

Simulation des systèmes de solides rigides polyarticulés

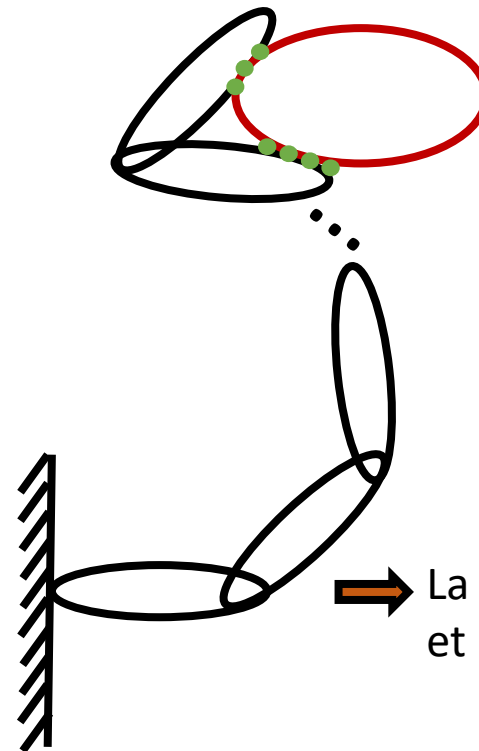
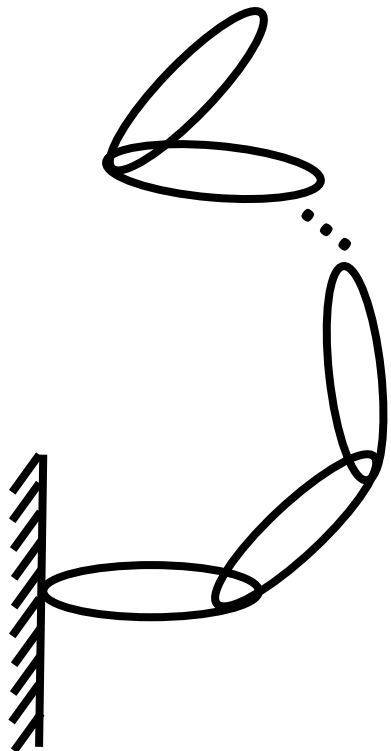
7- Gestion des contacts

Charles Pontonnier



Problématique: contact

Système de solides rigides polyarticulés



d Contraintes de contact aux points du solide définis par la géométrie

Garantie de non-pénétration:
 $\forall \alpha = 1, \dots, d, \quad \varphi_\alpha(q) \geq 0$

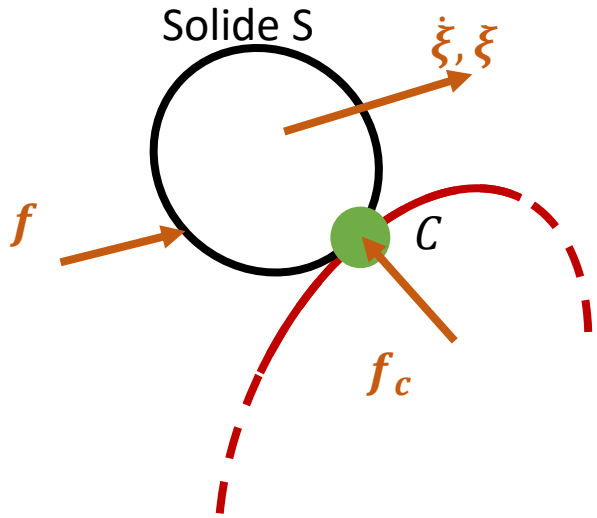
→ La distance entre les points de contact et la surface est supérieure ou égale à 0



Voyons d'abord le cas d'un solide...avec un ou plusieurs points de contact



Point de contact unique sur 1 solide



La direction de l'effort f_c est une normale n sortante à la surface de contact (l'effort est nécessairement dirigé pour repousser le solide S)

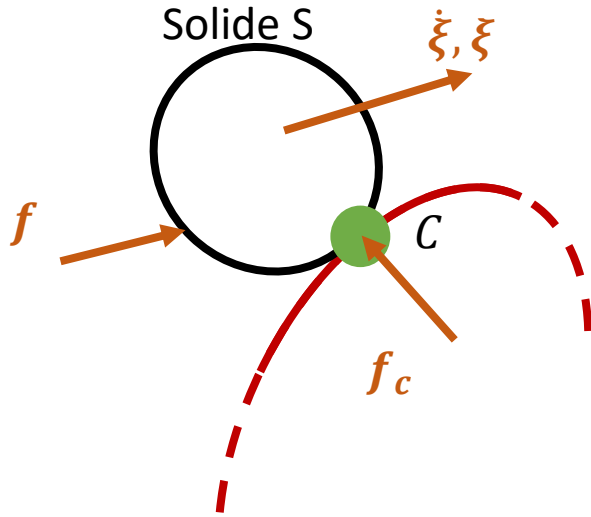
On considère le contact sans frottement, et que le solide n'est soumis qu'à des forces finies (pas d'impulsion)

On cherche l'accélération (spatiale) ξ et l'effort de contact f_c à tout instant

Si l'on considère C' le point de contact défini sur le solide, la force f_c empêche le solide de pénétrer dans la surface de contact. Sans frottement, l'effort est dirigé selon la normale sortante à la surface n et peut donc être définie à l'aide d'un scalaire d'amplitude λ

$$f_c = n \lambda \quad \text{Avec} \quad \lambda \geq 0$$

Point de contact unique sur 1 solide



Afin de caractériser le contact, on considère **la vitesse de séparation du contact ζ** , définie comme la composante normale de la vitesse linéaire de C'

$$\zeta = \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}$$

A tout instant, le contact est régi par $\zeta = 0$, ce qui signifie que le solide ne s'éloigne pas de la surface après y avoir pénétré ($\zeta > 0$) et ne va pas y pénétrer dans le futur ($\zeta < 0$)

Ensuite, on considère **l'accélération de séparation du contact $\dot{\zeta}$** , inconnue à l'instant courant, définie par:

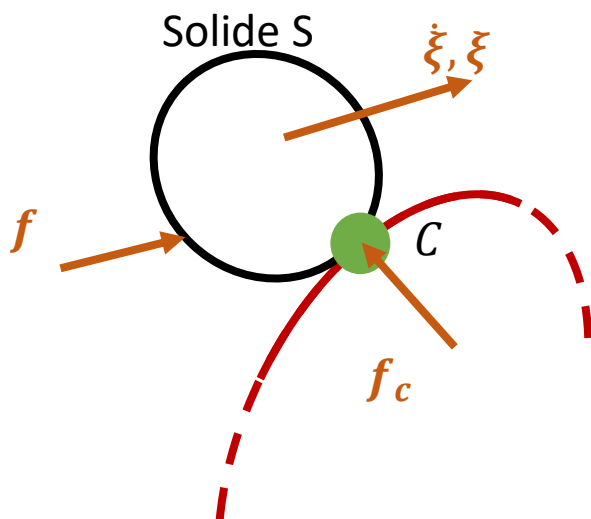
$$\dot{\zeta} = \dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{n} \cdot \ddot{\boldsymbol{\xi}}$$

$\dot{\zeta}$ ne peut être négative, sinon il y aura pénétration dans le futur. Donc $\dot{\zeta}$ respecte l'inégalité:

$$\dot{\zeta} \geq 0$$



Point de contact unique sur 1 solide



Ainsi la contrainte de contact peut être totalement définie par l'état des scalaires λ et ζ

$$\begin{cases} \dot{\zeta} > 0 \text{ et } \lambda = 0 & \text{si le contact s'arrête} \\ \dot{\zeta} = 0 \text{ et } \lambda \geq 0 & \text{si le contact continue} \end{cases}$$

Ou encore

$$\dot{\zeta} \geq 0, \lambda \geq 0, \dot{\zeta}\lambda = 0$$

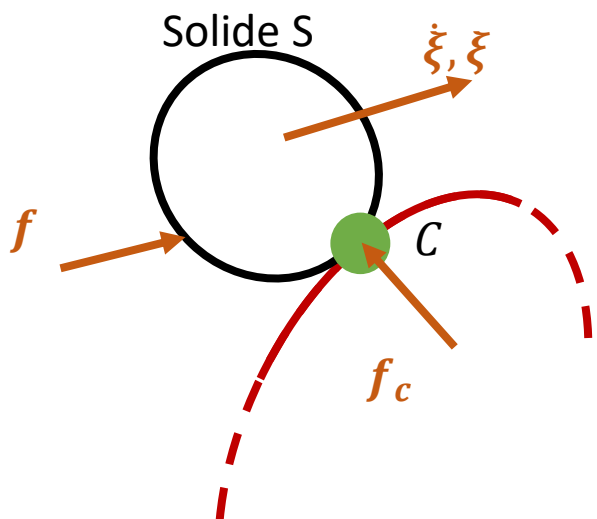
On cherche l'accélération (spatiale) $\ddot{\xi}$ et l'effort de contact f_c à tout instant

➔ Dynamique du solide S $f + n\lambda = I^s \ddot{\xi} + \dot{\xi} \times I^s \dot{\xi}$

➔ Accélération spatiale du solide $\ddot{\xi} = I^s{}^{-1}(n\lambda + f - \dot{\xi} \times I^s \dot{\xi})$ Et comme $\dot{\zeta} = \dot{n} \cdot \dot{\xi} + n \cdot \ddot{\xi}$

➔ Accélération de séparation du contact $\dot{\zeta} = \dot{n} \cdot \dot{\xi} + n \cdot I^s{}^{-1}(n\lambda + f - \dot{\xi} \times I^s \dot{\xi})$

Point de contact unique sur 1 solide



Accélération de séparation du contact $\dot{\zeta} = \dot{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\xi} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}^S{}^{-1} (\mathbf{n}\lambda + \mathbf{f} - \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{I}^S \boldsymbol{\xi})$

Ce que l'on peut réexprimer par $\dot{\zeta} = M\lambda + d$

Avec $M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}^S{}^{-1} \cdot \mathbf{n}$

Et $d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}^S{}^{-1} (\mathbf{f} - \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{I}^S \boldsymbol{\xi}) + \dot{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\xi}$

La contrainte de contact $\dot{\zeta} \geq 0, \lambda \geq 0, \dot{\zeta}\lambda = 0$

$\dot{\zeta} = d$ et $\lambda = 0$ si $d \geq 0$
 $\dot{\zeta} = 0$ et $\lambda = -d/M$ si $d < 0$

Ce qui permet de connaître à l'instant courant $\boldsymbol{\xi}$ et l'effort de contact \mathbf{f}_c

Discontinuité de l'action de liaison \rightarrow discontinuité de l'accélération



Points de contact multiples sur 1 solide

On généralise la formulation du problème pour n_c points de contact. L'effort de contact s'exprime:

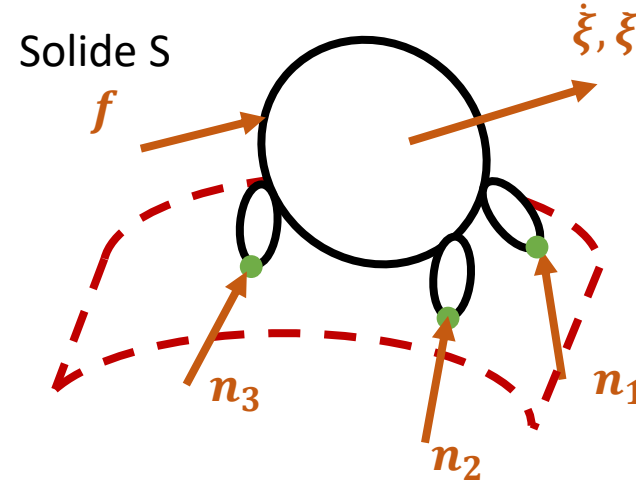
$$\mathbf{f}_c = \sum_{i=1}^{n_c} \mathbf{n}_i \lambda_i \quad \text{avec} \quad \lambda_i \geq 0$$

$$\zeta_i = \mathbf{n}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} = 0 \quad \text{À l'instant du contact}$$

$$\dot{\zeta}_i = \dot{\mathbf{n}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{n}_i \cdot \ddot{\boldsymbol{\xi}}$$

Les contraintes de contact s'expriment alors

$$\dot{\zeta}_i \geq 0, \lambda_i \geq 0, \dot{\zeta}_i \lambda_i = 0 \quad \text{Pour} \quad i = 1 \dots n_c$$

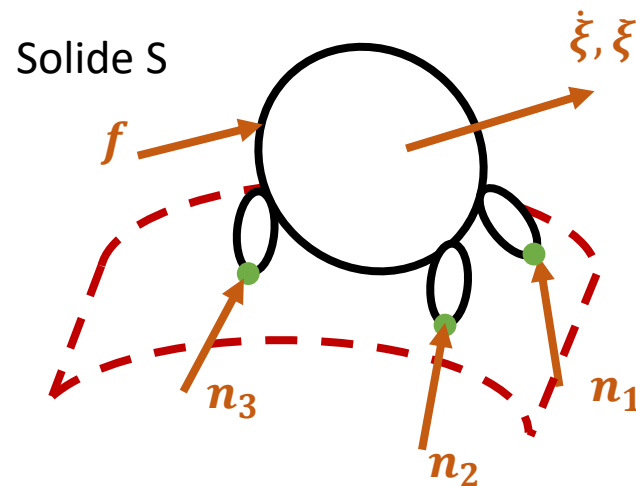


Points de contact multiples sur 1 solide

On introduit 3 nouvelles quantités:

$$N = [n_1 \ n_2 \ \dots \ n_{n_c}]$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n_c} \end{bmatrix} \quad \zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_{n_c} \end{bmatrix}$$



Les contraintes de contact s'expriment alors: $f_c = N\lambda$

$$\dot{\zeta} = N^t \dot{\xi} + \dot{N}^t \xi$$

Avec

$$\dot{\zeta} \geq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad \zeta^t \lambda = 0$$



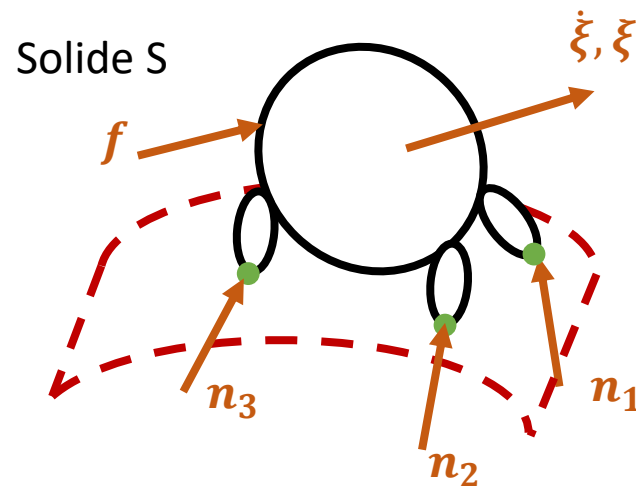
Implique

$$\dot{\zeta}_i \lambda_i = 0 \quad \text{Pour } i = 1 \dots n_c$$



Points de contact multiples sur 1 solide

→ Dynamique du solide S $f + N\lambda = I^s \dot{\xi} + \xi \times I^s \xi$



→ Accélération spatiale du solide $\dot{\xi} = I^s^{-1}(N\lambda + f - \xi \times I^s \xi)$ Et comme $\dot{\zeta} = N^t \dot{\xi} + \dot{N}^t \xi$

→ Accélération de séparation du contact $\dot{\zeta} = \dot{N}^t \cdot \xi + N^t \cdot I^s^{-1}(N\lambda + f - \xi \times I^s \xi)$

Ce que l'on peut réexprimer par $\dot{\zeta} = M\lambda + d$

Avec $M = N^t \cdot I^s^{-1} \cdot N$

Et $d = N^t \cdot I^s^{-1}(f - \xi \times I^s \xi) + \dot{N}^t \cdot \xi$

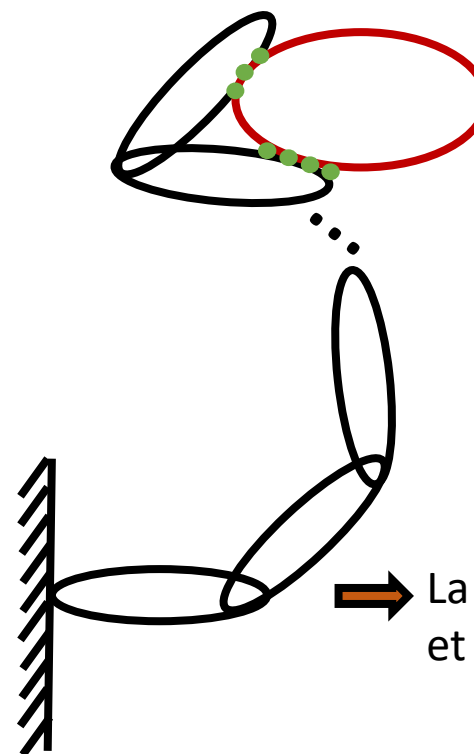
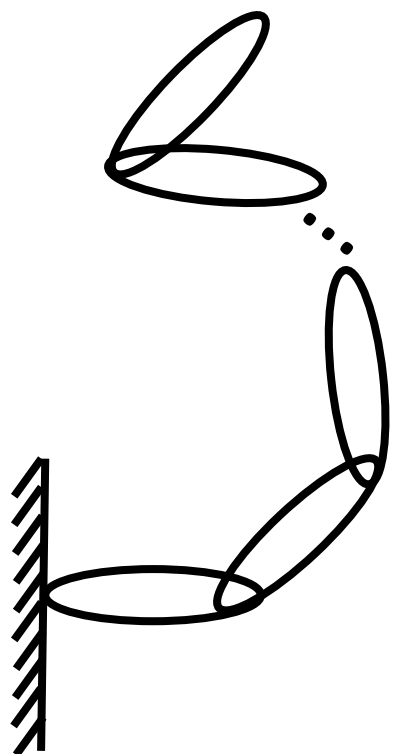
$$\dot{\zeta} \geq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad \dot{\zeta}^t \lambda = 0$$



En fonction des propriétés de M et d , ce problème peut avoir des solutions multiples pour λ menant à la même accélération spatiale $\dot{\xi} \rightarrow$ On résout par optimisation (classiquement **optimisation quadratique**)

Généralisation sur un système de solides rigides

Système de solides rigides polyarticulés



d Contraintes de contact aux points du solide définis par la géométrie

Garantie de non-pénétration:

$$\forall \alpha = 1, \dots, d, \quad \varphi_\alpha(q) \geq 0$$

La distance entre les points de contact et la surface est supérieure ou égale à 0

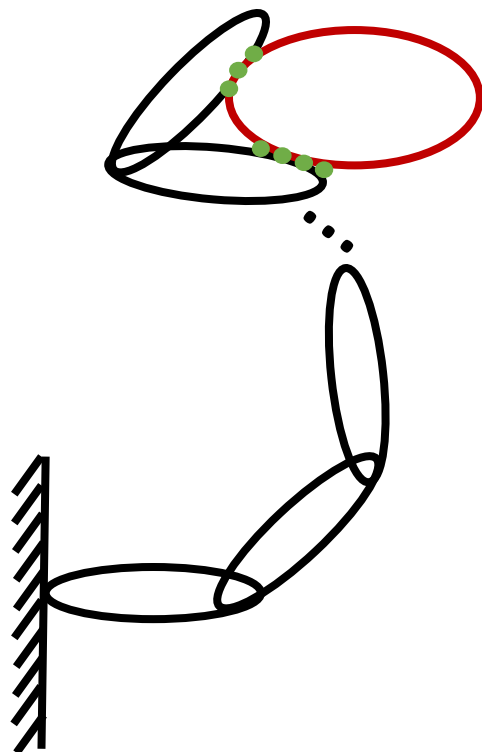


Les accélérations spatiales des solides vont être exprimées en fonction des paramètres du mouvement, les équations du mouvement sont exprimées dans l'espace articulaire



Généralisation sur un système de solides rigides

Système de solides rigides polyarticulés



Soit un système de n_b solides polyarticulés avec n_q liaisons et n_c contacts

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_c$$

Avec

$H(\mathbf{q})$

matrice de masse

$\ddot{\mathbf{q}}$

vecteur des accélérations articulaires

$\boldsymbol{\tau}$

vecteur des couples articulaires

$\mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

matrice regroupant les actions centrifuges, de Coriolis et de gravité

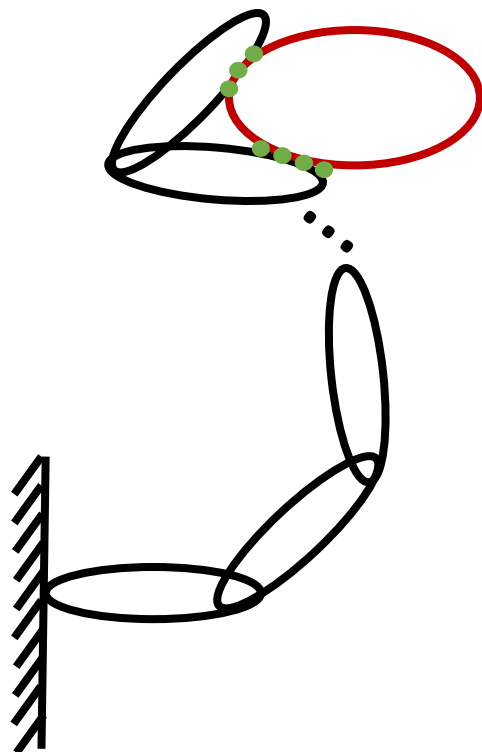
Actions de contraintes de contact
exprimées dans **l'espace articulaire**

Les accélérations spatiales des solides vont être exprimées en fonction des paramètres du mouvement, les équations du mouvement sont exprimées dans l'espace articulaire



Généralisation sur un système de solides rigides

Système de solides rigides polyarticulés



Soit un système de n_b solides polyarticulés avec n_q liaisons et n_c contacts

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_c$$

Actions de contraintes de contact exprimées dans l'espace articulaire

Entre un solide du système et un solide extérieur au système (effort extérieur)

Entre deux solides du système (inter-effort)

Les accélérations spatiales des solides vont être exprimées en fonction des paramètres du mouvement, les équations du mouvement sont exprimées dans l'espace articulaire



Espace cartésien → espace articulaire

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} + \boxed{\boldsymbol{\tau}_c} \quad \text{Pour } i = 1 \dots n_c \text{ un point de contact}$$

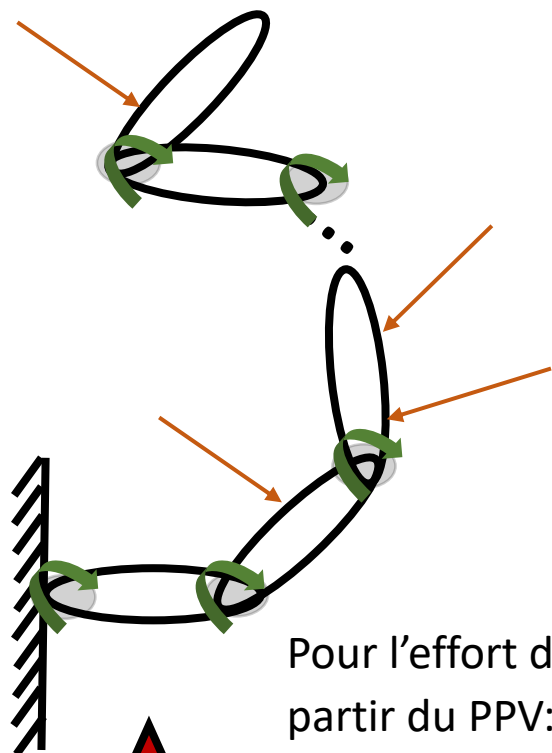
La vitesse (spatiale) du point j appartenant au solide s est donnée par

$$\xi_{si} = \sum_{k=1}^i s_k \dot{q}_k \quad s_k = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_k \times \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix}$$

$$\xi_{si} = [s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_i \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = J_i \dot{\mathbf{q}}$$

jacobienne spatiale
6 × n_q

Ce qui s'écrit encore



Pour l'effort de contact extérieur spatial f_{c_i} , la contribution aux équations de Lagrange s'écrit simplement à partir du PPV:

$$\boldsymbol{\tau}_{c_i} = J_i^t \mathbf{n}_i \lambda_i$$

Pour l'inter-effort de contact spatial f_{c_i} entre le solide p (prédécesseur) et le solide s (successeur), la contribution aux équations de Lagrange s'écrit simplement à partir du PPV (vitesse relative entre les deux solides):

$$\boldsymbol{\tau}_{c_i} = (J_{si}^t - J_{pi}^t) \mathbf{n}_i \lambda_i$$



Espace cartésien \rightarrow espace articulaire

En posant $\mathbf{t}_i = (\mathbf{J}_{si}^t - \mathbf{J}_{pi}^t)\mathbf{n}_i$ pour un inter-effort et $\mathbf{t}_i = \mathbf{J}_i^t\mathbf{n}_i$ pour un effort extérieur

$$\boldsymbol{\tau}_{c_i} = \mathbf{t}_i \lambda_i$$

La contribution de tous les points de contacts sur le système est alors la somme de toutes ces actions dans l'espace articulaire

$$\boldsymbol{\tau}_c = \sum_{i=1}^{n_c} \mathbf{t}_i \lambda_i$$



Espace cartésien \rightarrow espace articulaire

Comme précédemment, on exprime la vitesse et l'accélération de séparation en fonction des paramètres du mouvement

La vitesse (spatiale) du point j appartenant au solide s est donnée par

$$\xi_{si} = [s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_i \quad \dots \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_i \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = J_i \dot{q}$$

$$\zeta_i = \mathbf{n}_i \cdot \xi_{si} = \mathbf{n}_i \cdot J_i \dot{q} \quad \text{Pour un effort extérieur}$$

$$\zeta_i = \mathbf{n}_i \cdot \xi_{rel_i} = \mathbf{n}_i \cdot (J_{si} - J_{pi}) \dot{q} \quad \text{Pour un inter-effort}$$

En posant $\mathbf{t}_i = (J_{si}^t - J_{pi}^t) \mathbf{n}_i$ pour un inter-effort et $\mathbf{t}_i = J_i^t \mathbf{n}_i$ pour un effort extérieur

$$\zeta_i = \mathbf{t}_i^t \dot{q}$$

Et ainsi

$$\dot{\zeta}_i = \dot{\mathbf{t}}_i^t \cdot \dot{q} + \mathbf{t}_i \cdot \ddot{q}$$

Espace cartésien \rightarrow espace articulaire

En définissant
comme

$T = [t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_{n_c}]$ on peut réécrire les équations de contact dans l'espace articulaire

$$\begin{cases} \tau_c = T\lambda \\ \dot{\zeta} = \dot{T}^t \cdot \dot{q} + T \cdot \ddot{q} \end{cases}$$

On peut alors lier ces deux équations par les équations du mouvement

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) = \tau + \tau_c \quad \Rightarrow \quad H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) = \tau + T\lambda$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{q} = H^{-1}(T\lambda + \tau - C)$$

Ce qui permet alors d'écrire $\dot{\zeta} = M\lambda + d$

Sous les contraintes

$$\dot{\zeta} \geq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad \dot{\zeta}^t \lambda = 0$$

Avec $M = T^t H^{-1} T$ Et $d = T^t H^{-1}(\tau - C) + \dot{T}^t \cdot \dot{q}$

Résolution

On cherche à tout instant à résoudre

$$\begin{cases} H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{T}\boldsymbol{\lambda} \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{d}, \boldsymbol{\zeta} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \dot{\boldsymbol{\zeta}}^t \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Ce qui revient à résoudre le problème d'optimisation quadratique suivant:

$$\begin{cases} \min_{\boldsymbol{\lambda}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{M} \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{d} \\ \text{t. q.} \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

(généralement une méthode des contraintes actives maintient la liste des contacts actifs pour éviter des calculs inutiles)



Comme toute contrainte, nécessité de régularisation pour permettre une résolution efficace.

Simulation des systèmes de solides rigides polyarticulés

7- Gestion des contacts

Charles Pontonnier

