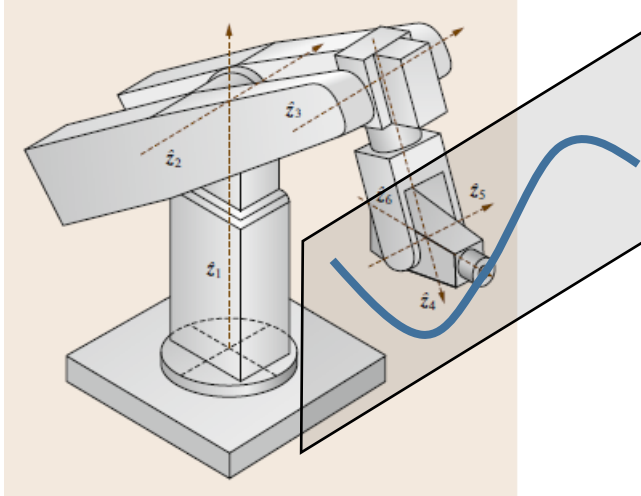


SIMSYS

Ressources manipulateur 6 axes

Charles Pontonnier

Problématique



Springer Handbook of robotics

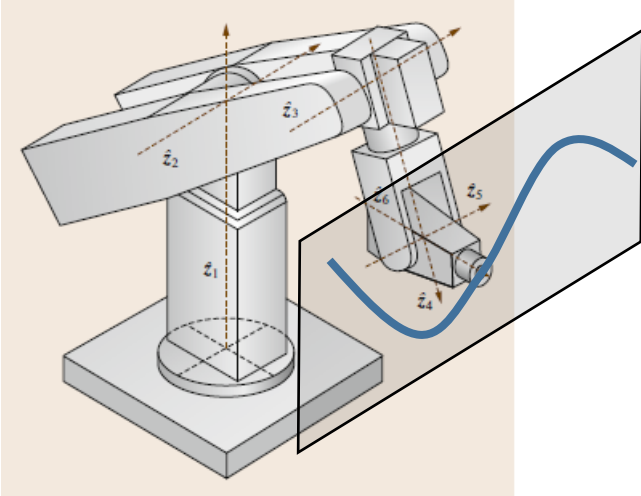


Suivi de trajectoire (robot soudeur ?)



A tout instant,

$${}^0T_6 = U_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & {}^0p_{6x} \\ 1 & 0 & 0 & {}^0p_{6y} \\ 0 & 1 & 0 & {}^0p_{6z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Springer Handbook of robotics

Rappel: ${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$

Forme générale de ${}^0T_6 = U_0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & {}^0p_{6x} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & {}^0p_{6y} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & {}^0p_{6z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ET on a un poignet sphérique, ce qui veut dire que l'on peut dissocier position et orientation du robot.

Pause: cosinus directeurs

A partir de la matrice de rotation d'un solide dans l'espace:

$${}^0R_i = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$



Les éléments de 0R_i sont **les cosinus directeurs**, représentant les coordonnées des trois vecteurs de la base i dans 0



Les colonnes de 0R_i sont orthogonales entre elles et par conséquent la conséquence de deux colonnes suffit à définir l'orientation !

$${}^0R_i = \begin{bmatrix} r_{11} & * & r_{13} \\ r_{21} & * & r_{23} \\ r_{31} & * & r_{33} \end{bmatrix}$$



Les 6 paramètres restants constituent les **cosinus directeurs incomplets**



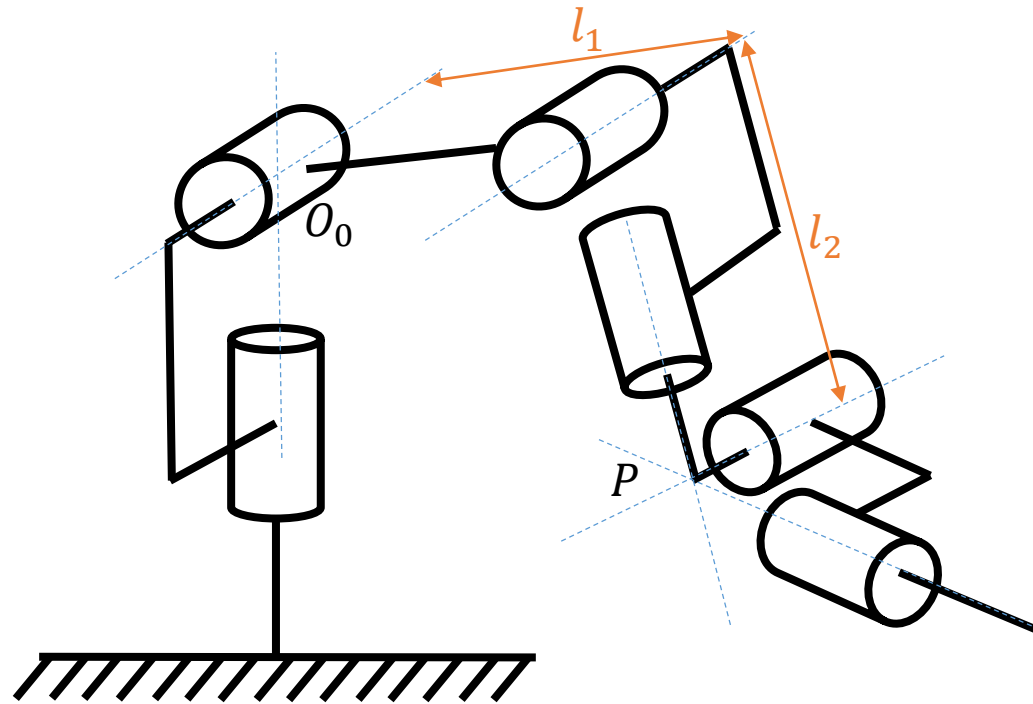
Ils sont liés entre eux par 3 relations

$$\begin{aligned} r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} &= 0 \\ r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 &= 0 \\ r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 &= 0 \end{aligned}$$

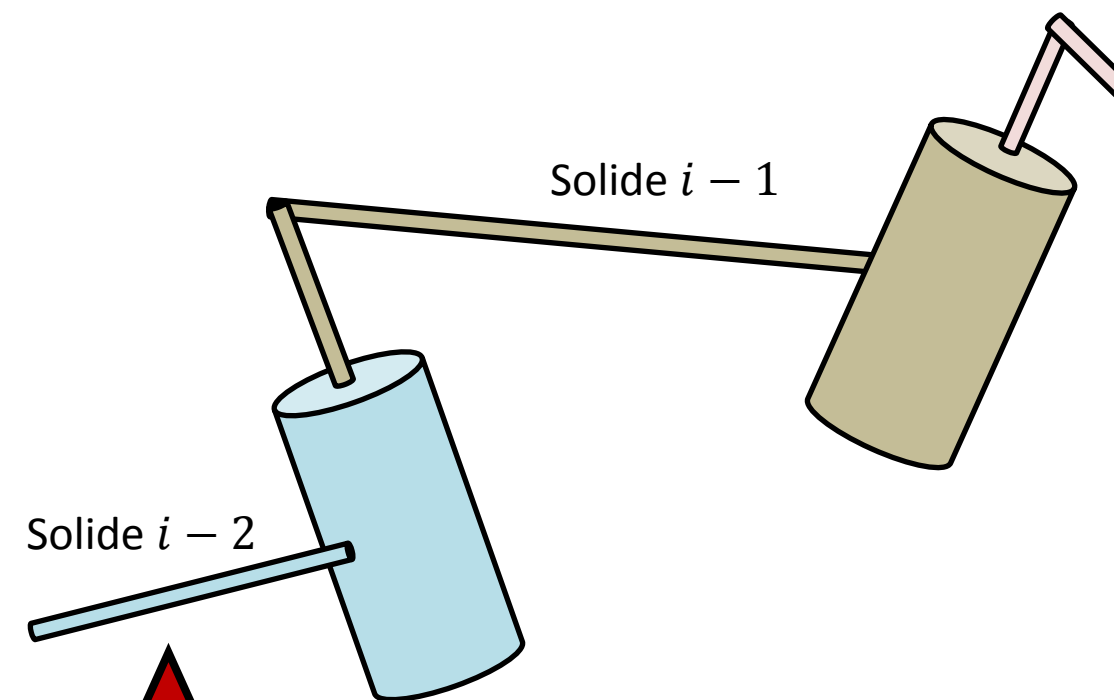


3 paramètres suffisent pour définir l'orientation du solide !

Schéma cinématique minimal



Khalil Kleinfinger (DH modifié)



$${}^{i-1}T_i = \text{rot}(\vec{x}_{i-1}, \alpha_i) \cdot \text{trans}(\vec{x}_{i-1}, d_i) \cdot \text{rot}(\vec{z}_i, \theta_i) \cdot \text{trans}(\vec{z}_i, r_i)$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & d_i \\ \cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) & -r_i \sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & \cos(\alpha_i) & r_i \cos(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Chaque solide de la chaîne porte un numéro $i = 1 \dots N$ (de la base vers l'extrémité de la chaîne)
- A chaque solide S_i est associé un repère orthonormé direct R_i
- L'axe \vec{z}_i est porté par l'axe de la liaison entre S_{i-1} et S_i
- L'axe \vec{x}_i est choisi tel que $\vec{x}_i = \vec{z}_i \wedge \vec{z}_{i+1}$
- L'axe \vec{y}_i complète le trièdre direct tel que $\vec{y}_i = \vec{z}_i \wedge \vec{x}_i$



Pour le repère associé au premier solide mobile R_1 , on le choisit généralement de manière à ce qu'il soit confondu avec le repère monde quand $q_1 = 0$

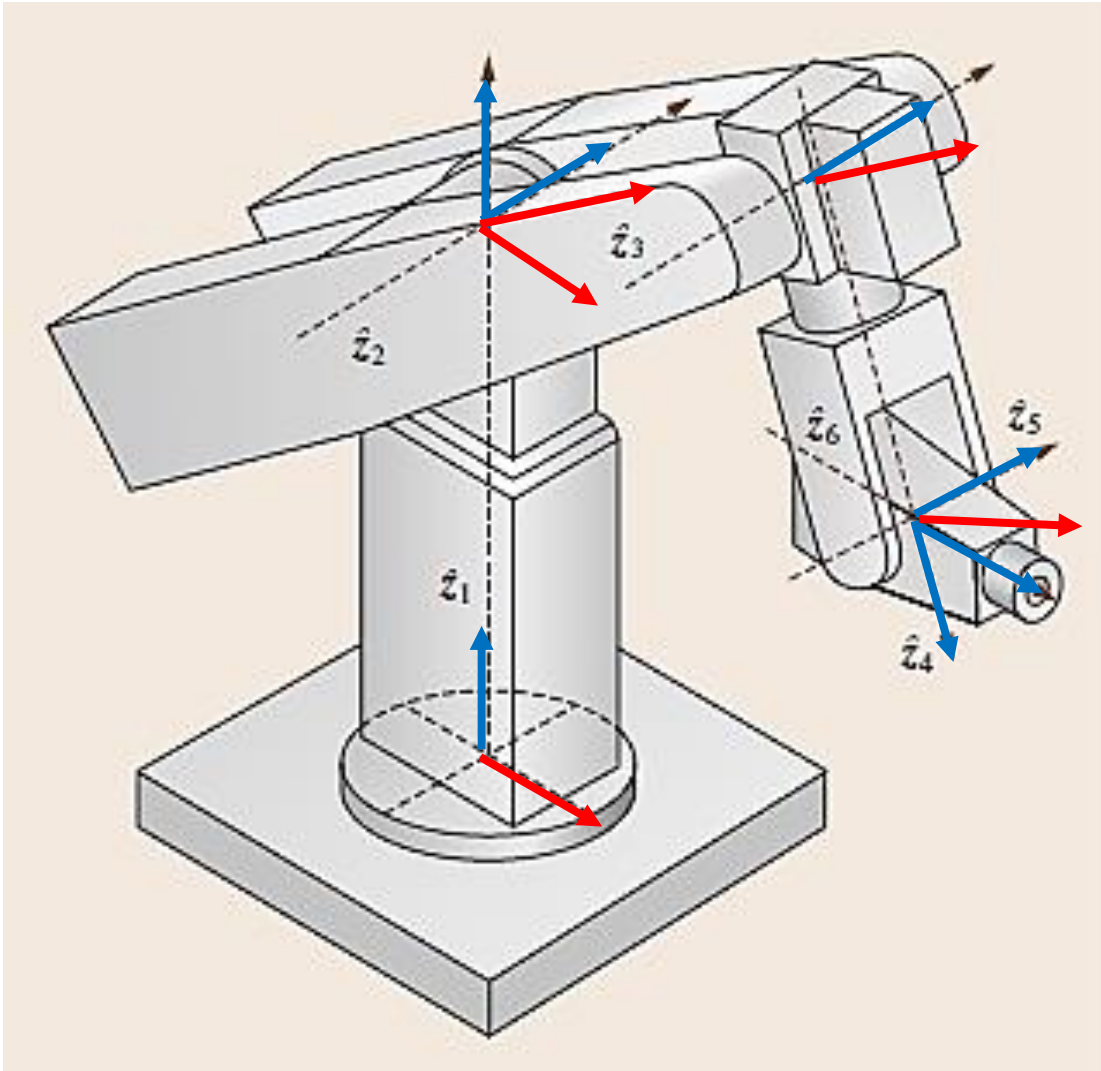


Si \vec{z}_i et \vec{z}_{i+1} sont parallèles, on choisit \vec{x}_i orthogonal aux deux vecteurs de manière à pouvoir exprimer la translation entre \vec{z}_i et \vec{z}_{i+1}

La transformation entre S_{i-1} et S_i est définie par 4 paramètres:

- α l'angle entre \vec{z}_{i-1} et \vec{z}_i autour de \vec{x}_{i-1}
- d la distance le long de \vec{x}_{i-1} entre \vec{z}_{i-1} et \vec{z}_i
- r la distance le long de \vec{z}_i entre \vec{x}_{i-1} et \vec{x}_i
- θ l'angle entre les vecteurs \vec{x}_{i-1} et \vec{x}_i autour de \vec{z}_i

1. Définir les paramètres DH et OT6



- α l'angle entre \vec{z}_{i-1} et \vec{z}_i autour de \vec{x}_{i-1}
- d la distance le long de \vec{x}_{i-1} entre \vec{z}_{i-1} et \vec{z}_i
- r la distance le long de \vec{z}_i entre \vec{x}_{i-1} et \vec{x}_i
- θ l'angle entre les vecteurs \vec{x}_{i-1} et \vec{x}_i autour de \vec{z}_i

Joint	α_i	d_i	r_i	θ_i
1	0	0	0	q_1
2	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	q_2
3	0	l_1	0	q_3
4	$-\frac{\pi}{2}$	0	l_2	q_4
5	$\frac{\pi}{2}$	0	0	q_5
6	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	q_6

D'où les matrices

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & d_i \\ \cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) & -r_i \sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & \cos(\alpha_i) & r_i \cos(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} c_{q_1} & -s_{q_1} & 0 & 0 \\ s_{q_1} & c_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} c_{q_2} & -s_{q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_{q_2} & -c_{q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} c_{q_3} & -s_{q_3} & 0 & l_1 \\ s_{q_3} & c_{q_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} c_{q_4} & -s_{q_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ -s_{q_4} & -c_{q_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} c_{q_5} & -s_{q_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_{q_5} & c_{q_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5T_6 = \begin{bmatrix} c_{q_6} & -s_{q_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_{q_6} & -c_{q_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Joint	α_i	d_i	r_i	θ_i
1	0	0	0	q_1
2	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	q_2
3	0	l_1	0	q_3
4	$-\frac{\pi}{2}$	0	l_2	q_4
5	$\frac{\pi}{2}$	0	0	q_5
6	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	q_6

...

$$U_0 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$$

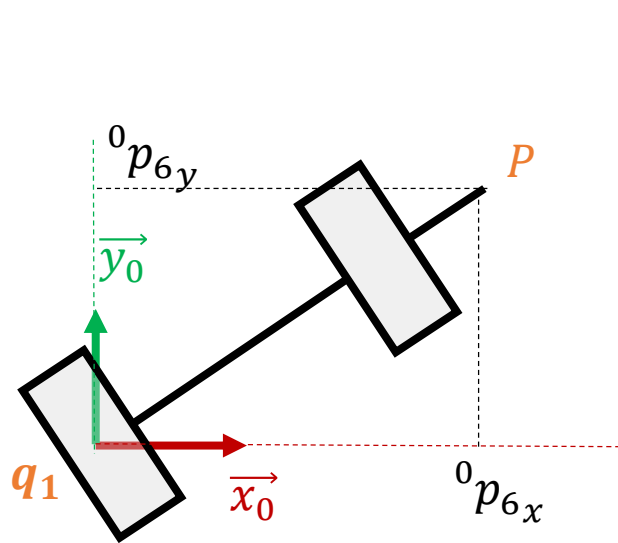
MGI « intuitif »

Solution algébrique (robot 6 ddl à poignet sphérique)



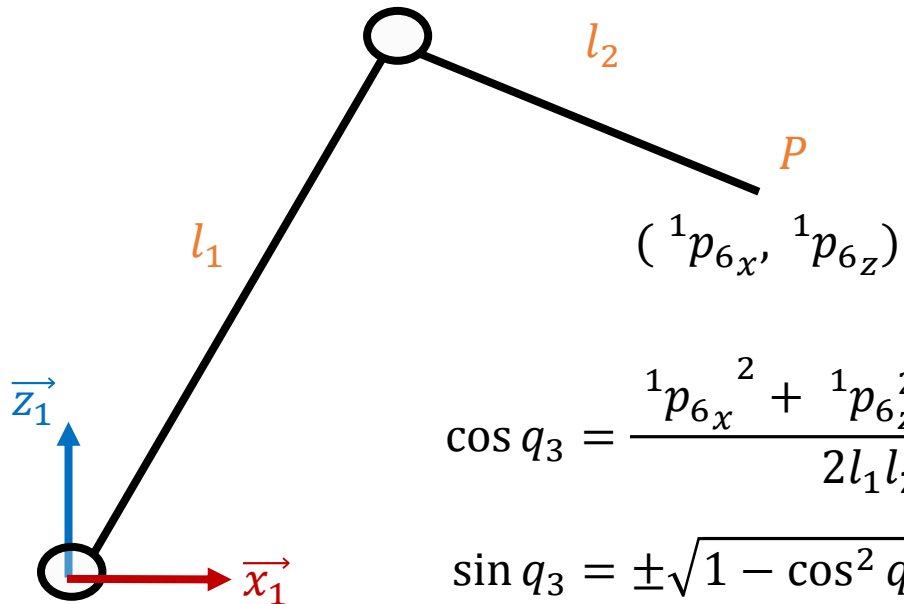
On distingue l'équation de position de l'équation d'orientation

Equation de position (position du point P dans R_0)



$$q_1 = ATAN2({}^0p_{6y}, {}^0p_{6x})$$

MGI « intuitif »



$$\cos q_3 = \frac{{}^1p_{6x}^2 + {}^1p_{6z}^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}$$

$$\sin q_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

$$q_3 = \text{ATAN2}(\sin q_3, \cos q_3)$$



Offset du VRAI q_3

$$\begin{aligned} {}^1p_{6x} &= l_2 \cos(q_2 + q_3) + l_1 \cos q_2 \\ {}^1p_{6z} &= l_2 \sin(q_2 + q_3) + l_1 \sin q_2 \end{aligned}$$

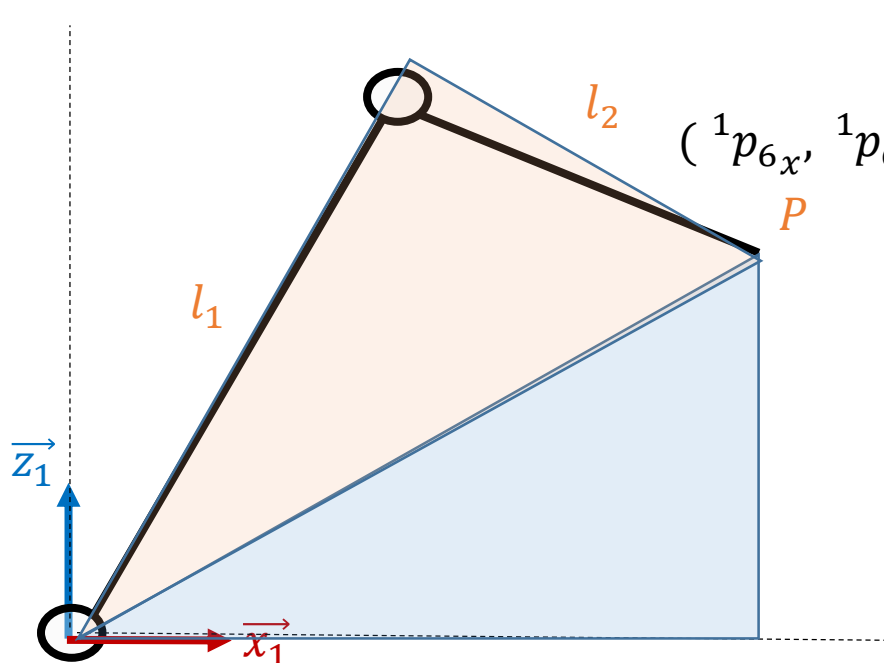


2 solutions

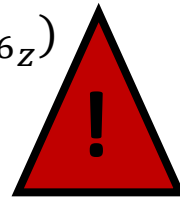
$${}^1p_{6x} = \cos q_1 {}^0p_{6x} + \sin q_1 {}^0p_{6y}$$

$${}^1p_{6z} = {}^0p_{6z}$$

MGI « intuitif »



$$q_2 = \alpha + \beta$$



2 solutions (une par valeur de $\sin q_3$)

$$q_2 = \text{ATAN2}({}^1p_{6z}, {}^1p_{6x}) + \text{ATAN2}(l_2 \sin q_3, l_1 + l_2 \cos q_3)$$

$${}^1p_{6x} = \cos q_1 {}^0p_{6x} + \sin q_1 {}^0p_{6y}$$

$${}^1p_{6z} = {}^0p_{6z}$$



Signe du VRAI q_2

Equation d'orientation (méthode de Paul)

On connaît à présent q_1 q_2 q_3

A partir de l'équation du MGD $U_0 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = {}^0R_6$$

Ou encore

$$\underbrace{{}^3R_0}_{\text{Dépend de } q_1 \ q_2 \ q_3} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \underbrace{{}^3R_6}_{\text{Dépend de } q_4 \ q_5 \ q_6}$$

Ce qui permet alors d'écrire, par la méthode de Paul

$$\underbrace{{}^4R_3 {}^3R_0 \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}} = {}^4R_6$$

On identifie dans ces égalités les équations remarquables permettant de résoudre

Si nécessaire...
$${}^5R_4 {}^4R_3 {}^3R_0 \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = {}^5R_6$$

Méthode de Paul

$${}^4R_3 {}^3R_0 \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = {}^4R_6 \longrightarrow \text{On pose } {}^3R_0 \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = [F \ G \ H]$$

On a alors le système suivant: ${}^4R_3 [F \ G \ H] = {}^4R_6$

(exploiter MATLAB pour obtenir les expressions)

On va chercher des expressions « faciles » (3) dans ces égalités

Par exemple l'expression (2,3) $-H3 \cos(q_4) - H1 \sin(q_4) = 0 \rightarrow$

$$q_4 = \text{ATAN2}(-H3, H1) \pm k\pi$$

Les éléments (1,3) et (3,3) donnent q_5

$$\begin{cases} H1 \cos q_4 - H3 \sin q_4 = -\sin q_5 \\ H2 = \cos q_5 \end{cases} \rightarrow$$

$$q_5 = \text{ATAN2}(H3 \sin q_4 - H1 \cos q_4, H2) \pm k\pi$$

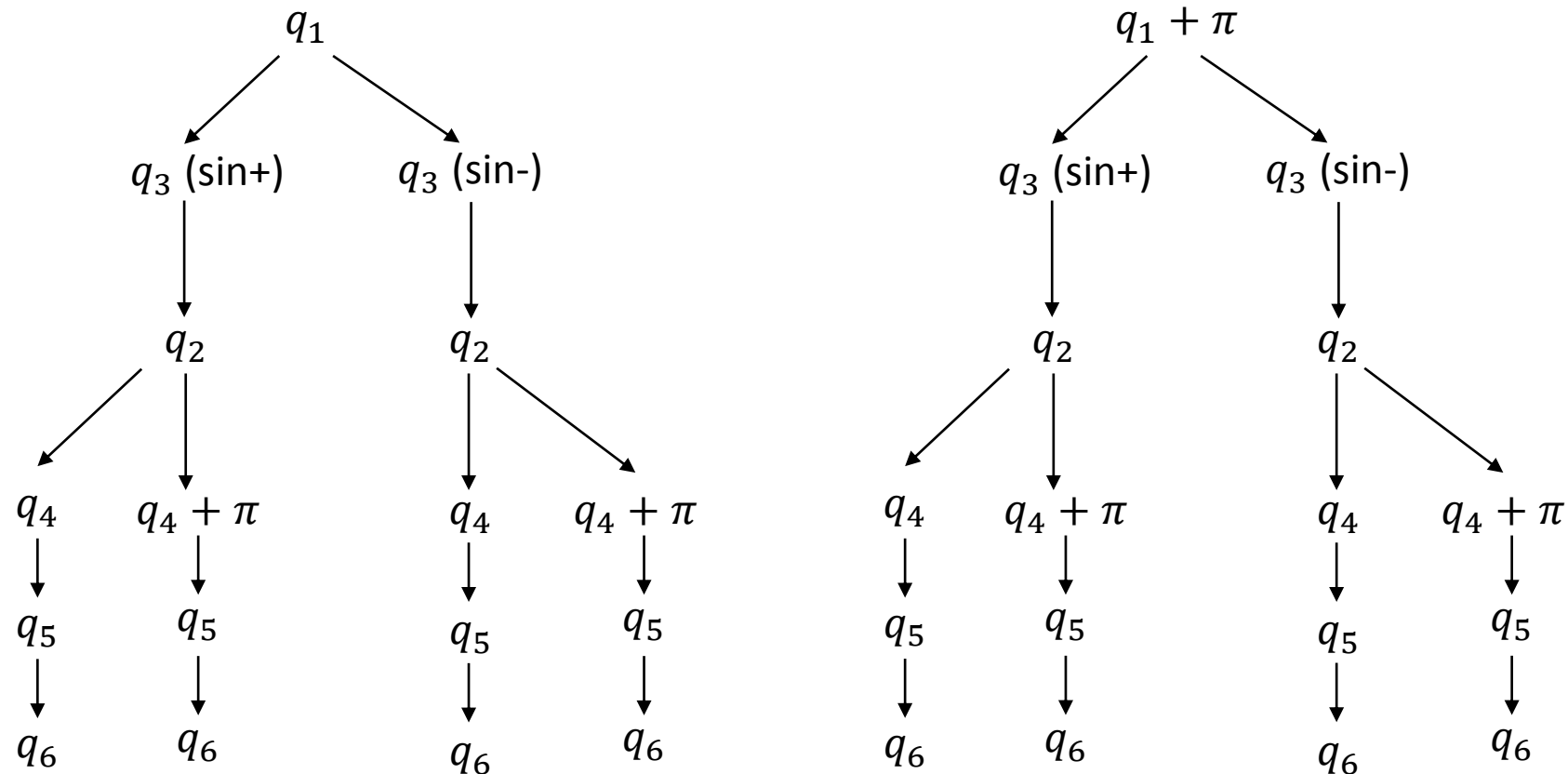
Les éléments (2,1) et (2,2) donnent q_6

$$\begin{cases} -F3 \cos q_4 - F1 \sin q_4 = \sin q_6 \\ -G3 \cos q_4 - G1 \sin q_4 = \cos q_6 \end{cases} \rightarrow$$

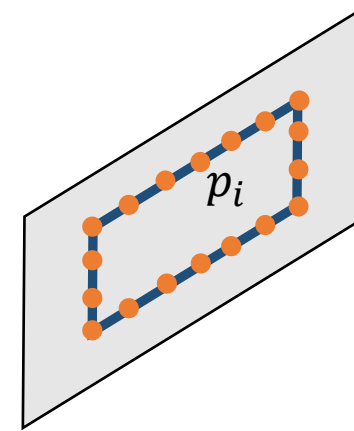
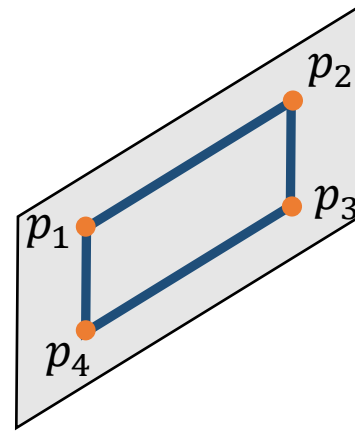
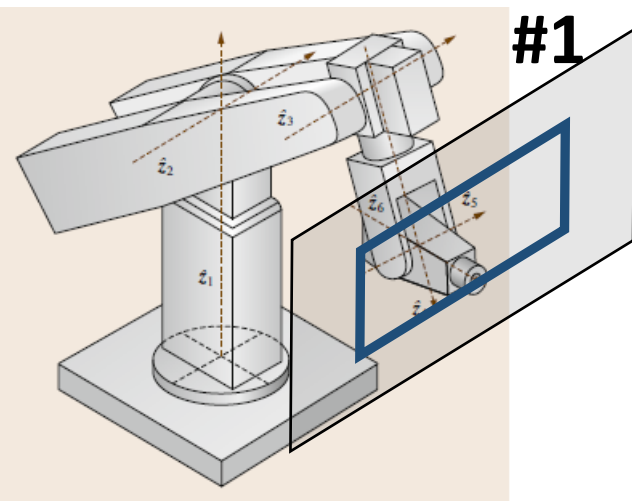
$$q_6 = \text{ATAN2}(-F3 \cos q_4 - F1 \sin q_4, -G3 \cos q_4 - G1 \sin q_4) \pm k\pi$$

Solutions multiples

Cette résolution amène un total de 8 solutions distinctes nécessitant de faire des « choix » lors de la résolution. Pensez à coder ces choix lorsque vous cherchez une solution pour le MGI

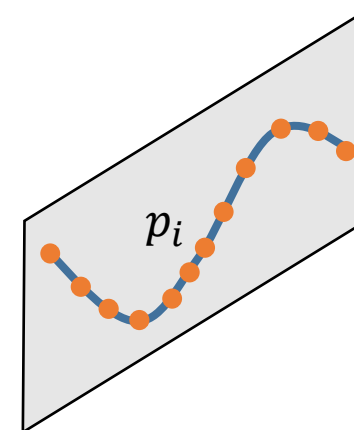
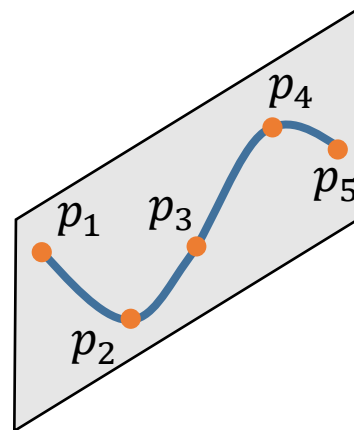
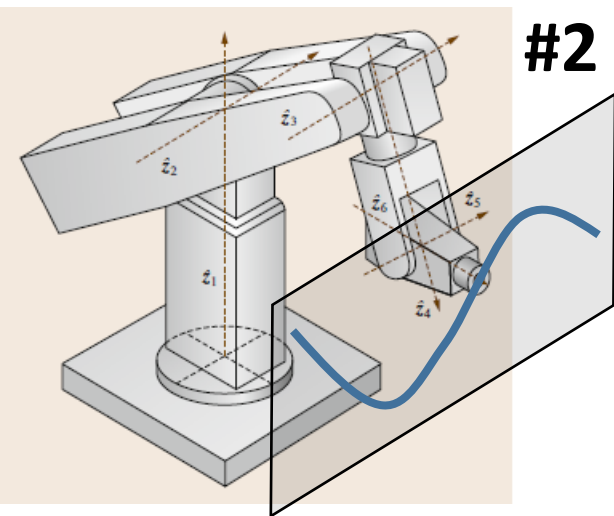


APPLICATIONS



Définition des points de passage

Discrétisation de la trajectoire



Définition des points de passage

Discrétisation de la trajectoire

MGI par modèle différentiel

Rappel : La jacobienne relie les vitesses opérationnelles aux vitesses articulaires $\dot{X} = J(q)\dot{q}$

Les coordonnées opérationnelles dépendent des choix de représentation de position et d'orientation de l'organe terminal !

Pour le moment, nous avons considéré les cosinus directeurs (soit la matrice d'orientation) $\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = {}^0R_6$

Pour pouvoir exploiter la jacobienne, il faut revenir à un jeu de 3 paramètres (exemples: angles d'Euler)

La relation entre une séquence Z Y X (angles α β γ) et les cosinus directeurs :

$$\beta = ATAN2(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2})$$


$$\alpha = ATAN2\left(\frac{r_{21}}{\cos \beta}, \frac{r_{11}}{\cos \beta}\right)$$

$$\gamma = ATAN2\left(\frac{r_{32}}{\cos \beta}, \frac{r_{33}}{\cos \beta}\right)$$

Les coordonnées opérationnelles sont alors

$$X = \begin{bmatrix} {}^0p_{6x} \\ {}^0p_{6y} \\ {}^0p_{6z} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

MGI par modèle différentiel

Du coup la jacobienne relie $\dot{X} = J(q)\dot{q}$ 
$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{p}_{6x} \\ {}^0\dot{p}_{6y} \\ {}^0\dot{p}_{6z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = J(q) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} \quad \text{OU} \quad \begin{bmatrix} {}^0dp_{6x} \\ {}^0dp_{6y} \\ {}^0dp_{6z} \\ d\alpha \\ d\beta \\ d\gamma \end{bmatrix} = J(q) \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ dq_4 \\ dq_5 \\ dq_6 \end{bmatrix}$$

Problème: résultats analytiques difficiles à obtenir (particulièrement pour les orientations)



Usage d'une jacobienne numérique

$$J_{ijnum} = \frac{X_i(q + \Delta q) - X_i(q - \Delta q)}{2\Delta q_j}$$



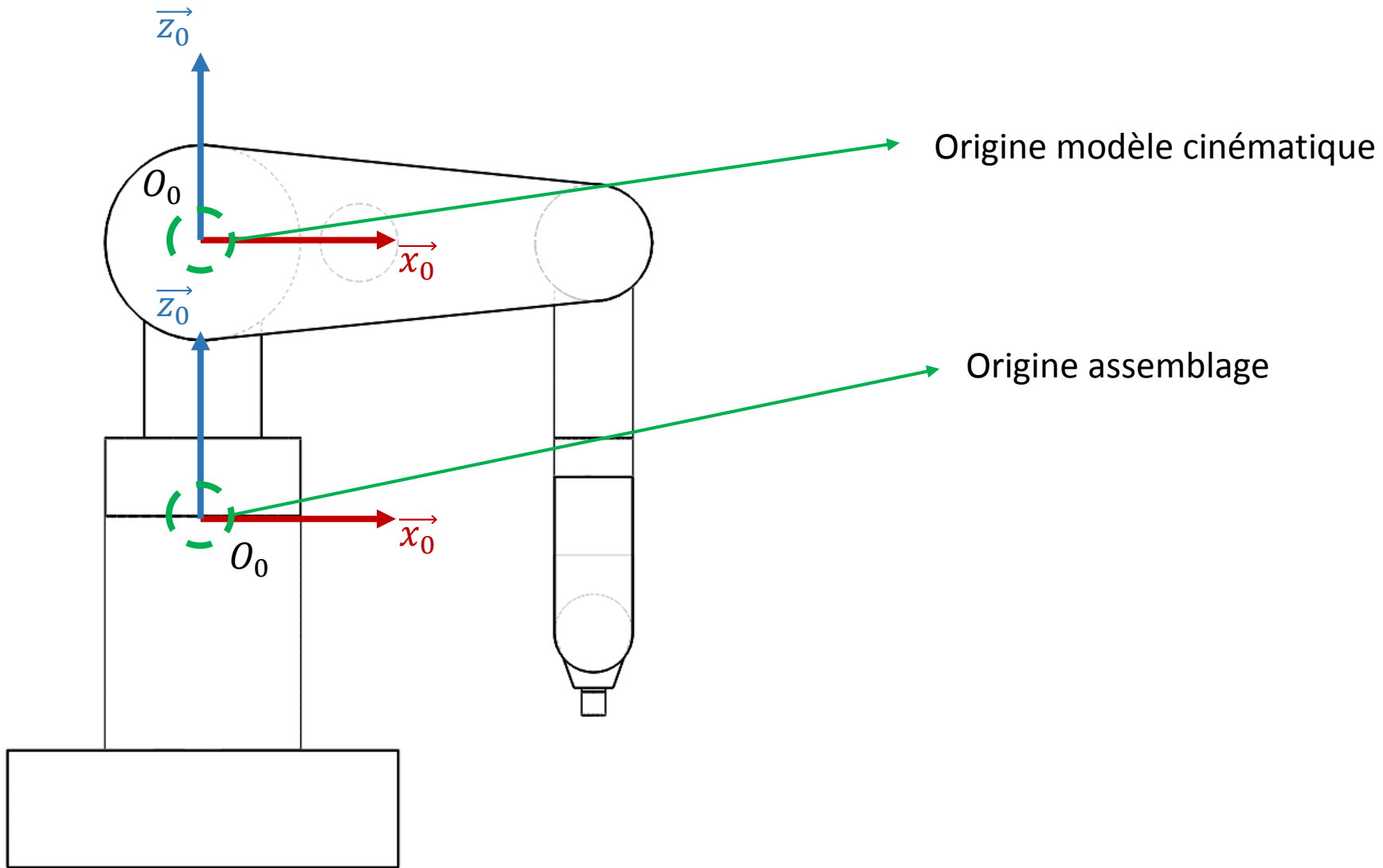
Mise en œuvre par méthode itérative !

SIMSYS

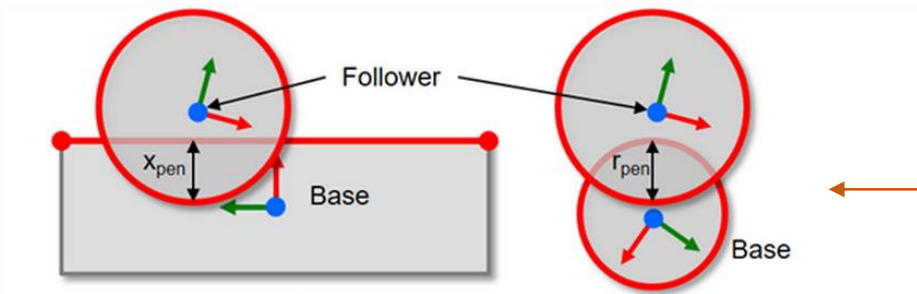
TIPS

Charles Pontonnier

Comparaison modèle Multibody et modèle cinématique



Contact



Contact Stiffness (k): Spring stiffness for force law

Contact Damping (b): Damping constant for force law

Linear

A linear spring-damper resists penetration. Damping force is 0 as penetration decreases. Force is applied only along the direction of penetration.

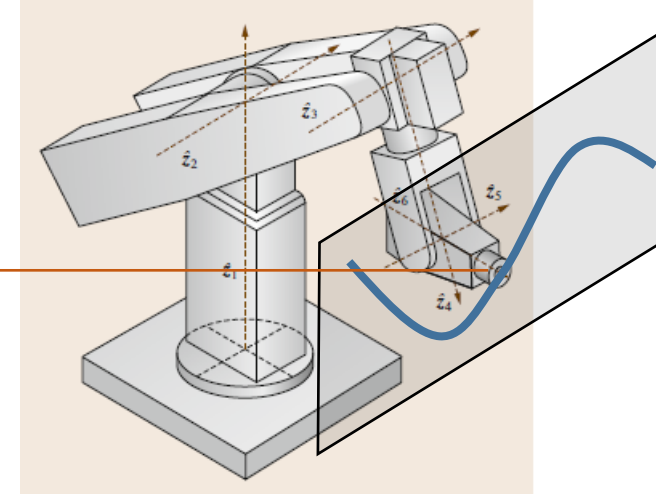
$$F_x = \begin{cases} k \cdot x_{pen} + b \cdot v_{pen} & x_{pen} > 0, v_{pen} > 0 \\ k \cdot x_{pen} & x_{pen} > 0, v_{pen} < 0 \\ 0 & x_{pen} \leq 0 \end{cases} \quad \left| \quad F_r = \begin{cases} k \cdot x_{pen} + b \cdot v_{pen} & r_{pen} > 0, v_{pen} > 0 \\ k \cdot x_{pen} & r_{pen} > 0, v_{pen} < 0 \\ F_r = 0 & x_{pen} \leq 0 \end{cases}$$

$F_y = 0$

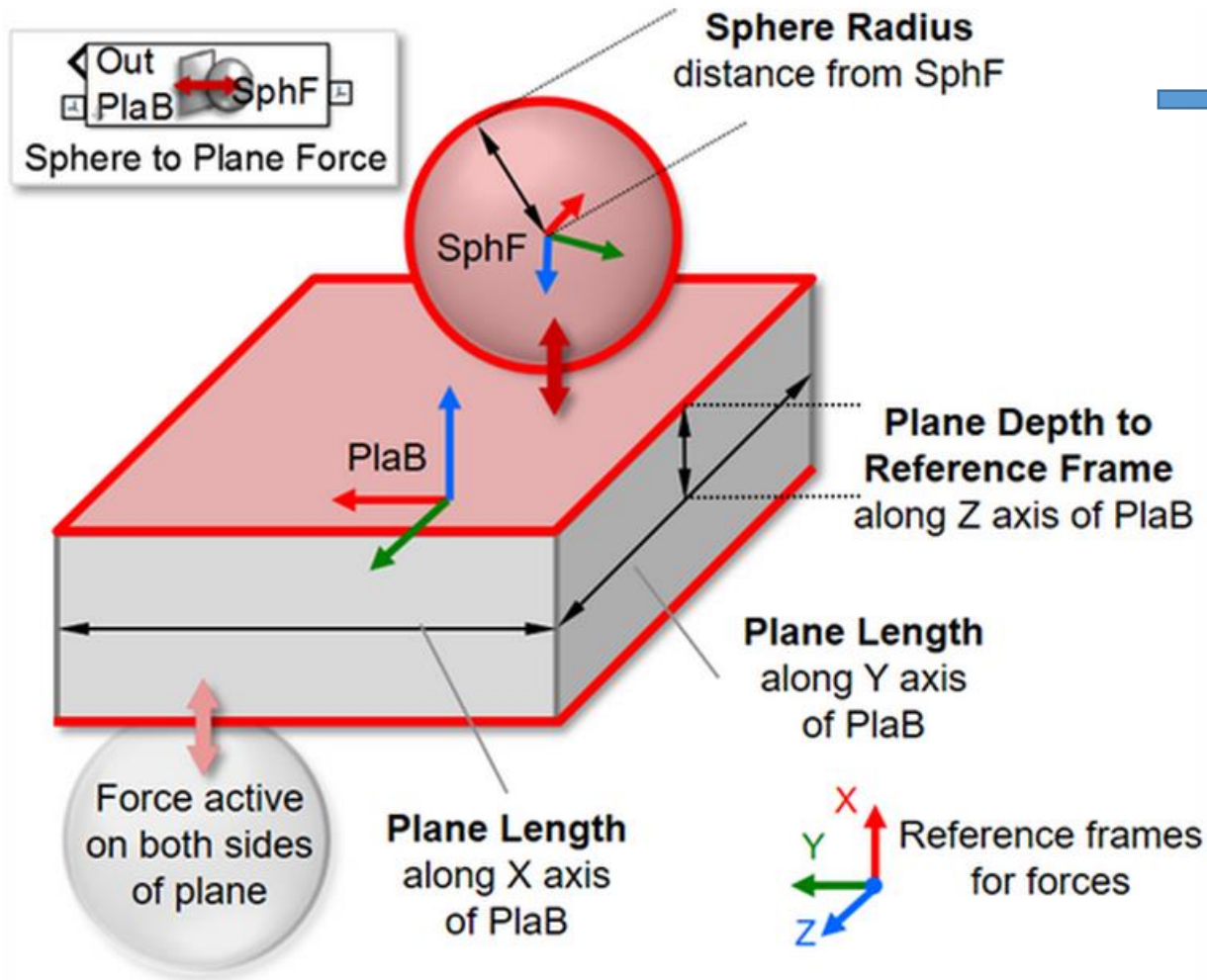
Nonlinear

Same as Linear except:

1. Stiffness force increases exponentially with penetration
 $k \cdot (x_{pen})^e$, where e is parameter **Penetration Exponent**
2. Damping force increases gradually during initial penetration
 $b \cdot v_{pen} \cdot (\text{Smooth Step})$, where Smooth Step is a polynomial whose value increases from 0 to 1 as the penetration increases from 0 to parameter **Penetration for Full Damping**



On va chercher à simuler l'action de soudure sur le robot



→ Piloter la position du plan à tout instant !

