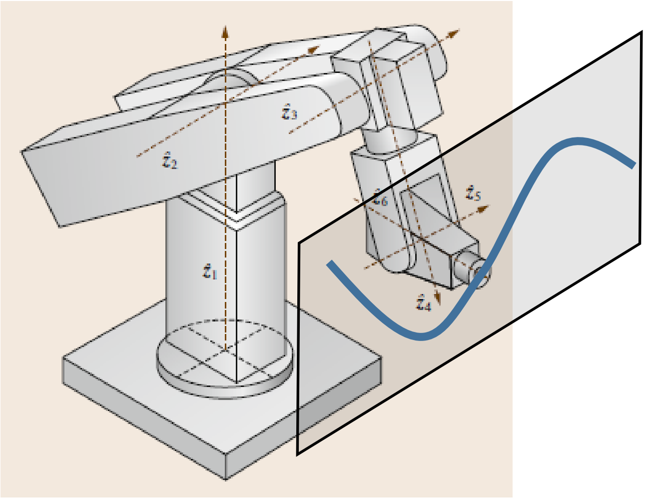
Modélisation et commande des robots manipulateurs et des robots à pattes

9- Manipulateur 6 axes

Charles Pontonnier

Problématique

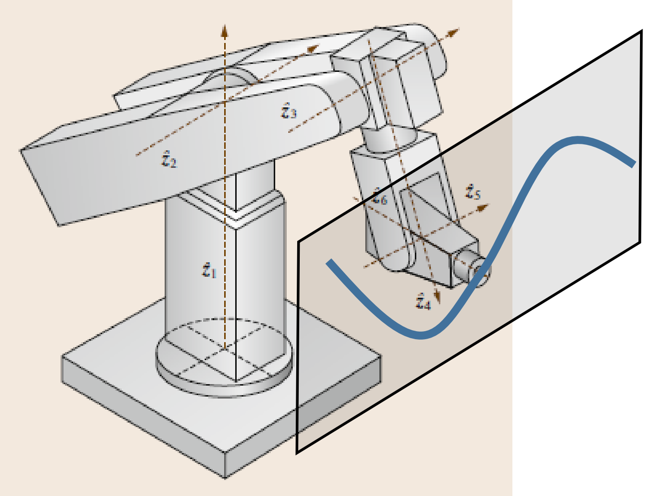


Springer Handbook of robotics

Suivi de trajectoire (robot soudeur ?)

A tout instant, $${}^{0}T_6 = U_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & {}^{0}p_{6_x} \\ 1 & 0 & 0 & {}^{0}p_{6_y} \\ 0 & 1 & 0 & {}^{0}p_{6_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MGD



Springer Handbook of robotics

Rappel: ${}^{0}T_6 = {}^{0}T_1 \; {}^{1}T_2 \; {}^{2}T_3 \; {}^{3}T_4 \; {}^{4}T_5 \; {}^{5}T_6$

Forme générale de ${}^{0}T_6 = U_0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & {}^{0}p_{6_x} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & {}^{0}p_{6_y} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & {}^{0}p_{6_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ET on a un poignet spéhrique, ce qui veut dire que l'on peut dissocier position et orientation du robot.

Pause: cosinus directeurs

A partir de la matrice de rotation d'un solide dans l'espace:

$$^{0}R_i = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

→ Les éléments de $^{0}R_i$ sont **les cosinus directeurs**, représentant les coordonnées des trois vecteurs de la base i dans 0

→ Les colonnes de $^{0}R_i$ sont orthogonales entre elles et par conséquent la conséquence de deux colonnes suffit à définir l'orientation !

$$^{0}R_i = \begin{bmatrix} r_{11} & * & r_{13} \\ r_{21} & * & r_{23} \\ r_{31} & * & r_{33} \end{bmatrix}$$

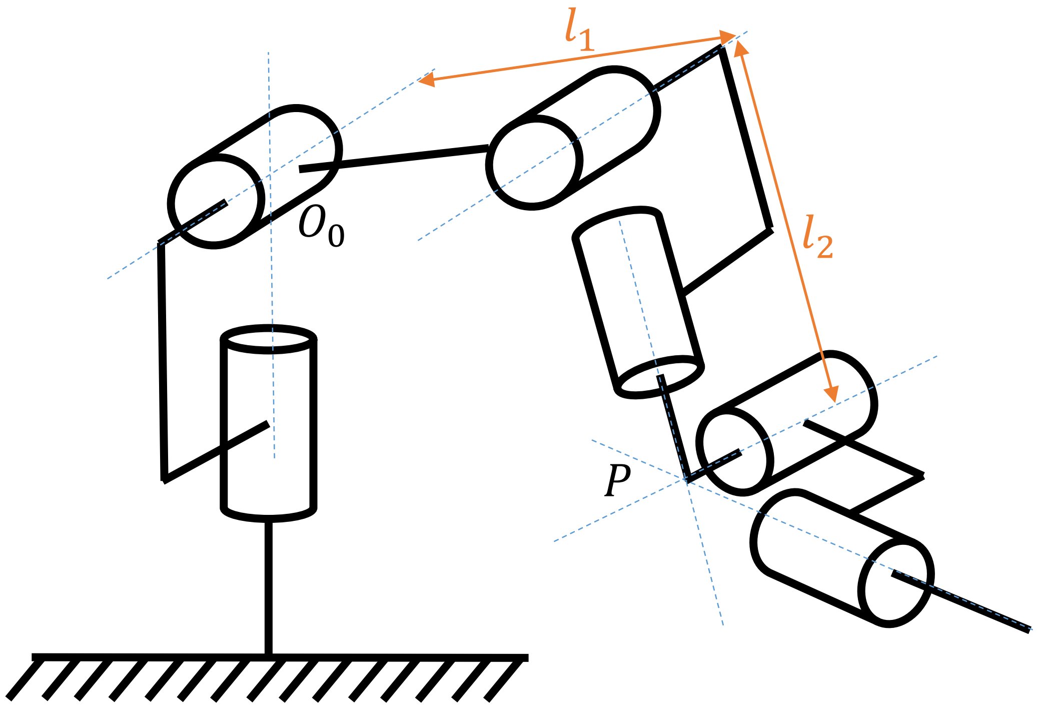
→ Les 6 paramètres restants constituent les **cosinus directeurs incomplets**

→ Ils sont liés entre eux par 3 relations

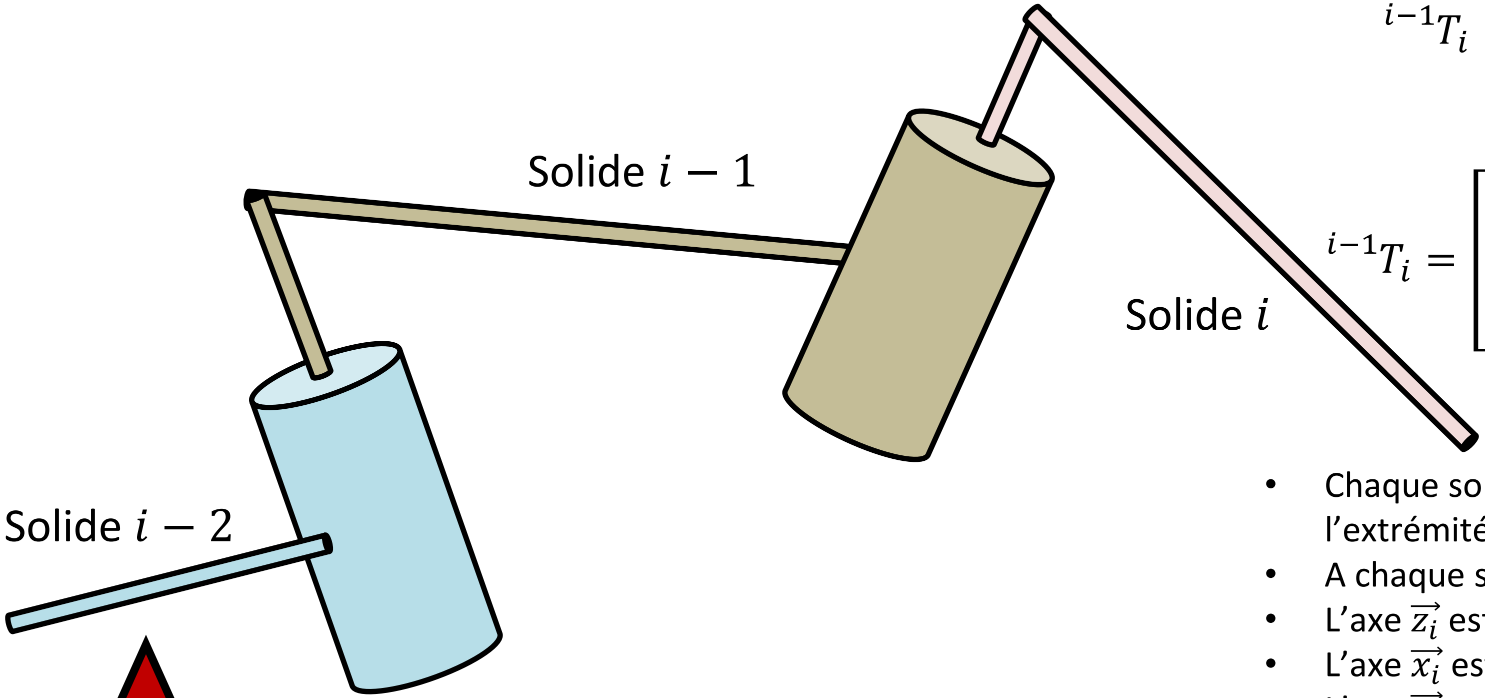
$$\begin{aligned} r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} &= 0 \\ r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 &= 0 \\ r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 &= 0 \end{aligned}$$

→ 3 paramètres suffisent pour définir l'orientation du solide !

Schéma cinématique minimal



Khalil Kleinfinger (DH modifié)



$$^{i-1}T_i = rot(\overrightarrow{x_{i-1}}, \alpha_i).trans(\overrightarrow{x_{i-1}}, d_i).rot(\overrightarrow{z_i}, \theta_i).trans(\overrightarrow{z_i}, r_i)$$

$$^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & d_i \\ \cos(\alpha_i)\sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i)\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) & -r_i\sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i)\sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i)\cos(\theta_i) & \cos(\alpha_i) & r_i\cos(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Chaque solide de la chaine porte un numéro $i = 1 \ldots N$ (de la base vers l'extrémité de la chaine)
- A chaque solide S_i est associé un repère orthonormé direct R_i
- L'axe $\overrightarrow{z_i}$ est porté par l'axe de la liaison entre S_{i-1} et S_i
- L'axe $\overrightarrow{x_i}$ est choisi tel que $\overrightarrow{x_i} = \overrightarrow{z_i} \wedge \overrightarrow{z_{i+1}}$
- L'axe $\overrightarrow{y_i}$ complète le trièdre direct tel que $\overrightarrow{y_i} = \overrightarrow{z_i} \wedge \overrightarrow{x_i}$

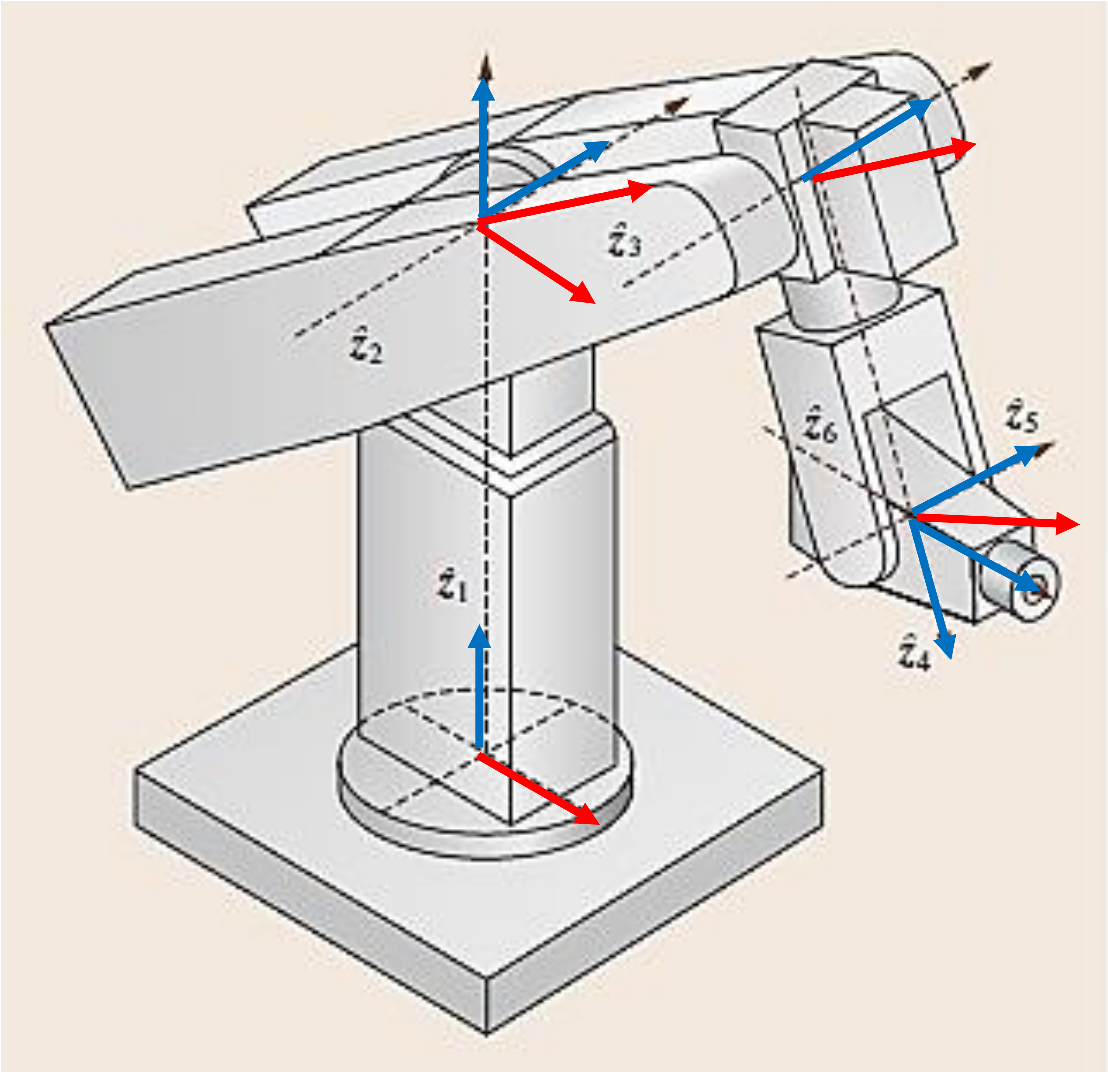
Pour le repère associé au premier solide mobile R_1, on le choisit généralement de manière à ce qu'il soit confondu avec le repère monde quand $q_1 = 0$

Si $\overrightarrow{z_i}$ et $\overrightarrow{z_{i+1}}$ sont parallèles, on choisit $\overrightarrow{x_i}$ orthogonal aux deux vecteurs de manière à pouvoir exprimer la translation entre $\overrightarrow{z_i}$ et $\overrightarrow{z_{i+1}}$

La transformation entre S_{i-1} et S_i est définie par 4 paramètres:

- α l'angle entre $\overrightarrow{z_{i-1}}$ et $\overrightarrow{z_i}$ autour de $\overrightarrow{x_{i-1}}$
- d la distance le long de $\overrightarrow{x_{i-1}}$ entre $\overrightarrow{z_{i-1}}$ et $\overrightarrow{z_i}$
- r la distance le long de $\overrightarrow{z_i}$ entre $\overrightarrow{x_{i-1}}$ et $\overrightarrow{x_i}$
- θ l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{x_{i-1}}$ et $\overrightarrow{x_i}$ autour de $\overrightarrow{z_i}$

1. Définir les paramètres DH et 0T6



- α l'angle entre $\overrightarrow{z_{i-1}}$ et $\overrightarrow{z_i}$ autour de $\overrightarrow{x_{i-1}}$
- d la distance le long de $\overrightarrow{x_{i-1}}$ entre $\overrightarrow{z_{i-1}}$ et $\overrightarrow{z_i}$
- r la distance le long de $\overrightarrow{z_i}$ entre $\overrightarrow{x_{i-1}}$ et $\overrightarrow{x_i}$
- θ l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{x_{i-1}}$ et $\overrightarrow{x_i}$ autour de $\overrightarrow{z_i}$

Joint	$\boldsymbol{\alpha_i}$	$\boldsymbol{d_i}$	$\boldsymbol{r_i}$	$\boldsymbol{\theta_i}$
1	0	0	0	q_1
2	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	q_2
3	0	l_1	0	q_3
4	$-\frac{\pi}{2}$	0	l_2	q_4
5	$\frac{\pi}{2}$	0	0	q_5
6	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	q_6

D’où les matrices

$$^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & d_i \\ \cos(\alpha_i)\sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i)\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) & -r_i\sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i)\sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i)\cos(\theta_i) & \cos(\alpha_i) & r_i\cos(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^0T_1 = \begin{bmatrix} c_{q_1} & -s_{q_1} & 0 & 0 \\ s_{q_1} & c_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ^3T_4 = \begin{bmatrix} c_{q_4} & -s_{q_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ -s_{q_4} & -c_{q_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^1T_2 = \begin{bmatrix} c_{q_2} & -s_{q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_{q_2} & -c_{q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ^4T_5 = \begin{bmatrix} c_{q_5} & -s_{q_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_{q_5} & c_{q_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^2T_3 = \begin{bmatrix} c_{q_3} & -s_{q_3} & 0 & l_1 \\ s_{q_3} & c_{q_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ^5T_6 = \begin{bmatrix} c_{q_6} & -s_{q_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_{q_6} & -c_{q_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Joint	$\boldsymbol{\alpha_i}$	$\boldsymbol{d_i}$	$\boldsymbol{r_i}$	$\boldsymbol{\theta_i}$
1	0	0	0	q_1
2	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	q_2
3	0	l_1	0	q_3
4	$-\frac{\pi}{2}$	0	l_2	q_4
5	$\frac{\pi}{2}$	0	0	q_5
6	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	q_6

MGD

…

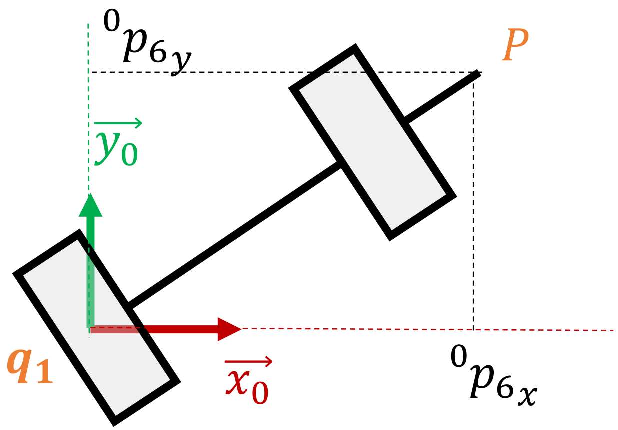
$$U_0 = {}^0T_1 \ {}^1T_2 \ {}^2T_3 \ {}^3T_4 \ {}^4T_5 \ {}^5T_6$$

MGI « intuitif »

Solution algébrique (robot 6 ddl à poignet sphérique)

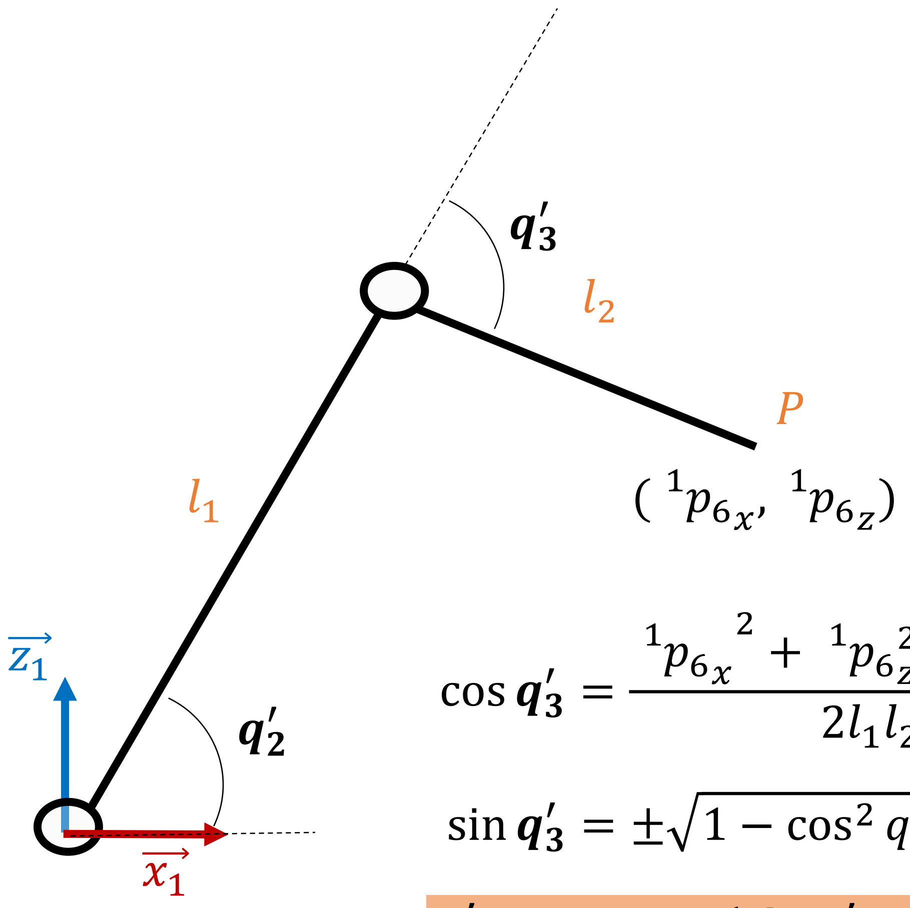
On distingue l'équation de position de l'équation d'orientation

Equation de position (position du point P dans R_0)



$$q_1 = ATAN2(\,{}^{0}p_{6_y},\ {}^{0}p_{6_x})$$

MGI « intuitif »



$${}^1p_{6_x} = l_2 \cos(\boldsymbol{q'_2} + \boldsymbol{q'_3}) + l_1 \cos \boldsymbol{q'_2}$$
$${}^1p_{6_z} = l_2 \sin(\boldsymbol{q'_2} + \boldsymbol{q'_3}) + l_1 \sin \boldsymbol{q'_2}$$
$${}^1p_{6_x} = \cos q_1 \; {}^0p_{6_x} + \sin q_1 \; {}^0p_{6_y}$$
$${}^1p_{6_z} = {}^0p_{6_z}$$

$$\cos \boldsymbol{q'_3} = \frac{{}^1p_{6_x}{}^2 + {}^1p_{6_z}^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2}$$

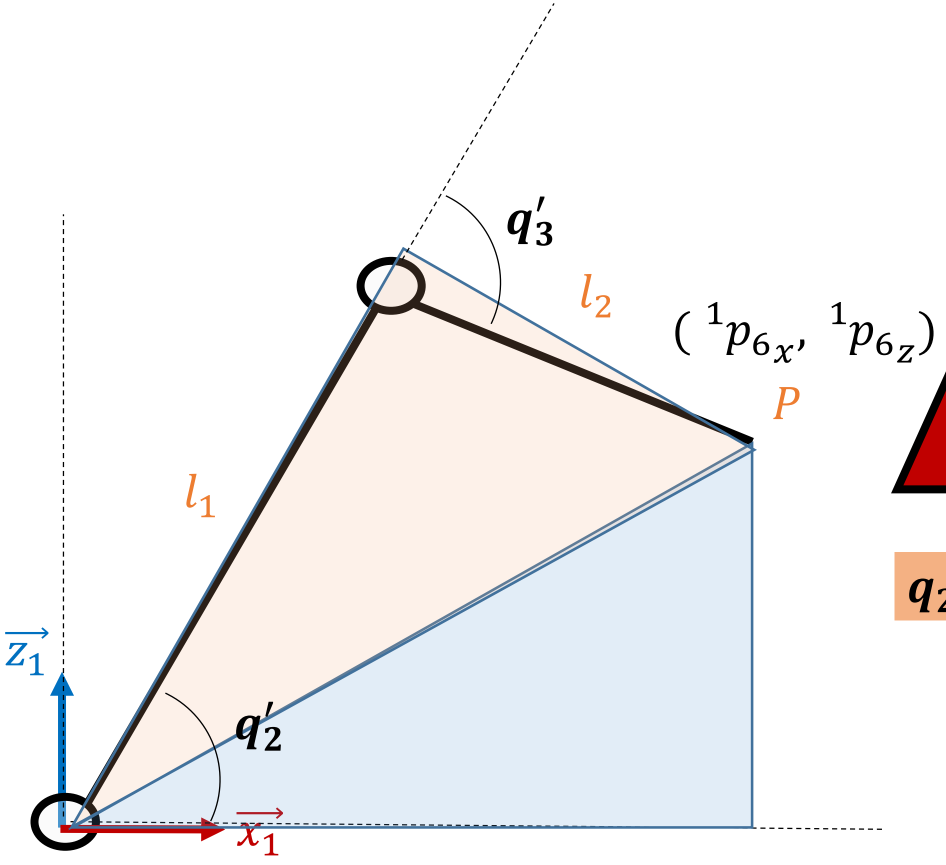
$$\sin \boldsymbol{q'_3} = \pm\sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

$$\boldsymbol{q'_3} = \boldsymbol{ATAN2(\sin q'_3, \cos q'_3)}$$

! **2 solutions**

! Offset et signe du VRAI q_3 (voir pose de référence du robot !)

MGI « intuitif »



$$\boldsymbol{q'_2} = \alpha + \beta$$

2 solutions (une par valeur de $\boldsymbol{sin\ q'_3}$)

$$\boldsymbol{q_2 = ATAN2({}^1p_{6_z}, {}^1p_{6_x}) + ATAN2(l_2 \sin q'_3, l_1 + l_2 \cos q'_3)}$$

$$ {}^1p_{6_x} = \cos q_1\ {}^0p_{6_x} + \sin q_1\ {}^0p_{6_y}$$

$$ {}^1p_{6_z} = {}^0p_{6_z}$$

Offset et signe du VRAI q_2 (voir pose de référence du robot !)

MGI

Equation d'orientation (méthode de Paul)

On connait à présent $q_1 \ q_2 \ q_3$

A partir de l'équation du MGD $U_0 = {}^0T_1 \ {}^1T_2 \ {}^2T_3 \ {}^3T_4 \ {}^4T_5 \ {}^5T_6$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = {}^0R_6$$

Ou encore $$\underbrace{{}^3R_0}_{\text{Dépend de } q_1 \ q_2 \ q_3} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \underbrace{{}^3R_6}_{\text{Dépend de } q_4 \ q_5 \ q_6}$$

MGI

Ce qui permet alors d'écrire, par la méthode de Paul

$$\underbrace{{}^{4}R_3 \; {}^{3}R_0 \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \; {}^{4}R_6}$$

On identifie dans ces égalités les équations remarquables permettant de résoudre

Si nécessaire…

$${}^{5}R_4 \; {}^{4}R_3 \; {}^{3}R_0 \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \; {}^{5}R_6$$

Méthode de Paul

$$ {}^4R_3\ {}^3R_0 \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = {}^4R_6 \quad \Longrightarrow \quad \text{On pose } {}^3R_0 \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = [F\ G\ H] $$

On a alors le système suivant: ${}^4R_3[F\ G\ H] = {}^4R_6$ **(exploiter MATLAB pour obtenir les expressions)**

On va chercher des expressions « faciles » (3) dans ces égalités

Par exemple l'expression (2,3) $-H3\cos(q_4) - H1\sin(q_4) = 0 \rightarrow$

$$\boldsymbol{q_4 = ATAN2(-H3, H1) \pm k\pi}$$

Les éléments (1,3) et (3,3) donnent q_5

$$\begin{cases} H1\cos q_4 - H3\sin q_4 = -\sin q_5 \\ H2 = \cos q_5 \end{cases} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{q_5 = ATAN2(H3\sin q_4 - H1\cos q_4, H2) \pm k\pi}$$

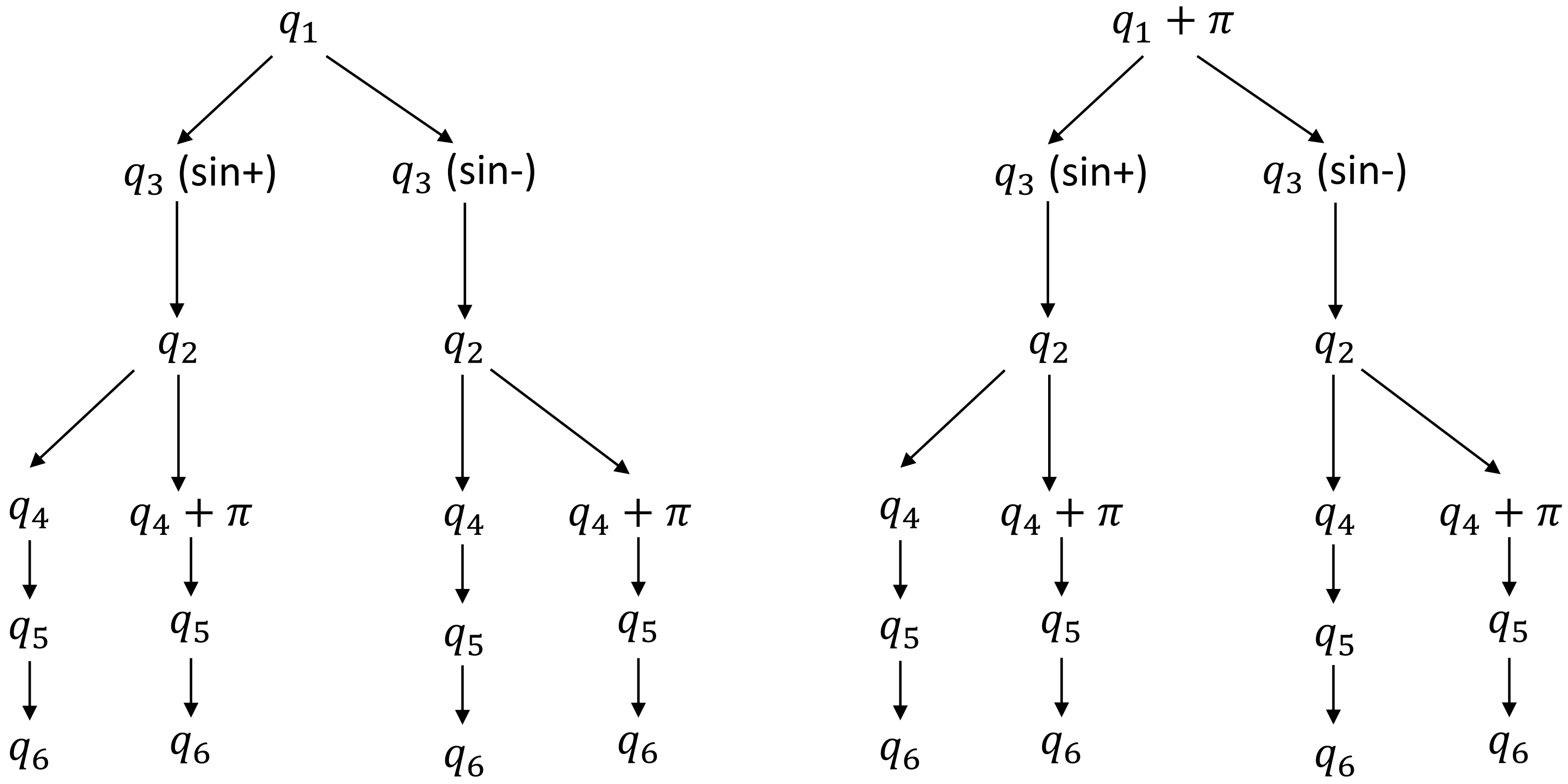
Les éléments (2,1) et (2,2) donnent q_6

$$\begin{cases} -F3\cos q_4 - F1\sin q_4 = \sin q_6 \\ -G3\cos q_4 - G1\sin q_4 = \cos q_6 \end{cases} \rightarrow$$

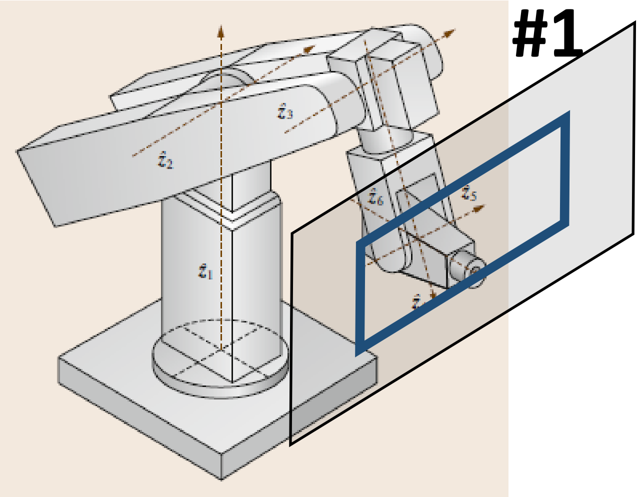
$$\boldsymbol{q_6 = ATAN2(-F3\cos\ q_4 - F1\sin q_4, -G3\cos\ q_4 - G1\sin q_4) \pm k\pi}$$

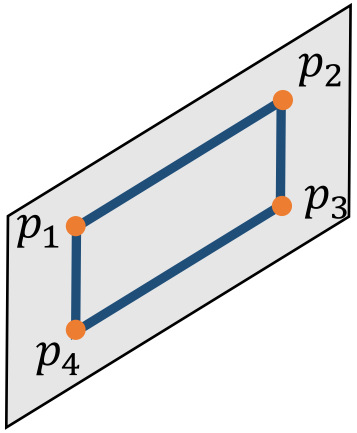
Solutions multiples

Cette résolution amène un total de 8 solutions distinctes nécessitant de faire des « choix » lors de la résolution. Pensez à coder ces choix lorsque vous cherchez une solution pour le MGI

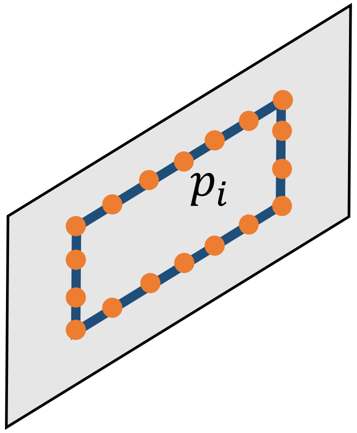


APPLICATIONS

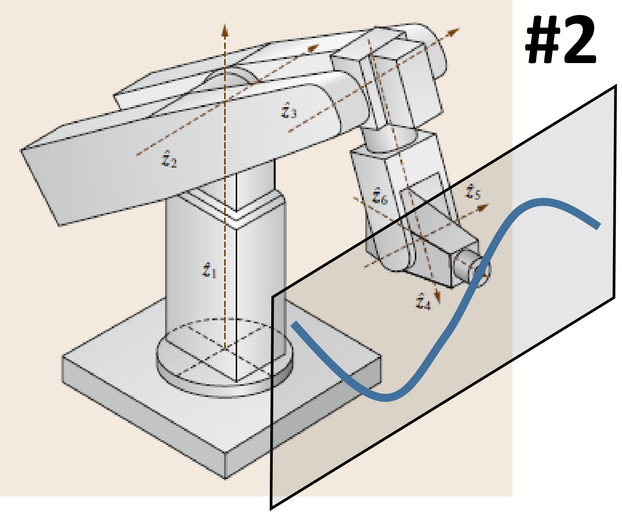


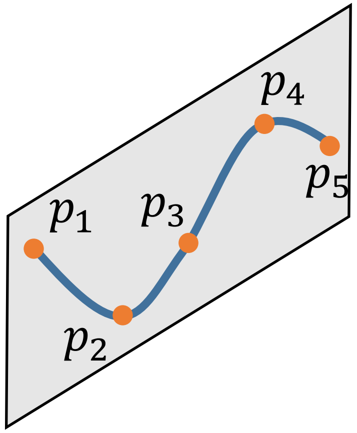


Définition des points de passage

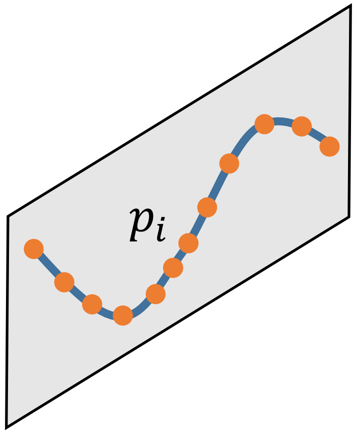


Discrétisation de la trajectoire





Définition des points de passage



Discrétisation de la trajectoire

MGI par modèle différentiel

Rappel : La jacobienne relie les vitesses opérationnelles aux vitesses articulaires $\dot{X} = J(q)\dot{q}$

Les coordonnées opérationnelles dépendent des choix de représentation de position et d'orientation de l'organe terminal !

Pour le moment, nous avons considéré les cosinus directeurs (soit la matrice d'orientation) $\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = {}^0R_6$

Pour pouvoir exploiter la jacobienne, il faut revenir à un jeu de 3 paramètres (exemples: angles d 'Euler)
La relation entre une séquence Z Y X (angles α β γ) et les cosinus directeurs :

$$\boldsymbol{\beta = ATAN2(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2})} \qquad \boldsymbol{\alpha = ATAN2(\frac{r_{21}}{\cos\beta}, \frac{r_{11}}{\cos\beta})} \qquad \boldsymbol{\gamma = ATAN2(\frac{r_{32}}{\cos\beta}, \frac{r_{33}}{\cos\beta})}$$

Les coordonnées opérationnelles sont alors $X = \begin{bmatrix} {}^0p_{6_x} \\ {}^0p_{6_y} \\ {}^0p_{6_z} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$

MGI par modèle différentiel

Du coup la jacobienne relie $\dot{X} = J(q)\dot{q}$ ⟹ $\begin{bmatrix} {}^0\dot{p}_{6_x} \\ {}^0\dot{p}_{6_y} \\ {}^0\dot{p}_{6_z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = J(q) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}$ OU $\begin{bmatrix} {}^0dp_{6_x} \\ {}^0dp_{6_y} \\ {}^0dp_{6_z} \\ d\alpha \\ d\beta \\ d\gamma \end{bmatrix} = J(q) \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ dq_4 \\ dq_5 \\ dq_6 \end{bmatrix}$

Problème: résultats analytiques difficiles à obtenir (particulièrement pour les orientations)

⟹ Usage d'une jacobienne numérique $J_{ij_{num}} = \dfrac{X_i(q + \Delta q) - X_i(q - \Delta q)}{2\Delta q_j}$

⟹ Mise en œuvre par méthode itérative !