Dynamique inverse numérique

Algorithme de Newton-Euler

Charles Pontonnier

Problématique

Au temps t_k

Forces extérieures

$\boldsymbol{f_e}(t_k)$

Equations du mouvement

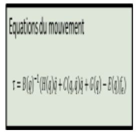
$$\tau = B(q)^{-1}(H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) - E(q)f_e)$$

Couples articulaires

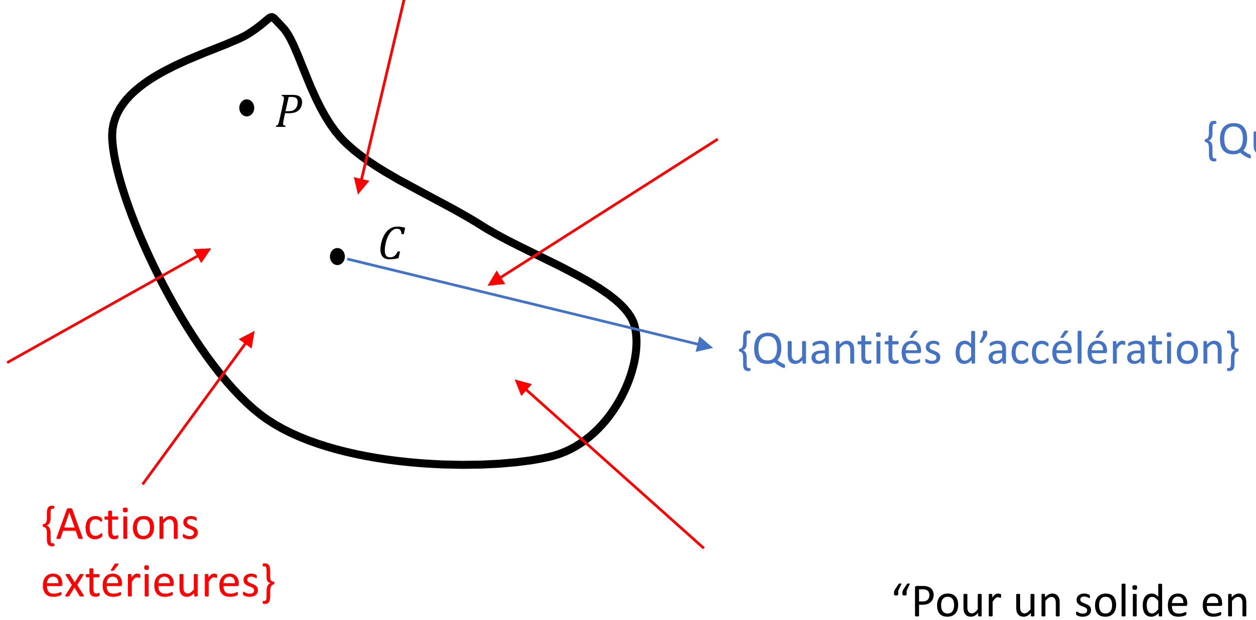
$\boldsymbol{\tau}(t_k)$

$(\boldsymbol{q_d}(t_k), \boldsymbol{\dot{q}_d}(t_k), \boldsymbol{\ddot{q}_d}(t_k))$

Angles, vitesses, accélérations

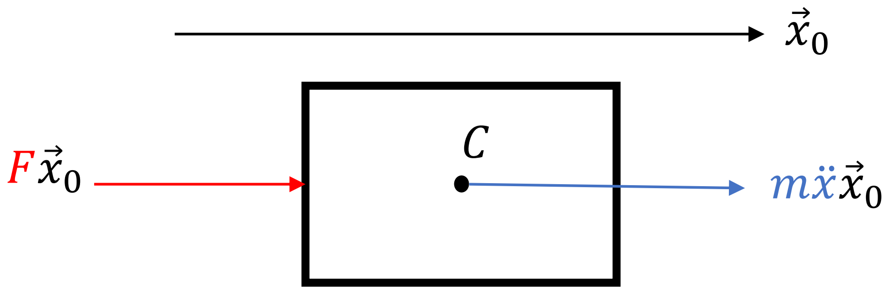


Equilibre d'un solide S



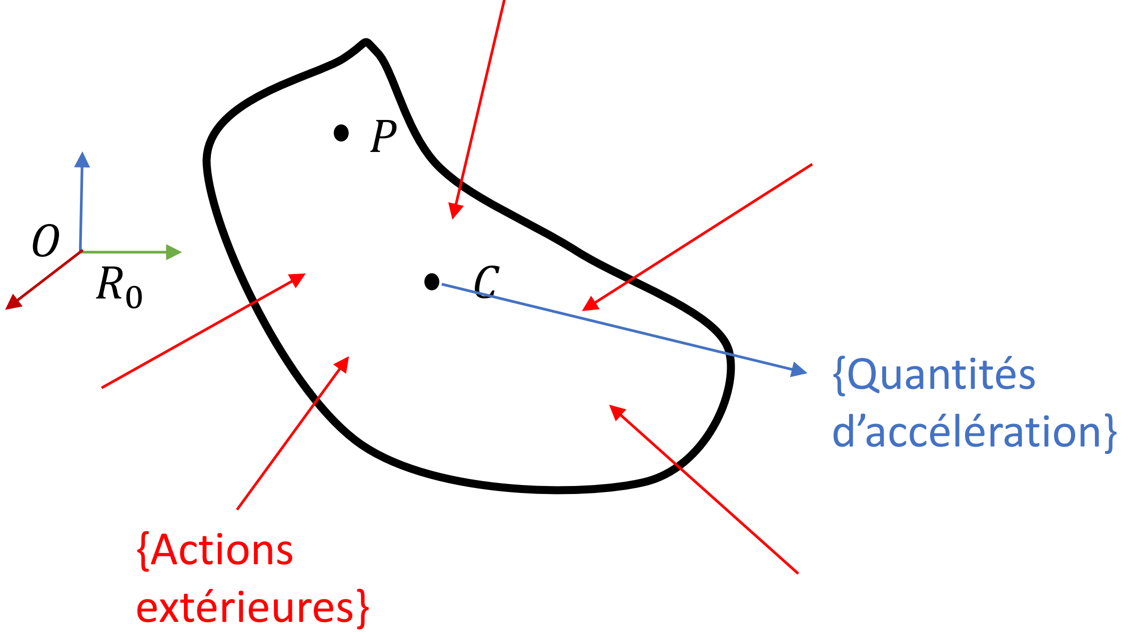
{Quantités d'accélération}={Forces extérieures}

"Pour un solide en translation…"



$m\ddot{x} = F$

Equilibre d'un solide S

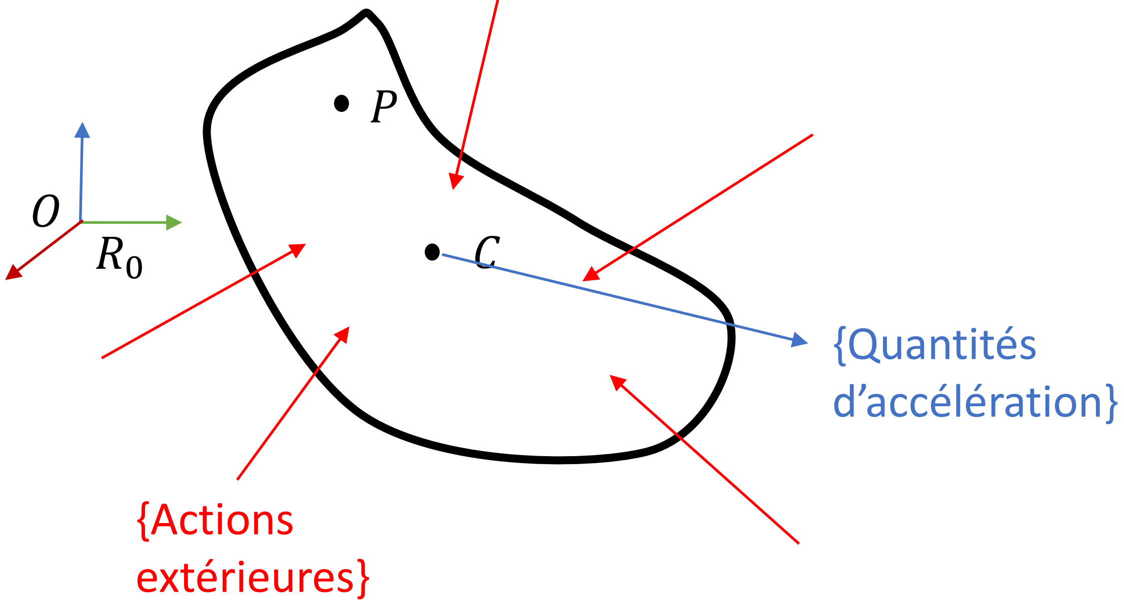


Au centre de masse

$$\begin{cases} \boldsymbol{f} = m\ddot{\boldsymbol{c}} & (1) \\ \boldsymbol{\tau}^{(c)} = \boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} & (2) \end{cases}$$

$\boldsymbol{f}$	actions extérieures
m	masse du solide
$\boldsymbol{c}$	Centre de masse du solide dans R_0 (repère fixe)
$\boldsymbol{\omega}$	vitesse angulaire du solide / R_0 et exprimée dans R_0
$\boldsymbol{I}$	Matrice d'inertie du solide exprimée dans R_0
$\boldsymbol{\tau}^{(c)}$	couple associé aux actions extérieures, exprimé au centre de masse dans R_0

Equilibre d'un solide S en dynamique inverse

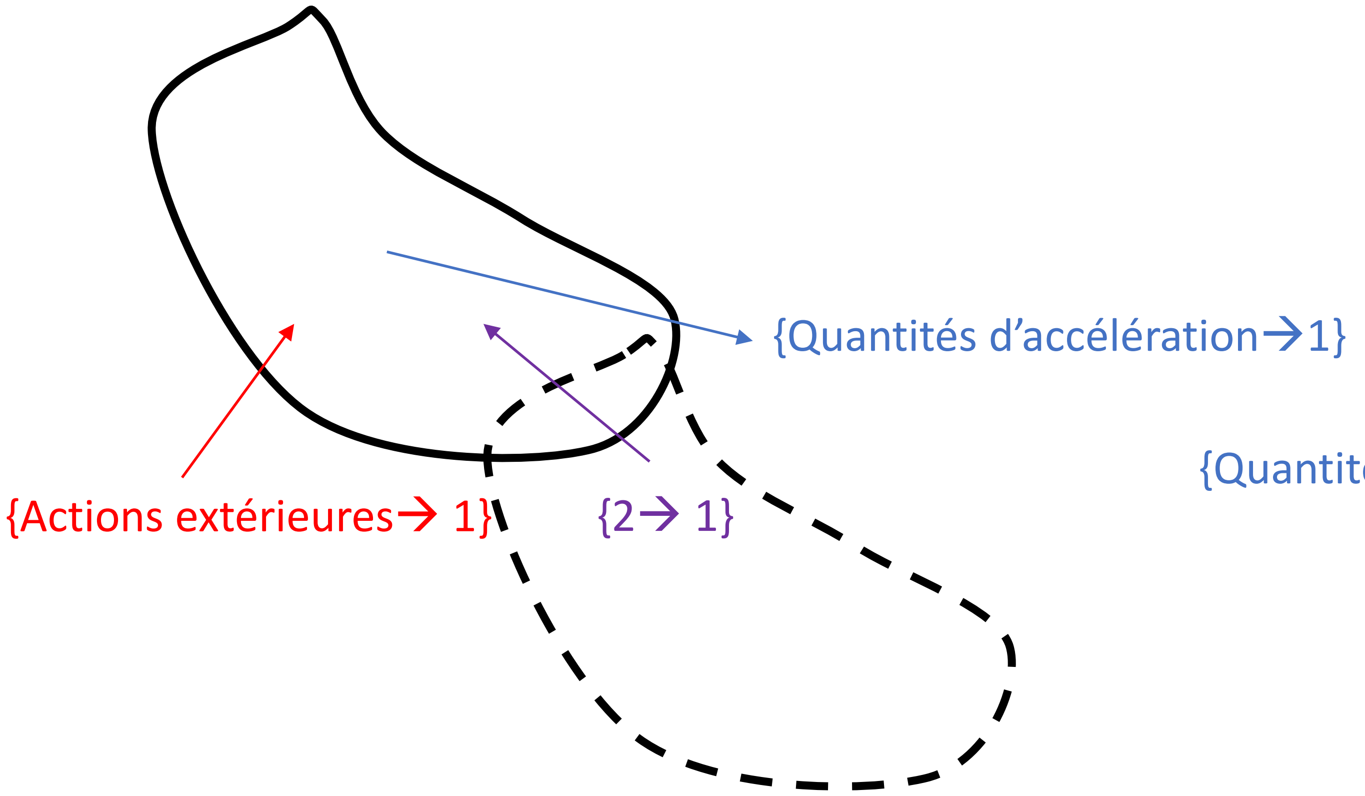


Au centre de masse

$$\begin{cases} \boldsymbol{f} = m\ddot{\boldsymbol{c}} & (1) \\ \boldsymbol{\tau}^{(c)} = \boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} & (2) \end{cases}$$

$\boldsymbol{f}$	actions extérieures → connu (mesuré/modélisé)
m	masse du solide → connu (mesuré/modélisé)
$\boldsymbol{c}$	Centre de masse du solide dans R_0 (repère fixe) → connu (calculé grâce à $\boldsymbol{q}$)
$\boldsymbol{\omega}$	vitesse angulaire du solide / R_0 et exprimée dans R_0 → connu (calculé grâce à $\boldsymbol{q}$)
$\boldsymbol{I}$	Matrice d'inertie du solide exprimée dans R_0 → connu (mesuré/modélisé)
$\boldsymbol{\tau}^{(c)}$	couple associé aux actions extérieures, exprimé au centre de masse dans R_0 → connu (mesuré/modélisé)

Equilibre d’une chaine de solides



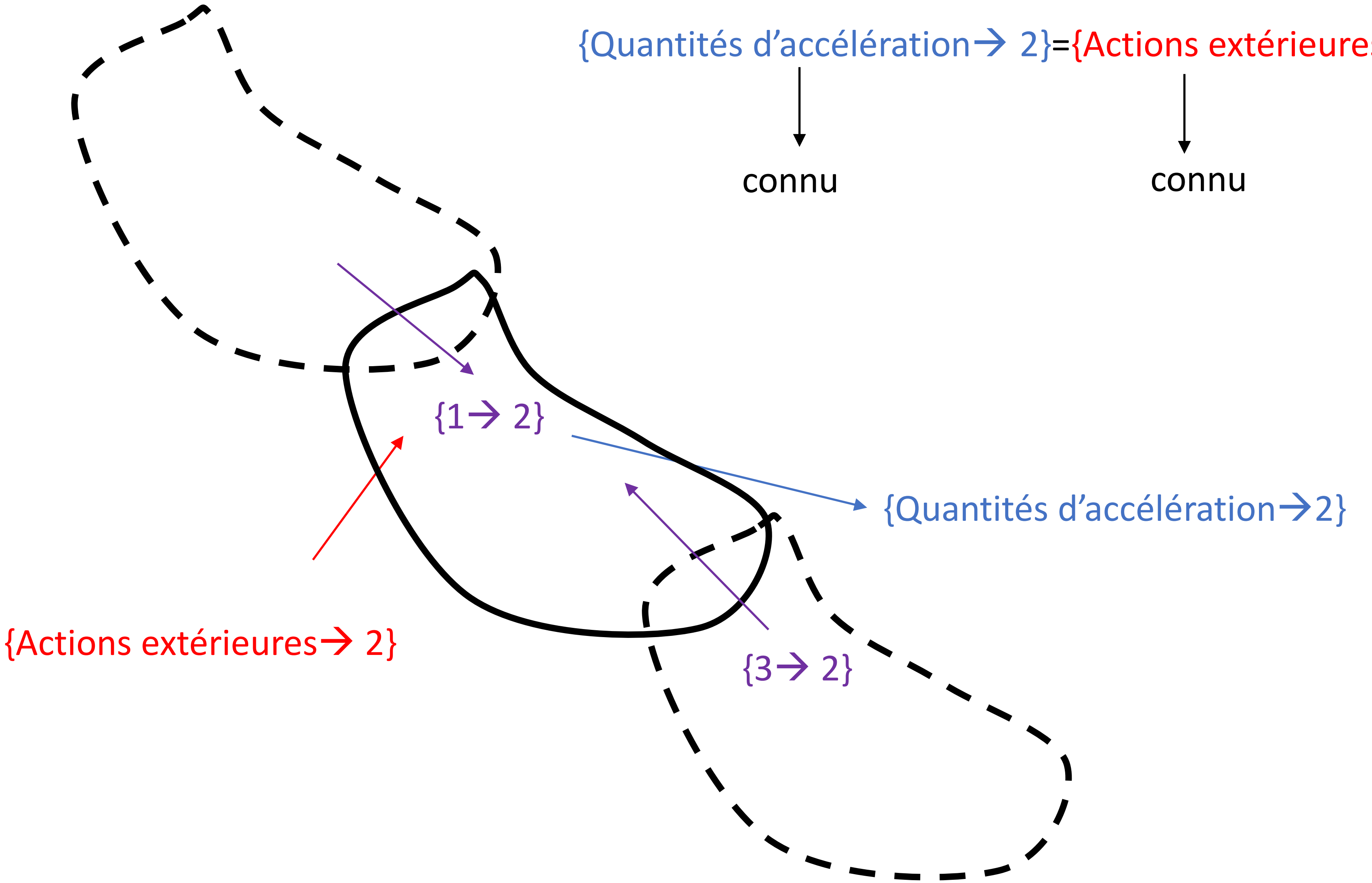
Connu | Connu | Calculé !

{Quantités d’accélération→ 1}={Actions extérieures→1} +{2→1}

Equilibre d’une chaine de solides

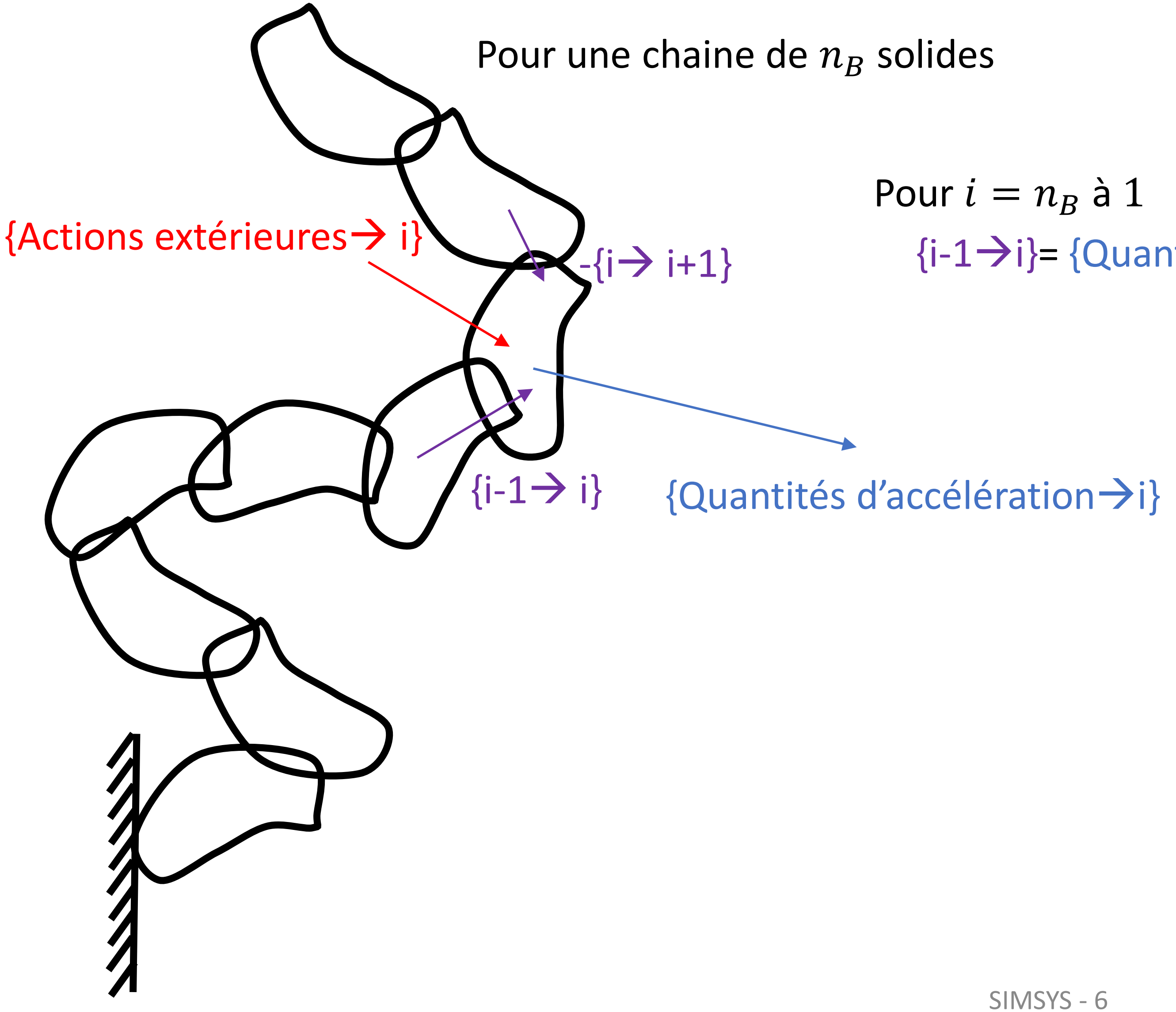
{Quantités d’accélération→ 2}={Actions extérieures→2} +{1→2}+{3→2}

connu connu -{2→1} Calculé !



Algorithme de Newton-Euler

Pour une chaine de n_B solides



Pour $i = n_B$ à 1

{i-1→i}= {Quantités d'accélération→ i}-{Actions extérieures→i}+{i→ i+1}

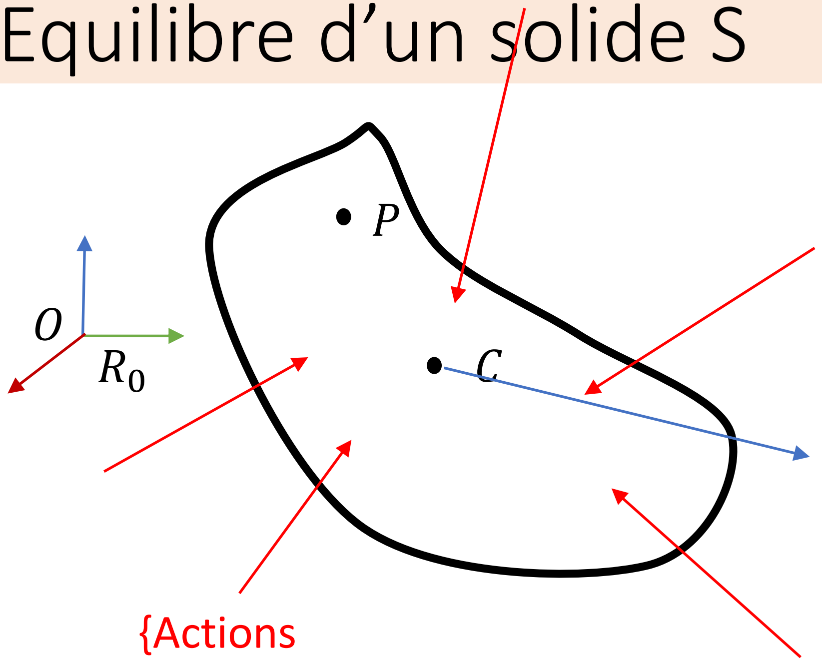
Facile ! Mais il faut aller un peu dans le détail…

Dynamique inverse numérique

Newton-Euler en algèbre spatiale

Charles Pontonnier

Equilibre d'un solide S

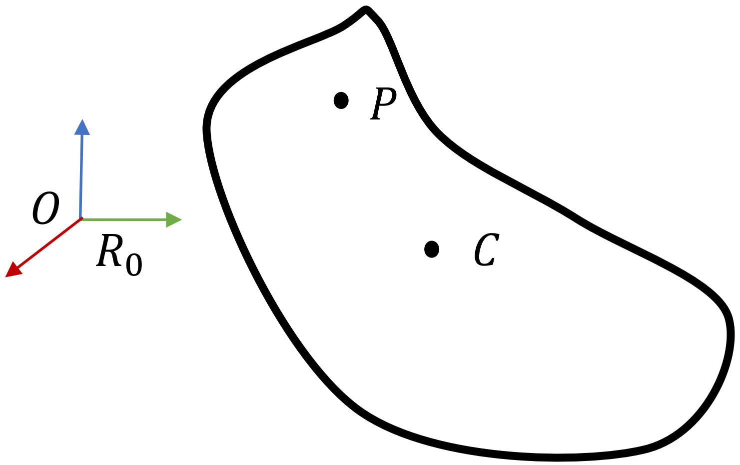


Au centre de masse

$$\begin{cases} \boldsymbol{f} = m\ddot{\boldsymbol{c}} & (1) \\ \boldsymbol{\tau}^{(c)} = \boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} & (2) \end{cases}$$

$\boldsymbol{f}$	actions extérieures
m	masse du solide
$\boldsymbol{c}$	Centre de masse du solide dans R_0 (repère fixe)
$\boldsymbol{\omega}$	vitesse angulaire du solide / R_0 et exprimée dans R_0
$\boldsymbol{I}$	Matrice d'inertie du solide exprimée dans R_0
$\boldsymbol{\tau}^{(c)}$	couple associé aux actions extérieures, exprimé au centre de masse dans R_0

Equations du mouvement spatiales [Featherstone2007]



Vitesse de S en O : $\boldsymbol{v}_O = \dot{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{\omega}$

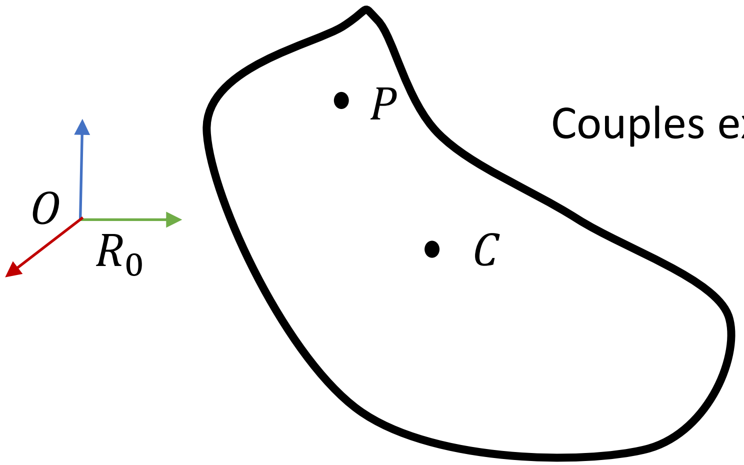
Accélération de S en O: $\dot{\boldsymbol{v}}_O = \ddot{\boldsymbol{c}} + \dot{\boldsymbol{c}} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{c} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}$

L'accélération du centre de masse devient $\ddot{\boldsymbol{c}} = \dot{\boldsymbol{v}}_O - \boldsymbol{c} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c})$

En replacant dans 1, il vient

$$\boldsymbol{f} = m(\dot{\boldsymbol{v}}_O - \boldsymbol{c} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}))$$

Equations du mouvement spatiales [Featherstone2007]



Couples exprimés en O:

$$\boldsymbol{\tau}^{(O)} = \boldsymbol{\tau}^{(c)} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{f}$$

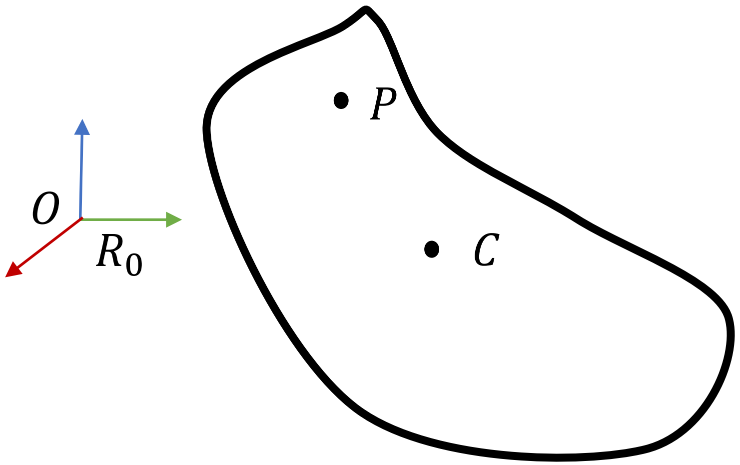
Avec $\boldsymbol{f} = m(\dot{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{O}} - \boldsymbol{c} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{O}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}))$

Et $\boldsymbol{\tau}^{(c)} = \boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}$

Finalement:

$$\boldsymbol{\tau}^{(O)} = \boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{c} \times m(\dot{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{O}} - \boldsymbol{c} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{O}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}))$$

Equations du mouvement spatiales [Featherstone2007]



$$\boldsymbol{f} = m(\dot{\boldsymbol{v}}_O - \boldsymbol{c} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}))$$

$$\boldsymbol{\tau}^{(O)} = \boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{c} \times m(\dot{\boldsymbol{v}}_O - \boldsymbol{c} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}))$$

Ce qui peut être écrit sous forme matricielle

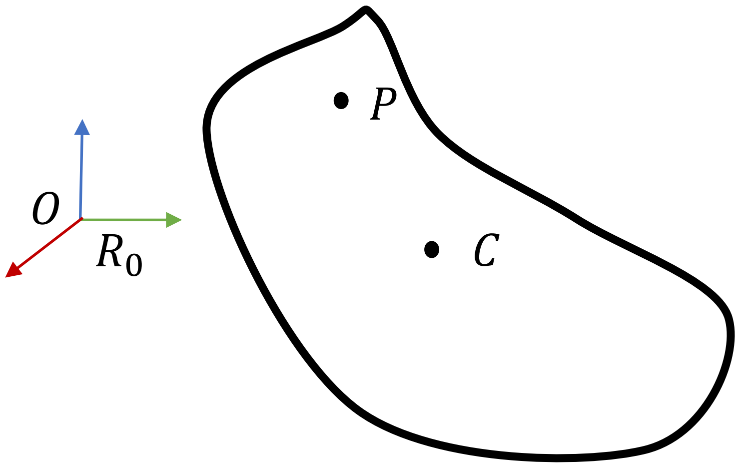
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{f} \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}^S \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\boldsymbol{v}}_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\omega}} & \widehat{\boldsymbol{v}_O} \\ \boldsymbol{0} & \widehat{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} \boldsymbol{I}^S \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_O \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}^S \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\boldsymbol{v}}_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v}_O \end{bmatrix} \times \boldsymbol{I}^S \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v}_O \end{bmatrix}$$

(application produit vectoriel)

$$\widehat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Cette expression implique deux quantités spatiales fondamentales pour la dynamique des solides rigides: $\boldsymbol{I}^S$ matrice d'inertie spatiale et $\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{v}}_O \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{\xi}}$ accélération spatiale du solide S

Inertie spatiale et accélération spatiale



$\mathbb{I}$ matrice identité

Matrice d'inertie spatiale: Matrice symétrique 6 x 6 :

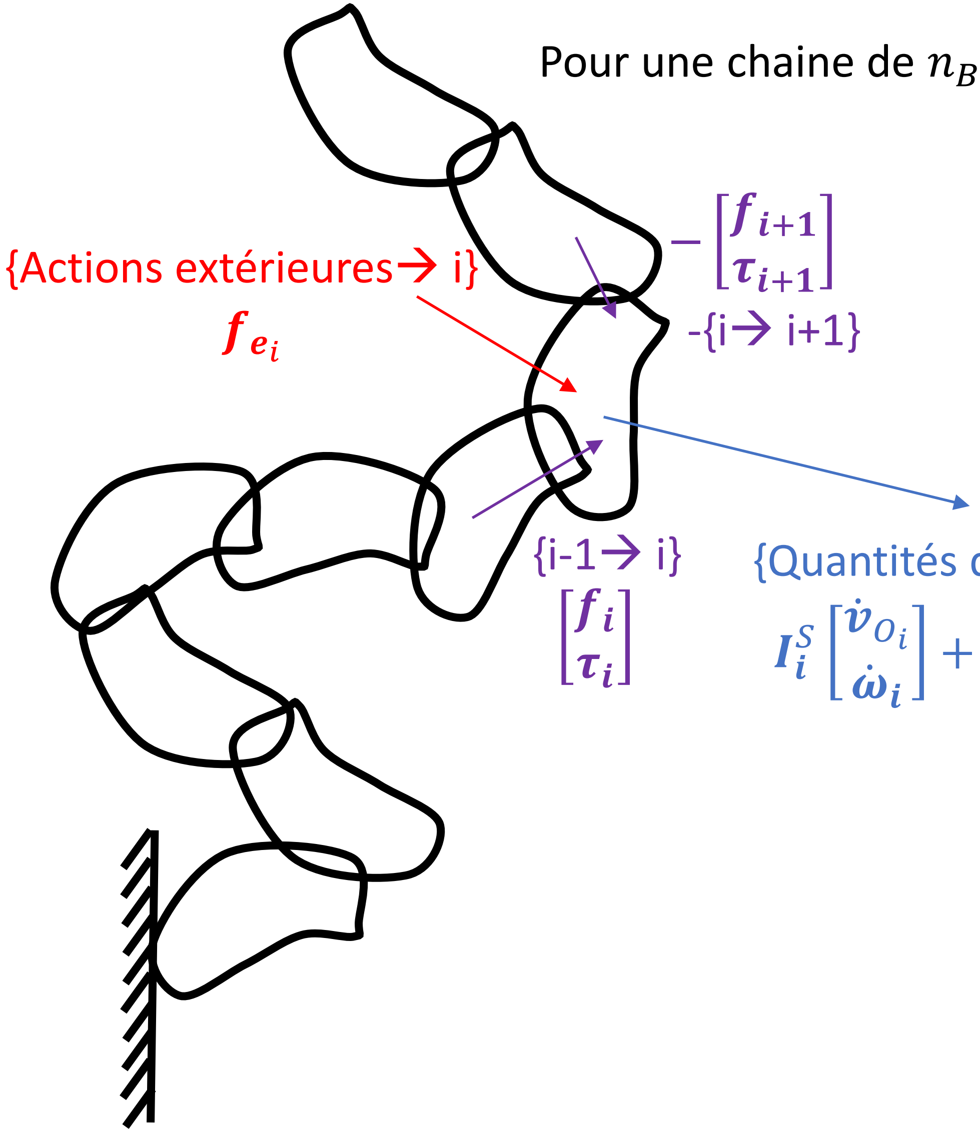
$$\boldsymbol{I^s} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} - m\hat{\boldsymbol{c}}\hat{\boldsymbol{c}} & m\hat{\boldsymbol{c}} \\ m\hat{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{t}} & \boldsymbol{m}\mathbb{I} \end{bmatrix}$$

Accélération spatiale: pas une accélération physique (taux de variation du flux de vitesse en O)

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{v}}_O \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{\xi}}$$

Algorithme de Newton-Euler

Pour une chaine de n_B solides



{Quantités d'accélération→i}

$$\boldsymbol{I}_i^S\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{v}}_{O_i}\\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_{O_i}\\ \boldsymbol{\omega}_i\end{bmatrix}\times\boldsymbol{I}_i^S\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_{O_i}\\ \boldsymbol{\omega}_i\end{bmatrix}$$

Pour $i = n_B$ à 1

{i-1→i}= {Quantités d'accélération→ i}-{Actions extérieures→i}+{i→ i+1}

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_{i}\\ \boldsymbol{\tau}_{i}\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}_i^S\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{v}}_{O_i}\\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_{O_i}\\ \boldsymbol{\omega}_i\end{bmatrix}\times\boldsymbol{I}_i^S\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_{O_i}\\ \boldsymbol{\omega}_i\end{bmatrix}-\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{e}_i}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_{i+1}\\ \boldsymbol{\tau}_{i+1}\end{bmatrix}$$

Algorithme de Newton-Euler

Algorithme itératif

Connaissant les positions, vitesses, accélérations articulaires et les actions extérieures à l'instant t_k

1. Calculer les vitesses et accélérations spatiales de l'ensemble des solides de la base vers l'extrémité
2. Calculer les efforts d'actionnement de l'extrémité vers la base

Au temps t_k

For $i = 1$ to n_B do

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{i}} = f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{e}_i}, \dot{\boldsymbol{\xi}}_{\lambda(\boldsymbol{i})})$$

End

For $i = n_B$ to 1 do

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}} = f(\dot{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{e}_i}, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{i})}})$$

End

Algorithme de Newton-Euler

For $i = 1$ to n_B do

$$\dot{\xi}_i = f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{f}_{e_i}, \dot{\xi}_{\lambda(i)})$$

End

For $i = n_B$ to 1 do

$$\boldsymbol{f}_{a_i} = f(\dot{\boldsymbol{\xi}}_i, \boldsymbol{f}_{e_i}, \boldsymbol{f}_{a_{\mu(i)}})$$

End

$$\begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\omega}}_i & \boldsymbol{0} \\ \widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{0}_i} & \widehat{\boldsymbol{\omega}}_i \end{bmatrix}$$

Spatial → tout est calculé en O

$$\left.\begin{aligned} {}^{0}\boldsymbol{R}_i &= {}^{0}\boldsymbol{R}_{\lambda(i)} \, {}^{\lambda(i)}\boldsymbol{R}_i(\boldsymbol{q}_i) \\ \boldsymbol{p}_i &= \boldsymbol{p}_{\lambda(i)} + {}^{0}\boldsymbol{R}_{\lambda(i)} \boldsymbol{b}_i \end{aligned}\right\}$$

Mise à jour de la position et de l'orientation du solide

$${}^{(0)}\boldsymbol{u}_i = {}^{0}\boldsymbol{R}_{\lambda(i)} \, {}^{\lambda(i)}\boldsymbol{u}_i$$

Mise à jour de l'orientation de l'axe de la liaison entre $\boldsymbol{i-1}$ et $\boldsymbol{i}$

$$\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\lambda}(i)} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{p}_i \times \boldsymbol{u}_i \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_i$$

Mise à jour de la vitesse spatiale

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_i = \dot{\boldsymbol{\xi}}_{\lambda(i)} + \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\omega}}_i & \boldsymbol{0} \\ \widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{0}_i} & \widehat{\boldsymbol{\omega}}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{p}_i \times \boldsymbol{u}_i \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_i + \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{p}_i \times \boldsymbol{u}_i \end{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}}_i$$

Mise à jour de l'accélération spatiale

Algorithme de Newton-Euler

For $i = 1$ to n_B do

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_i = f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{e}_i}, \dot{\boldsymbol{\xi}}_{\lambda(\boldsymbol{i})})$$

End

For $i = n_B$ to 1 do

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}_i} = f(\dot{\boldsymbol{\xi}}_i, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{e}_i}, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{i})}})$$

End

$$^{(0)}\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{p}_i + {}^{0}\boldsymbol{R}_i{}^{i-1}\boldsymbol{c}_i$$

Mise à jour de la position du centre de masse de $\boldsymbol{i}$

$$\boldsymbol{I}_i^s = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_i - m_i\hat{\boldsymbol{c}}_i\hat{\boldsymbol{c}}_i & m_i\hat{\boldsymbol{c}}_i \\ m_i\hat{\boldsymbol{c}}_i{}^{t} & \boldsymbol{m}_i\mathbb{I} \end{bmatrix}$$

Mise à jour de l'inertie spatiale de $\boldsymbol{i}$

$$\boldsymbol{f}_i^{acc} = \boldsymbol{I}_i^s\dot{\boldsymbol{\xi}}_i + \underbrace{\boldsymbol{\xi}_i \times^*}_{\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}}_i & \hat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{0}_i} \\ \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{\omega}}_i \end{bmatrix}} \boldsymbol{I}_i^s\boldsymbol{\xi}_i$$

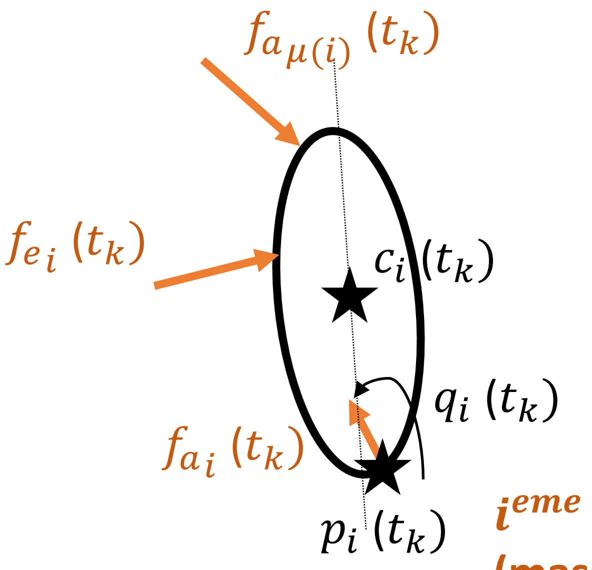
Mise à jour des quantités d'accélération de $\boldsymbol{i}$

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}_i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_i \\ \boldsymbol{f}_i \end{bmatrix} = \boldsymbol{f}_i^{acc} - \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{e}_i} - \sum_{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{i})} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}_j}$$

Calcul des efforts articulaires entre le solide $\boldsymbol{i}$ et le solide $\boldsymbol{i}-\mathbf{1}$

(Joint torque extraction $\boldsymbol{\tau}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{p}_i \times \boldsymbol{u}_i \end{bmatrix}^t \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}_i}$)

$$\boldsymbol{\tau}_i^{(p_i)}.\boldsymbol{u}_i = \left(\boldsymbol{\tau}_i^{(0)} + \boldsymbol{f}_i \times \boldsymbol{p}_i\right).\boldsymbol{u}_i$$



$\boldsymbol{i}^{eme}$ solide à l'instant $\boldsymbol{t_k}$ (masse $\boldsymbol{m_i}$ inertie $\boldsymbol{I_i}$)

Résumé

En notations synthétiques: $\boldsymbol{s}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{p}_i \times \boldsymbol{u}_i \end{bmatrix}$ $\dot{\boldsymbol{s}}_i = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\omega}}_i & \boldsymbol{0} \\ \widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{0}_i} & \widehat{\boldsymbol{\omega}}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{p}_i \times \boldsymbol{u}_i \end{bmatrix}$

4 étapes d'algorithme

$\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\xi}_{i-1} + \boldsymbol{s}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i$ (mise à jour de la vitesse spatiale)

$\dot{\boldsymbol{\xi}}_i = \dot{\boldsymbol{\xi}}_{i-1} + \boldsymbol{s}_i \ddot{\boldsymbol{q}}_i + \dot{\boldsymbol{s}}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i$ (mise à jour de l'accélération spatiale)

For i from1 to n_B

$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}_i} = \boldsymbol{I}_i^s \dot{\boldsymbol{\xi}}_i + \boldsymbol{\xi}_i \times \boldsymbol{I}_i^s \boldsymbol{\xi}_i - \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{e}_i} + \sum_{\mu(i)} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}_j}$ (calcul des actions de $\lambda(i)$ sur i)

$\tau_i = \boldsymbol{s}_i^T \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}_i}$ (Extraction des couples articulaires)

For i from n_B to 1

Nécessite le calcul de l'ensemble des quantités en O