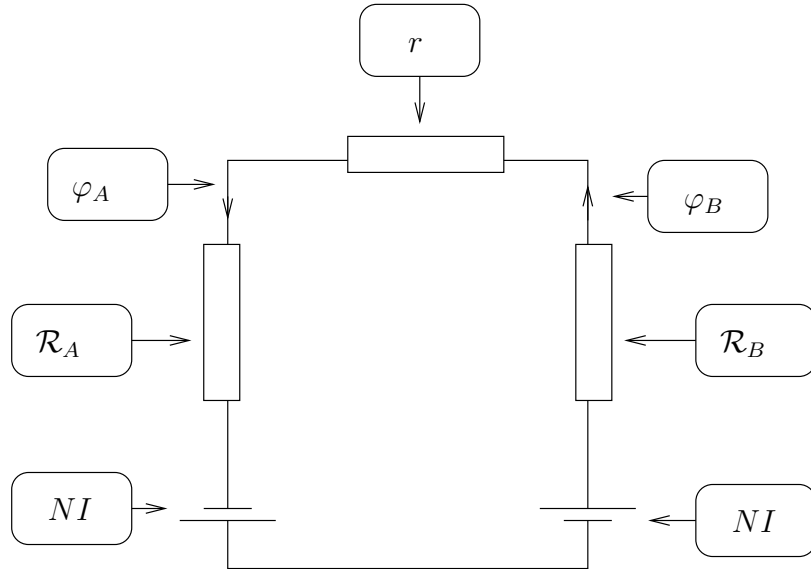
1.1 Bobinage de polarisation

1.1.1. $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$, l'intégrale se calcule sur un contour fermé.

1.1.2. $U_{mm} = \mathcal{R} \cdot \varphi$.

1.1.3. $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$,
 $\int_{e_A} H_e dl + \int_{e_B} H_e dl + \int_{cyl} H_{cyl} dl = 2NI$,
 $H_e \cdot e_A + H_e \cdot e_B + H_{cyl} \cdot \frac{\pi D}{8} = 2NI$,
 $\frac{B}{\mu_0} \cdot e_A + \frac{B}{\mu_0} \cdot e_B + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{\pi D}{8} = 2NI$,
 $\varphi_A = \frac{BS}{2}$, $\varphi_B = \frac{BS}{2}$, $\varphi_C = BS$,
donc $\mathcal{R}_A \cdot \varphi_A + \mathcal{R}_B \cdot \varphi_B + r \cdot \varphi_C = 2NI$,
d'où $\mathcal{R}_A = \frac{2e_A}{\mu_0 S}$, $\mathcal{R}_B = \frac{2e_B}{\mu_0 S}$ et $r = \frac{\pi D}{8S\mu_0 \mu_r}$. ($e_A = e_B = e$)

1.1.4.



1.1.5. $\varphi_A = \varphi_B$,
donc à partir de la relation précédente, $\varphi_A = \frac{2NI \cdot \mu_0 S}{4e + \mu_0 S r}$.

1.1.6. $\phi_A = 2\varphi_A = \frac{4NI \cdot \mu_0 S}{4e + \mu_0 S r}$.

1.1.7. $\phi_B = \phi_C = \phi_D = \phi_E = \phi_F = \phi_G = \phi_H = \phi_A$.

1.1.8. $B_{pol} = \frac{\phi_A}{S} = \frac{4NI \cdot \mu_0}{4e + \mu_0 S r} = \frac{\mu_0 NI}{e} \cdot \frac{1}{1 + \frac{r}{4\mathcal{R}_0}}$

1.2 Bobinages d'excitation et de détection

1. 2. 1.

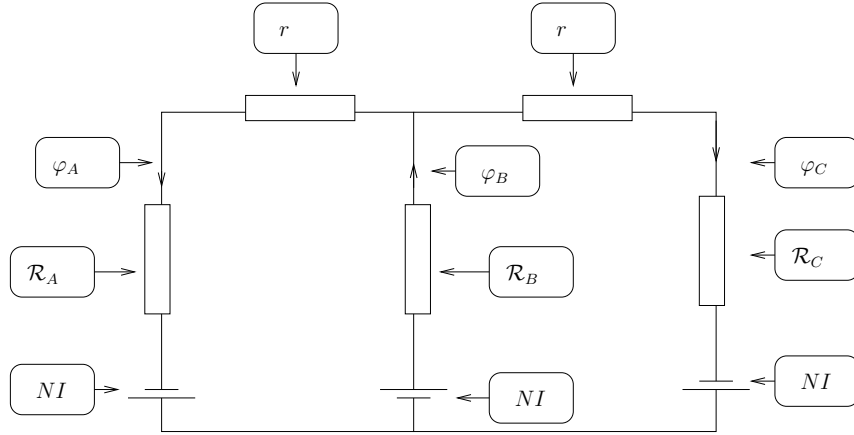
$$\mathcal{R}_A = \frac{e(1+\frac{v_1(t)}{e})}{\mu_0 \frac{S}{2}},$$

$$\mathcal{R}_C = \frac{e(1-\frac{v_1(t)}{e})}{\mu_0 \frac{S}{2}},$$

$$\mathcal{R}_B = \mathcal{R}_0 = \frac{e}{\mu_0 S},$$

$$r = \frac{\pi D}{8S\mu_0\mu r}.$$

1. 2. 2.



1. 2. 3.

A partir du schéma précédent :

$$2NI = \mathcal{R}_B \cdot \varphi_B + (\mathcal{R}_A + r)\varphi_A,$$

$$2NI = \mathcal{R}_B \cdot \varphi_B + (\mathcal{R}_C + r)\varphi_C,$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_C.$$

Donc $\varphi_A = \frac{2NI}{\mathcal{R}_A + r + \mathcal{R}_B \cdot (1 + \frac{\mathcal{R}_A + r}{\mathcal{R}_C + r})}.$

1. 2. 4.

$$\varphi_A = \frac{NI}{2\mathcal{R}_0} \cdot \frac{(1 - \frac{v_1}{e(1 + \frac{r}{2\mathcal{R}_0})})}{1 + \frac{r}{4\mathcal{R}_0}}.$$

1. 2. 5.

$$\varphi_C = \frac{2NI(\mathcal{R}_A + r)}{\mathcal{R}_C \mathcal{R}_A + \mathcal{R}_C r + r \mathcal{R}_A + r^2 + \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_A + \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_C + 2\mathcal{R}_0 r}.$$

1. 2. 6.

$$\varphi_C = \frac{NI}{2\mathcal{R}_0} \cdot \frac{(1 + \frac{v_1}{e(1 + \frac{r}{2\mathcal{R}_0})})}{1 + \frac{r}{4\mathcal{R}_0}}.$$

1. 2. 7.

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_C$$

1. 2. 8.

$$\varphi_B = \frac{NI}{\mathcal{R}_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{r}{4\mathcal{R}_0}}.$$

1. 2. 9.

$$\phi_A = 2\varphi_A = \varphi_A = \frac{NI}{\mathcal{R}_0} \cdot \frac{(1 - \frac{v_1}{e(1 + \frac{r}{2\mathcal{R}_0})})}{1 + \frac{r}{4\mathcal{R}_0}},$$

$$\phi_B = \varphi_B,$$

$$\phi_C = 2\varphi_C.$$

$$\mathbf{1.2.10.} \quad U_A = -n_1 \frac{d\phi_A}{dt} = \frac{n_1 NI}{e\mathcal{R}_0(1+\frac{r}{2\mathcal{R}_0})(1+\frac{r}{4\mathcal{R}_0})} \cdot \dot{v}_1(t).$$

$$\mathbf{1.2.11.} \quad U_C = -n_1 \frac{d\phi_C}{dt} = -U_A.$$

$$\mathbf{1.2.12.} \quad U_1 = U_A + U_E - U_C - U_G = \frac{4n_1 NI}{e\mathcal{R}_0(1+\frac{r}{2\mathcal{R}_0})(1+\frac{r}{4\mathcal{R}_0})} \cdot \dot{v}_1(t).$$

$$\mathbf{1.2.13.} \quad \text{Donc } U_1 = G_{det1} \cdot \frac{dv_1 t}{dt} \text{ avec } G_{det1} = \frac{4n_1 NI}{e\mathcal{R}_0(1+\frac{r}{2\mathcal{R}_0})(1+\frac{r}{4\mathcal{R}_0})}.$$

1.2.14.

$$e_A = e_C = e_E = e_G = e$$

$$e_H = e_D = e(1 + \frac{v_2(t)}{e}) \text{ et } e_B = e_F = e(1 - \frac{v_2(t)}{e})$$

$$\mathbf{1.2.15.} \quad \text{De même que pour le bobinage 1 : } G_{det2} = \frac{4n_2 NI}{e\mathcal{R}_0(1+\frac{r}{2\mathcal{R}_0})(1+\frac{r}{4\mathcal{R}_0})}.$$

1.3 Modélisation du cylindre

1.3.1. A partir des relations données :

$$\begin{bmatrix} G_{exc1} \cdot f^2(X_0) & 0 \\ 0 & G_{exc2} \cdot f^2(X_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mag1} \cdot f^2(X_0) & 0 \\ 0 & K_{mag2} \cdot f^2(X_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \\ \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{v}_1(t) \\ \ddot{v}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{M\omega_0}{Q} & 0 \\ 0 & \frac{M\omega_0}{Q} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} M\omega_0^2 & 0 \\ 0 & M\omega_0^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$$

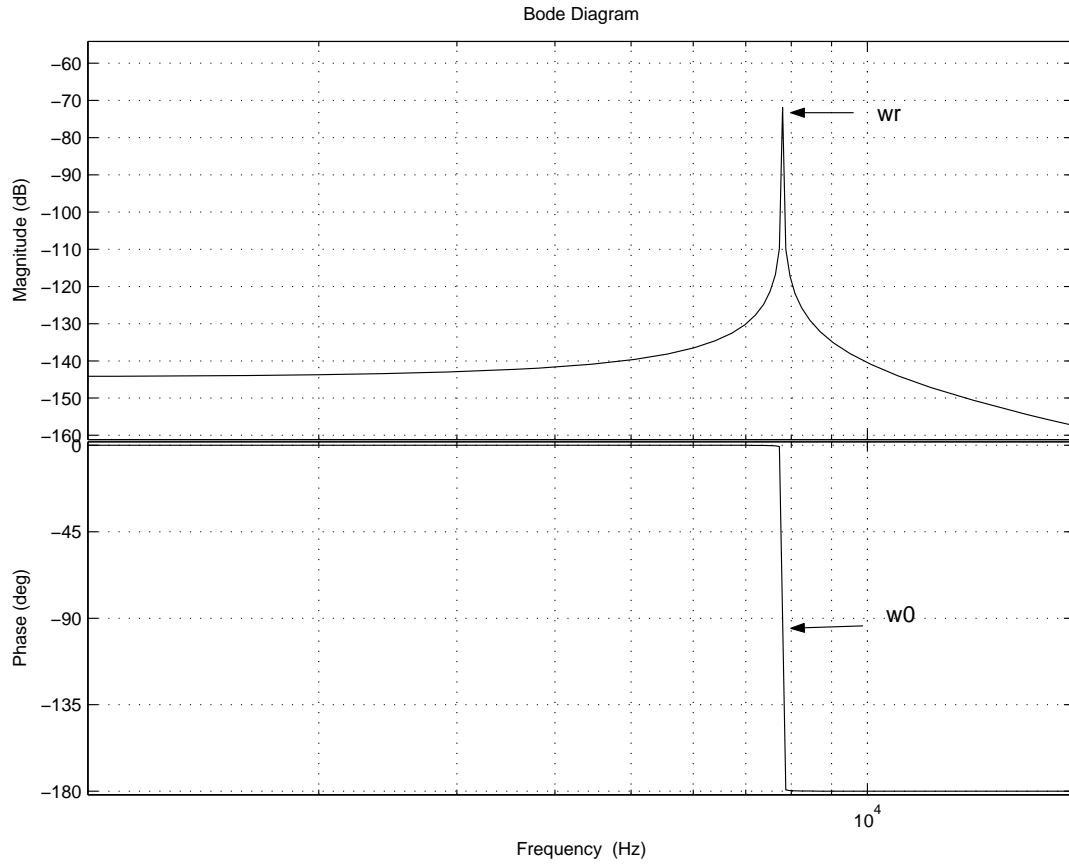
$$G_{exc1} \cdot f^2(X_0) i_1(t) = (M\omega_0^2 - K_{mag1} \cdot f^2(X_0)) v_1(t) + \frac{M\omega_0}{Q} \dot{v}_1(t) + M\ddot{v}_1(t).$$

$$\mathbf{1.3.2.} \quad G_1(p) = \frac{G_{exc1} \cdot f^2(X_0)}{M\omega_0^2 - K_{mag1} \cdot f^2(X_0) + \frac{M\omega_0}{Q} p + Mp^2} = \frac{\frac{G_{exc1} \cdot f^2(X_0)}{M}}{\omega_0^2 - \frac{K_{mag1} \cdot f^2(X_0)}{M} + \frac{\omega_0}{Q} p + p^2}$$

1.3.3.

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

1.3.4.



1. 3. 5.

$$\omega'_r = \omega'_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q'^2}}$$

avec

$$\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{K_{mag1} \cdot f^2(X_0)}{M\omega_0^2}}$$

et

$$Q' = Q \sqrt{1 - \frac{K_{mag1} \cdot f^2(X_0)}{M\omega_0^2}}$$

1.4 Modélisation de l'ensemble Excitation-Cylindre vibrant-Détection

1. 4. 1. A partir des données de la partie précédente :

$$\begin{pmatrix} \ddot{v}_1(t) \\ \ddot{v}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f^2(X_0)}{M} & 0 \\ 0 & \frac{f^2(X_0)}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{mag1}(t) \\ F_{mag2}(t) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\omega_0}{Q} & 0 \\ 0 & \frac{\omega_0}{Q} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2k_c\Omega(t)}{M} \\ \frac{2k_c\Omega(t)}{M} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{x} = A.x + B.u \\ y = C.x + D.u \end{cases}$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & \frac{-\omega_0}{Q} & 0 & \frac{2k_c\Omega(t)}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2k_c\Omega(t)}{M} & -\omega_0^2 & \frac{-\omega_0}{Q} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{f^2(X_0)}{M} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{f^2(X_0)}{M} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & G_{det1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{det2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. 4. 2. A partir des données de la partie précédente :

$$\begin{pmatrix} \ddot{v}_1(t) \\ \ddot{v}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f^2(X_0)}{M} & 0 \\ 0 & \frac{f^2(X_0)}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_{exc1} & 0 \\ 0 & G_{exc2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} + \\ \begin{bmatrix} \frac{f^2(X_0)}{M} & 0 \\ 0 & \frac{f^2(X_0)}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{mag1} & 0 \\ 0 & K_{mag2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} - \\ \begin{bmatrix} \frac{\omega_0}{Q} & 0 \\ 0 & \frac{\omega_0}{Q} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2k_c\Omega(t)}{M} \\ \frac{2k_c\Omega(t)}{M} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{x} = A.x + B.u \\ y = C.x + D.u \end{cases}$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_{mag1}\frac{f^2(X_0)}{M} - \omega_0^2 & \frac{-\omega_0}{Q} & 0 & \frac{2k_c\Omega(t)}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2k_c\Omega(t)}{M} & K_{mag1}\frac{f^2(X_0)}{M} - \omega_0^2 & \frac{-\omega_0}{Q} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{f^2(X_0)}{M}G_{exc1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{f^2(X_0)}{M}G_{exc2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & G_{det1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{det2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. 4. 3.

Le modèle obtenu est non linéaire car un terme non constant, $\Omega(t)$, se trouve dans la matrice d'état A .

1.5 Modélisation du séquençage

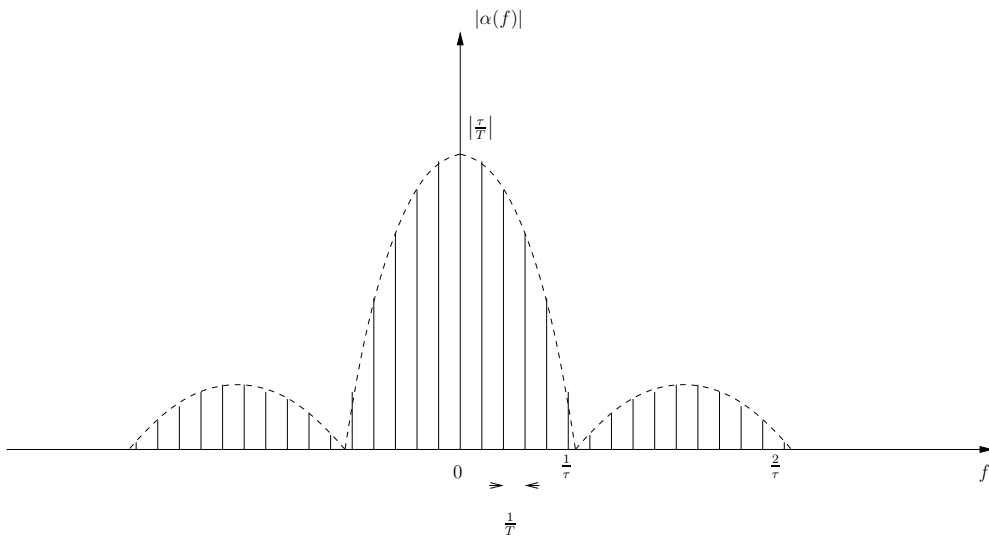
1.5.1.

$$C_n = \frac{\tau}{T} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi n \tau}{T}\right) \cdot e^{\frac{-\pi j n \tau}{T}}$$

1.5.2.

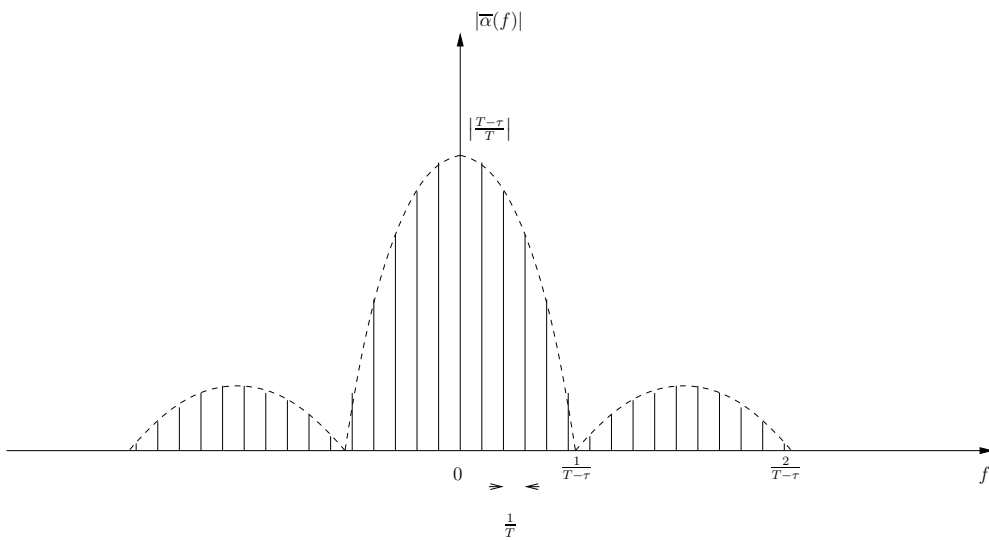
$$\overline{C}_n = \frac{T-\tau}{T} \cdot \text{sinc}\left(\pi n \left(\frac{T-\tau}{T}\right)\right) \cdot e^{-\pi j n \left(\frac{T+\tau}{T}\right)}$$

1.5.3.



Document réponse 1 Spectre d'amplitude de $\alpha(t)$

1.5.4.



Document réponse 2 Spectre d'amplitude de $\overline{\alpha}(t)$

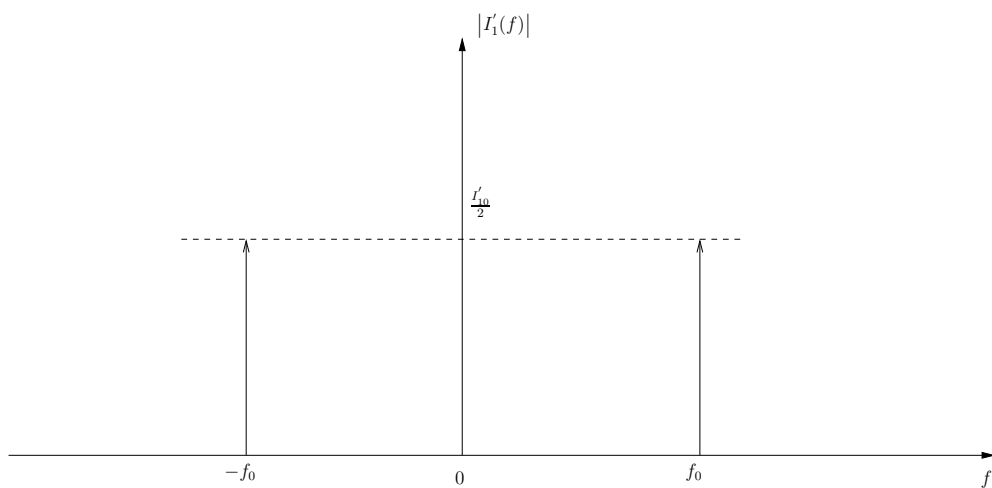
1.5.5. $i_1(t) = \alpha(t) \cdot i_1'(t)$

1.5.6. $I_1(t) = \alpha(f) * I_1'(f)$

1.5.7.

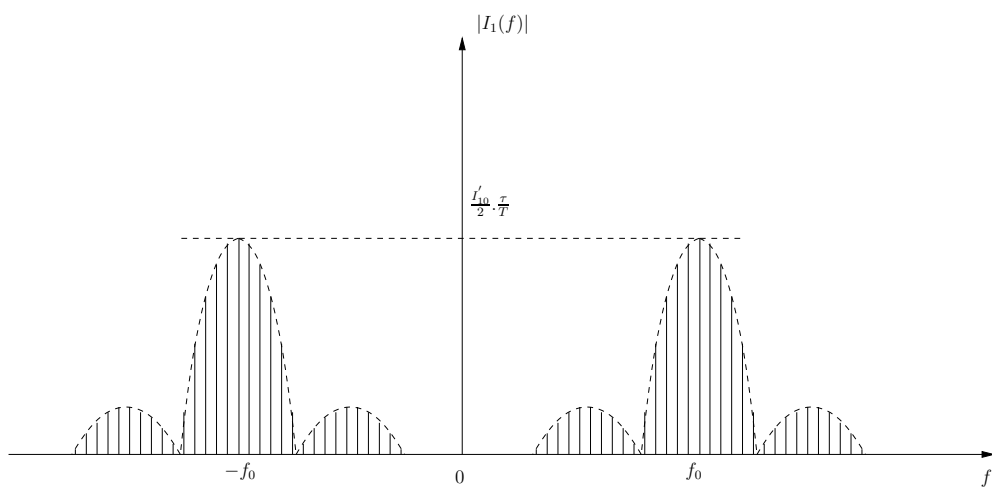
$$I_1'(f) = \frac{I_{10}'}{2j} \cdot \delta(f - f_0) - \frac{I_{10}'}{2j} \cdot \delta(f + f_0)$$

1.5.8.



Document réponse 3 Spectre d'amplitude de $i'_1(t)$

1. 5. 9.



Document réponse 4 Spectre d'amplitude de $i_1(t)$

1. 5. 10.

Le gyromètre étant très résonant, on peut se limiter à la raie à f_0 d'amplitude $\frac{I'_{10}}{2} \frac{\tau}{T}$.

1. 5. 11. Le séquençage introduit un gain supplémentaire $\frac{\tau}{2T}$.

PARTIE 2 Commande du gyromètre

2.1 Propriétés du modèle

2.1.1.

- Adaptée aux systèmes multi entrées - multi sorties ;
- Mieux adaptée qu'une matrice de transfert ;
- Description par des variables internes (vecteur d'état) plutôt qu'une description entrée/sortie.

2.1.2. Pour qu'un système soit commandable, la matrice C doit être de rang 4 (rang du système). Pour $\Omega(t) = 0 \text{ rad.s}^{-1}$:

$$C = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|ccc} B_1 & 0 & A_1 B_1 & 0 & A_1^2 B_1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & B_1 & 0 & A_1 B_1 & 0 & A_1^2 B_1 & \dots & \dots & \dots \end{array} \right]$$

2.1.3.

$$C = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|ccc} b_1 & 0 & -b_1 \frac{A}{M} & 0 & b_1 \left(\frac{A^2}{M^2} - \frac{K}{M} \right) & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & -b_1 \frac{A}{M} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_1 & 0 & -b_1 \frac{A}{M} & 0 & b_1 \left(\frac{A^2}{M^2} - \frac{K}{M} \right) & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & -b_1 \frac{A}{M} & \dots & \dots & \dots \end{array} \right]$$

Avec $b_1 = \frac{G_{excl} K_z^2}{M}$

La cinquième colonne est une combinaison linéaire des colonnes 1 et 3.

La sixième colonne est une combinaison linéaire des colonnes 2 et 4.

et ainsi de suite.

Donc la matrice C est de rang 4. Le système est commandable.

2.1.4. Pour qu'un système soit observable la matrice O doit être de rang 4.

$$O = \left[\begin{array}{cc|cc} C_1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & C_1 & \dots & \dots \\ \hline C_1 A_1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & C_1 A_1 & \dots & \dots \\ \hline C_1 A_1^2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & C_1 A_1^2 & \dots & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \dots & \dots \end{array} \right] \cdot \frac{T - \tau}{T}$$

2.1.5.

Pour $\Omega(t) = 0 \text{ rad.s}^{-1}$,

$$O = \frac{T - \tau}{T} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{A}{M} & \frac{K}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A}{M} & \frac{K}{M} \\ \frac{A^2}{M^2} + \frac{K}{M} & -\frac{AK}{M^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A^2}{M^2} + \frac{K}{M} & -\frac{AK}{M^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot G_{det1}$$

La cinquième ligne est une combinaison linéaire des lignes 1 et 3.

La sixième ligne est une combinaison linéaire des lignes 2 et 4.

Donc le rang de O est 4. Le système est observable.

2.2 Etude de la stabilité du modèle

2.2.1. La matrice de transfert est donnée par : $G(p) = C.(pI - A)^{-1}.B$.

2.2.2.

Pour que le modèle $G(p)$ soit stable il faut que tous les pôles des différents transferts soient à partie réelle strictement négative. Dans notre cas les pôles sont :

$$p_1 = -5,8344 + i49009,18246 \text{ et } p_2 = -5,8344 - i49009,18246$$

Donc le modèle est stable.

2.2.3. Pour que le système soit stable, la matrice A doit avoir toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative.

2.2.4. Pour calculer les valeurs propres d'une matrice, λ_i , nous devons résoudre l'égalité suivante : $\det(A - \lambda I) = 0$.

2.2.5.

La notion de "valeur propre" généralise la notion de pôle aux systèmes multivariables.

2.2.6.

Dans notre cas nous devons résoudre : $\det(A_1 - \lambda I) = 0$.

$$\text{Soit : } \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{A}{M} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

$$\Delta = \left(\frac{A}{M}\right)^2 - 4\frac{K}{M} = -9.6073e + 009$$

2.2.7. La partie réelle des deux valeurs propres est strictement négative, donc le modèle est stable.

2.2.8.

$$\begin{cases} V(x) &= x^T \cdot x \\ \dot{V}(x) &= \frac{dV(x)}{dt} = \dot{x}^T x + x^T \dot{x} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \dot{V}(x) = x^T (A^T + A)x < 0.$$

2.2.9.

$$F = \begin{pmatrix} A_1^T + A_1 & 0 \\ 0 & A_1^T + A_1 \end{pmatrix}$$

2. 2. 10.

Les valeurs propres de F sont celles de $A_1^T + A_1$.

$$A_1^T + A_1 = \begin{pmatrix} -2\frac{A}{M} & 1 - \frac{K}{M} \\ 1 - \frac{K}{M} & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = -2, 40.10^9 \text{ et } \lambda_2 = 2, 40.10^9$$

2. 2. 11.

On ne peut rien dire quant à la stabilité du système. La condition, qui est une condition **suffisante**, n'est pas vérifiée.

2. 2. 12.

$$\dot{V}(x) = x^T(A^T P + P A)x$$

2. 2. 13.

$\det(\lambda I - Q) = 0$, donc :

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 1$.

2. 2. 14. P est une matrice d'ordre 4.

2. 2. 15.

$$F' = A^T P + P A$$

La matrice P possède la structure suivante :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{11} & P_{12} \\ 0 & 0 & P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = 0$$

d'où

$$\begin{bmatrix} -\frac{A}{M} & 1 \\ -\frac{K}{M} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{A}{M} & -\frac{K}{M} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$P_{11} = \frac{M}{K} \cdot \frac{K+M}{2A}$$

$$P_{12} = \frac{M}{2K}$$

$$P_{22} = \frac{K+M}{2A} + \frac{A}{2K}$$

2. 2. 16.

$$P_{11} = 0,0428$$

$$P_{12} = 2,0817 \cdot 10^{-10}$$

$$P_{22} = 1,0287 \cdot 10^8$$

Les valeurs propres de P sont : $\lambda_1 = 0,0428$ et $\lambda_2 = 1,028 \cdot 10^8$.

2. 2. 17. Elles sont toutes positives donc la système est stable.

2. 2. 18.

La condition de stabilité est une condition suffisante. Donc lorsqu'elle n'est pas vérifiée, on ne peut conclure ni à l'instabilité ni à la stabilité. Dans ce cas P permet d'élargir l'utilisation de cette condition afin de prouver la stabilité. P est l'image du "volume" dans lequel les variables d'états évoluent afin de déterminer la stabilité. P permet donc de modifier la forme de ce domaine.

PARTIE 3 Implantation du dispositif de commande dans un composant programmable

3.1 Algorithme de CORDIC

3.1.1.

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & -\mu_i \cdot \delta_i \\ \mu_i \cdot \delta_i & 1 \end{bmatrix}$$

3.1.2.

$$R_i = \cos(\alpha_i) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\mu_i \cdot \tan(\alpha_i) \\ \mu_i \cdot \tan(\alpha_i) & 1 \end{bmatrix}$$

Donc $K_i = (\cos(\alpha_i))^{-1}$ et $\delta_i = \tan(\alpha_i)$.

3.1.3.

$$v_i = \left(\prod_{k=0}^{i-1} C_k \right) \cdot v_0$$

3.1.4.

$$v_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} C_k \right) \cdot \left(\prod_{k=0}^{n-1} R_k \right) \cdot v_0 = (K_{n-1} K_{n-2} \dots K_0) (R_{n-1} R_{n-2} \dots R_0) \cdot v_0$$

3.1.5.

$\delta_i = \tan(\alpha_i)$, donc :

$$\begin{array}{llll} \alpha_0 & = & \arctan(2^{-0}) & = & 45,00^\circ \\ \alpha_1 & = & \arctan(2^{-1}) & = & 26,56^\circ \\ \alpha_2 & = & \arctan(2^{-2}) & = & 14,04^\circ \\ \alpha_3 & = & \arctan(2^{-3}) & = & 7,12^\circ \\ \alpha_4 & = & \arctan(2^{-4}) & = & 3,58^\circ \\ \alpha_5 & = & \arctan(2^{-5}) & = & 1,79^\circ \\ \alpha_6 & = & \arctan(2^{-6}) & = & 0,89^\circ \\ \alpha_7 & = & \arctan(2^{-7}) & = & 0,45^\circ \\ \alpha_8 & = & \arctan(2^{-8}) & = & 0,22^\circ \\ \alpha_9 & = & \arctan(2^{-9}) & = & 0,11^\circ \\ \alpha_{10} & = & \arctan(2^{-10}) & = & 0,06^\circ \end{array}$$

3.1.6. $\alpha = 99,8^\circ$

3.1.7. $K_i = (\cos(\arctan(\delta_i)))^{-1}$

3.1.8.

$$\begin{aligned}
K_0 &= 1,414 \\
K_1 &= 1,117 \\
K_2 &= 1,031 \\
K_3 &= 1,008 \\
K_4 &= 1,002 \\
K_5 &= 1,0005 \\
K_6 &= 1,0001 \\
K_7 &= 1 \\
K_8 &= 1 \\
K_9 &= 1 \\
K_{10} &= 1
\end{aligned}$$

Donc $K = 1,6457$.

3. 1. 9.

$$z_n = z_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \alpha_k$$

3. 1. 10. z_n tend vers 0 lorsque n est très grand.

3. 1. 11.

i	z_i	α_i	μ_i	δ_i	x_i	y_i	angle
0	53	45°	+1	1	1	0	45°
1	8	26,56°	+1	0,5	1	1	71,56°
2	-18,56	14,04°	-1	0,25	0,5	1,5	57,52°
3	-4,53	7,13°	-1	0,125	0,875	1,375	50,5°
4	2,59	3,58°	+1	0,0625	1,047	1,266	53,98°
5	-0,98	1,79°	-1	0,03125	0,9677	1,331	52,19°
6	0,809	0,90°	+1	0,01562	1,0094	1,301	53,08°
7	-0,085	0,45°	-1	0,00781	0,989	1,317	52,64°
8	0,362	0,22°	+1	0,00391	0,999	1,309	52,86°
9	0,138	0,11°	+1	0,00195	0,994	1,313	52,97°
10	0,026	0,06°	+1	0,00098	0,992	1,314	53,03°

3. 1. 12. Le sinus se lit sur la colonne y_i .

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = K \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

3. 1. 13. Donc $\sin(\alpha) = \frac{y_n}{K} = \frac{y_n}{1,6457}$ avec $n = 10$.

3. 1. 14. Oui, colonne x_i . $\cos(\alpha) = \frac{x_n}{K} = \frac{x_n}{1,6457}$ avec $n = 10$.

3. 1. 15. L'erreur est de : $0,79887082 - 0,79863551 = 0,00023531$.

3. 1. 16. $2^{-n} < 0.00023531$ avec n le nombre de bits. On trouve $n = 13$

3. 1. 17. Pour un quart de période l'encombrement est de : $2^{12} = 4096$ registres de 13 bits. Soit un encombrement total de $4096 * 13 = 53\,248$ bits.

3. 1. 18. Oui, la mémoire RAM disponible est de $56kbits$.

3. 1. 19.

N'utilise pas les ressources RAM du composant. Pas de multiplication autre que par 2^i . Méthode itérative.

3.2 Boucle à verrouillage de phase

3.2.1 Comparateur de phase

Comparateur à multiplieur

$$\mathbf{3. 2. 1. 1.} \quad v_e(t).v_s(t) = \frac{V_e V_s}{2} \{ \cos(\phi_e(t) - \phi_s(t)) - \cos(\phi_e(t) + \phi_s(t)) \}$$

3. 2. 1. 2.

$$\phi_e(t) = 2\pi f_e t + \varphi_e,$$

$$\phi_s(t) = 2\pi f_s t + \varphi_s.$$

Donc

$$v_e(t).v_s(t) = \frac{V_e V_s}{2} \{ \cos(2\pi(f_e - f_s)t + \varphi_e - \varphi_s) - \cos(2\pi(f_e + f_s)t + \varphi_e + \varphi_s) \}$$

$f_e - f_s$ très faible ;

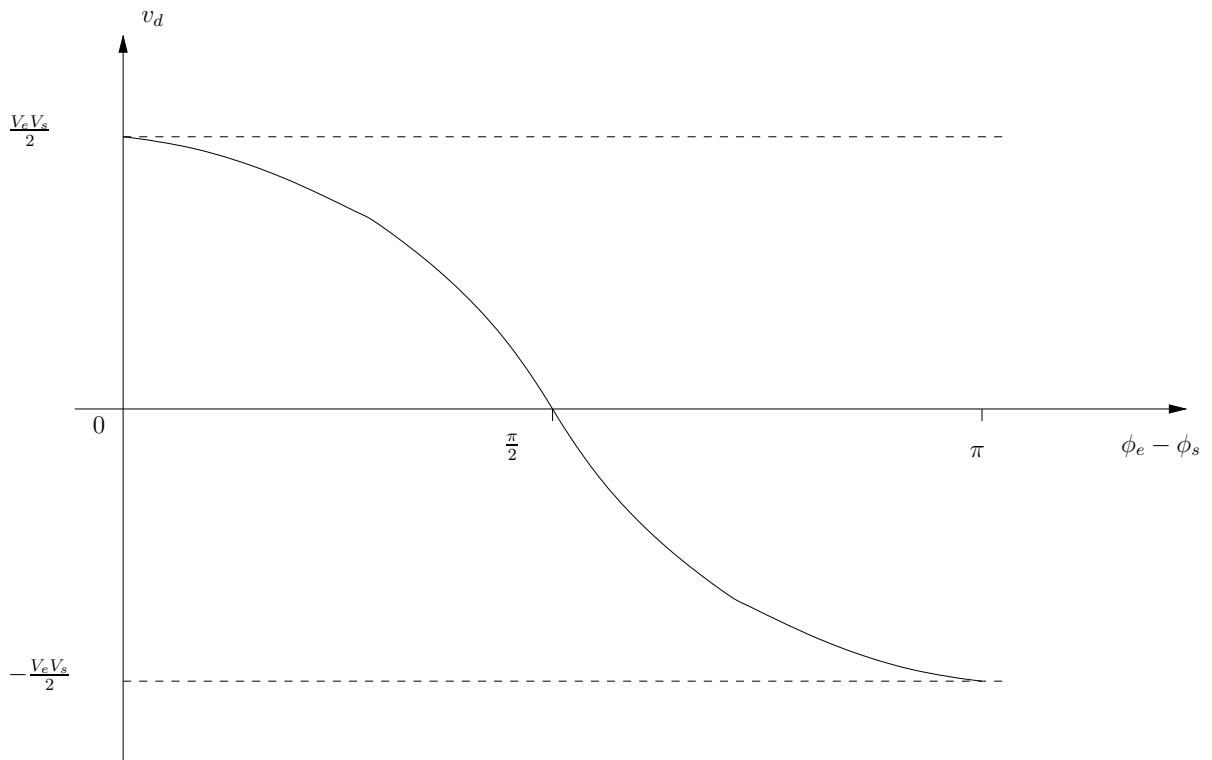
$f_e + f_s$ importante.

3. 2. 1. 3.

Il faut éliminer le second terme, $f_e + f_s$, par filtrage passe-bas.

$$\mathbf{3. 2. 1. 4.} \quad v_d(t) = \frac{V_e V_s}{2} \{ \cos(2\pi(f_e - f_s)t + \varphi_e - \varphi_s) \} = \frac{V_e V_s}{2} \{ \cos(\phi_e(t) - \phi_s(t)) \}$$

3. 2. 1. 5.



3. 2. 1. 6. Fonctionnement autour de $\phi_e(t) - \phi_s(t) = \frac{\pi}{2}$.

3. 2. 1. 7.

$K_d \cong \frac{V_s \cdot V_e}{2}$ au premier ordre. (attention au signe !)

3. 2. 1. 8.

Un multiplieur et un filtre passe-bas.

Comparateur : algorithme de CORDIC

3. 2. 1. 9.

Pour réaliser le comparateur de phase :

$$\begin{cases} x_0 &= V_e \cdot \sin(\phi_e(t)) \\ y_0 &= 0 \\ z_0 &= \phi_s(t) \end{cases}$$

3. 2. 1. 10.

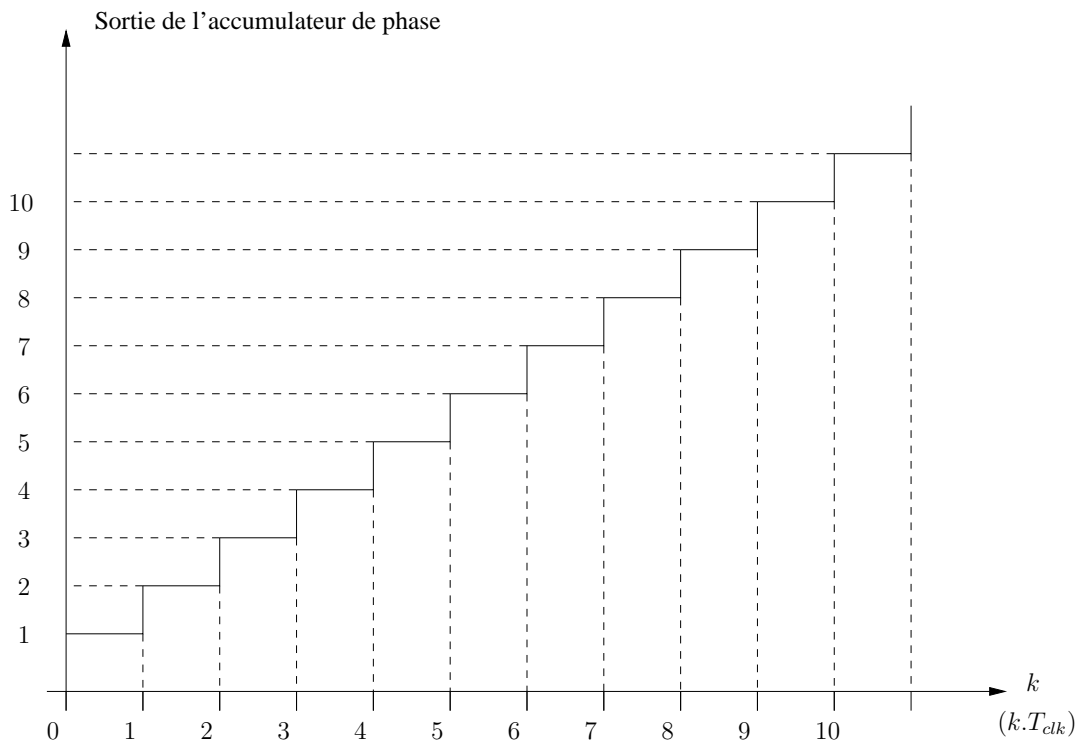
$$y_n = K \cdot V_e \cdot \sin(\phi_e(t)) \cdot \sin(\phi_s(t))$$

$$\text{Donc } K_d = \frac{K \cdot V_e}{2}$$

3.2.2 Oscillateur commandé

3. 2. 2. 1. $Z = e^{pT_{clk}}$.

3. 2. 2. 2.



3. 2. 2. 3.

La valeur maximale de sortie de l'accumulateur est $2^{n_a} - 1$ (n_a bits).

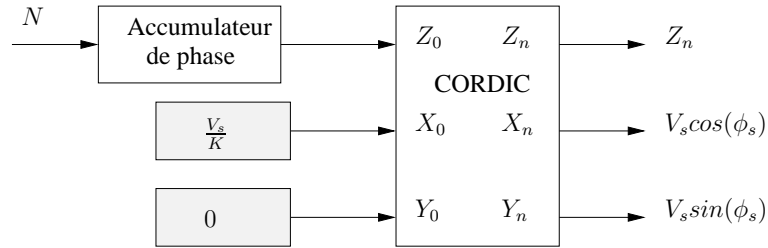
3. 2. 2. 4.

$$f_{sa} = \frac{F_{clk}}{2^{n_a}} \cdot N.$$

3. 2. 2. 5.

$$\phi(t) = 2\pi f_{sa} t.$$

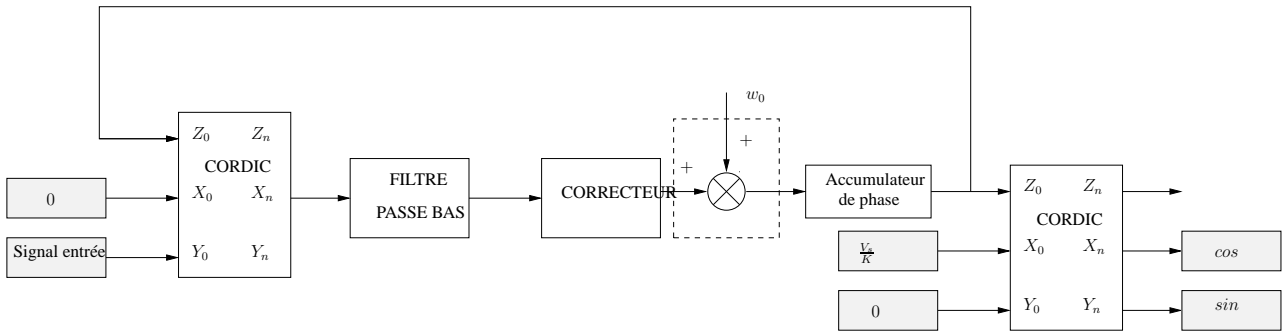
3. 2. 2. 6.



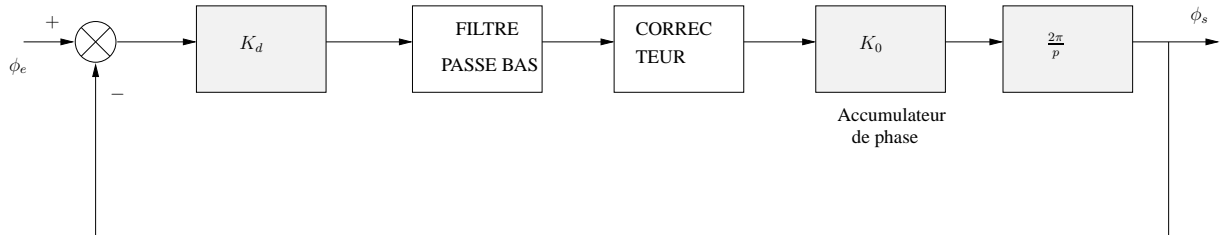
3. 2. 2. 7.

$$K_0 = \frac{f_{sa}}{N} = \frac{F_{clk}}{2^{n_a}}.$$

3. 2. 2. 8.



3. 2. 2. 9.



3. 2. 2. 10.

Pour avoir une erreur de phase et de fréquence nulle, il faut deux intégrateurs dans la chaîne directe. Donc le correcteur doit posséder un intégrateur soit un correcteur PI.