Simulation des systèmes de solides rigides polyarticulés

3- Modèle dynamique analytique

Charles Pontonnier

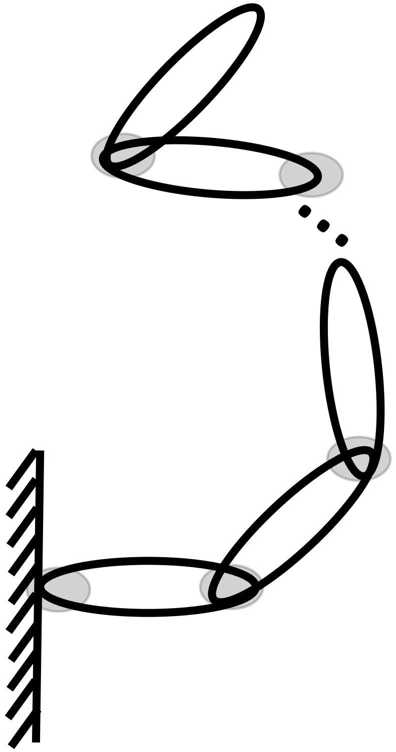
Objectifs

On cherche à simuler le comportement dynamique de systèmes polyarticulés de solides rigides

On sait exploiter des logiciels de calcul symbolique (Matlab, Maple, Symoro+,…) pour établir des modèles dynamiques analytiques des systèmes de solides rigides polyarticulés

⇒ Cette présentation développe une méthode classique d'obtention du modèle dynamique analytique d'un robot arborescent classique

Equations du mouvement



Soit un système de n_b
solides polyarticulés avec n_q liaisons
Chaine arborescente simple: $n_b = n_q = n$

$$H(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + G(\boldsymbol{q}) = E(\boldsymbol{q})\boldsymbol{f_e} + B(\boldsymbol{q})\boldsymbol{f_a}$$

Efforts des actionneurs

Matrice de masse

Coriolis/centrifuge

Gravité

Efforts extérieurs

Les $\boldsymbol{n}$ équations peuvent prendre la forme suivante

OU ENCORE

$$H(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \underbrace{C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{f_e} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{f_a}$$

On regroupe les termes de Coriolis/centrifuge et gravité

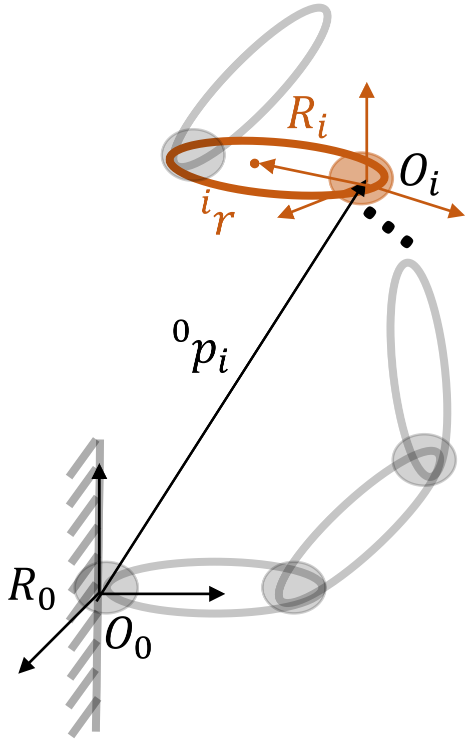
Question

Comment systématiser l'obtention des matrices $H(q), C(q,\dot{q})$ et $G(q)$?

On repart des équations de Lagrange

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}T - \frac{\partial}{\partial q_i}T + \frac{\partial}{\partial q_i}E_p}_{\text{calcul et différentiation de } T \text{ et } E_p} = \underbrace{Q_i'}_{\text{Projection des efforts non conservatifs}}$$

Energie cinétique d’un solide S_i

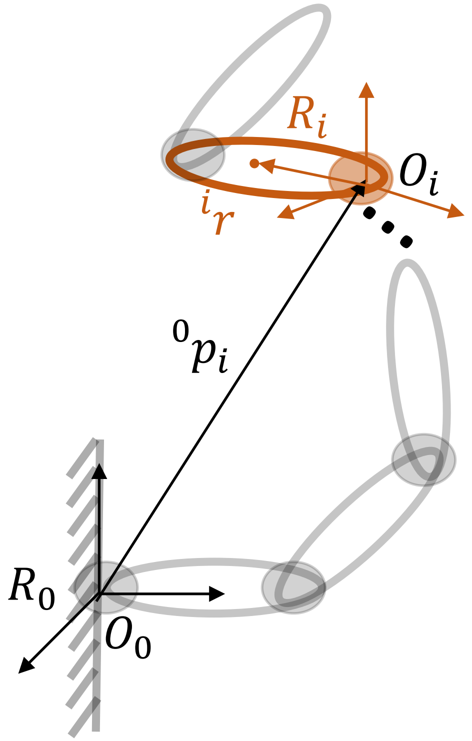


R_0 repère de référence (galiléen)
R_i repère associé au solide S_i et centré sur la liaison i

${}^0 p_i$ vecteur origine du repère R_i dans R_0
${}^0 R_i$ matrice de rotation du repère R_i dans R_0
${}^i r$ vecteur position d’un point arbitraire de S_i dans R_i
${}^0 r$ vecteur position d’un point arbitraire de S_i dans R_0
${}^0 \bar{r}_i$ vecteur position du centre de masse de S_i dans R_0
${}^0 \omega_i$ vecteur des vitesses angulaires du solide S_i exprimé dans R_0
${}^i \omega_i$ vecteur des vitesses angulaires du solide S_i dans R_i

Simplification des notations pour alléger les expressions ensuite

Energie cinétique 2.0



On peut décrire la position du point r: $${}^0 r = {}^0 p_i + {}^0 R_i \; {}^i r$$

Donc sa vitesse s'exprime: $${}^0 \dot{r} = {}^0 \dot{p}_i + {}^0 \dot{R}_i \; {}^i r$$

Soit ${}^i \omega_i$ le vecteur vitesse angulaire du solide S_i exprimé dans R_i.
La dérivée en base mobile nous donne

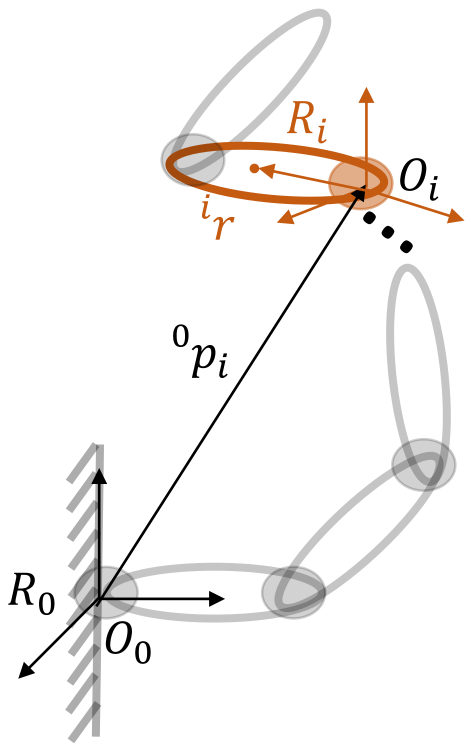
$${}^0 \dot{r} = {}^0 \dot{p}_i + {}^0 \omega_i \times {}^i r = {}^0 \dot{p}_i + {}^0 R_i \; {}^i \omega_i \times {}^i r$$

On peut alors réécrire ${}^0 \dot{R}_i = {}^0 R_i \; {}^i \widehat{\omega}_i$

Où ${}^i \widehat{\omega}_i = {}^i R_0 \; {}^0 \dot{R}_i = \begin{bmatrix} 0 & -{}^i \omega_{iz} & {}^i \omega_{iy} \\ {}^i \omega_{iz} & 0 & -{}^i \omega_{ix} \\ -{}^i \omega_{iy} & {}^i \omega_{ix} & 0 \end{bmatrix}$ la matrice antisymétrique (application produit vectoriel)

et $\left({}^i \widehat{\omega}_i \right)^{\smile} = {}^i \omega_i = \begin{bmatrix} {}^i \omega_{ix} \\ {}^i \omega_{iy} \\ {}^i \omega_{iz} \end{bmatrix}$

Energie cinétique 2.0



L'énergie cinétique de ce solide s'exprime:

$$T(S_i/R_0) = \frac{1}{2}\int_{S_i} \| {}^0\dot{r}_i \|^2 \, dm = \overbrace{\frac{1}{2}\, {}^0\dot{\bar{r}}_i^{\,t}\, m_i\, {}^0\dot{\bar{r}}_i + \frac{1}{2}\, {}^i\omega_i^{\,t}\, \bar{\bar{I}}(\bar{r}_i, S_i)\, {}^i\omega_i}^{\text{Au centre de masse}}$$

Or sans dépendance explicite au temps

$${}^0\dot{\bar{r}}_i = \sum_{k=1}^{i} \frac{\partial\, {}^0\bar{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = J_{\bar{r}_i}(q)\dot{q} \Rightarrow$$

Expression impliquant la jacobienne du centre de masse de S_i (que l'on définit pour tous les paramètres q)

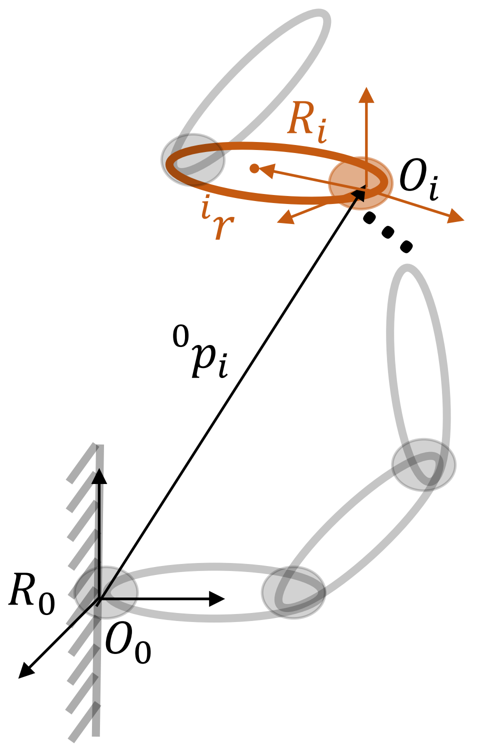
$$\text{et } {}^i\hat{\omega}_i = {}^iR_0\, {}^0\dot{R}_i = {}^iR_0 \sum_{k=1}^{i} \frac{\partial\, {}^0R_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \rightarrow \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \dot{q}_2 + \ldots$$

On peut alors réécrire le vecteur des vitesses angulaires

$$\left({}^i\hat{\omega}_i\right)^{\vee} = {}^i\omega_i = \sum_{k=1}^{i} \left({}^iR_0 \frac{\partial\, {}^0R_i}{\partial q_k} \right)^{\vee} \dot{q}_k = J_{\omega i}(q)\dot{q} \Rightarrow$$

Expression impliquant la jacobienne de la rotation de S_i

Energie cinétique 2.0



L'énergie cinétique de ce solide s'exprime alors:

$$T(S_i/R_0) = \frac{1}{2}\ {}^0\dot{\bar{r}}_i^{\,t}\ m_i\ {}^0\dot{\bar{r}}_i + \frac{1}{2}\ {}^i\omega_i^{\,t}\bar{\bar{I}}(\bar{r}_i, S_i)\ {}^i\omega_i$$

$$T(S_i/R_0) = \frac{1}{2}\dot{q}^t J_{\bar{r}_i}^t(q) m_i J_{\bar{r}_i}(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^t J_{\omega i}^t(q)\bar{\bar{I}}(\bar{r}_i, S_i) J_{\omega i}(q)\dot{q}$$

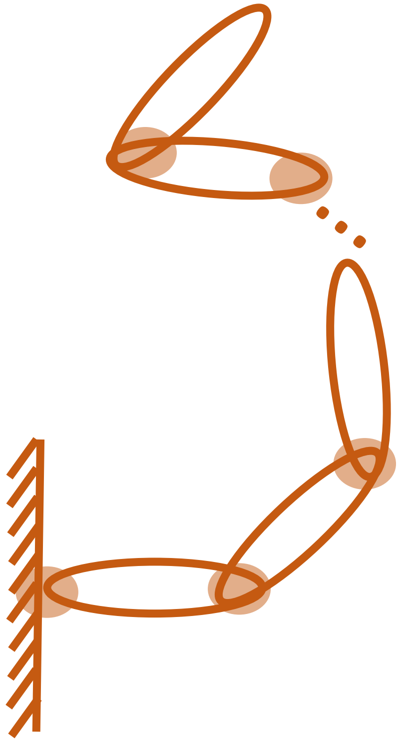
Cette expression permet d'exprimer la matrice de masse généralisée $H(q)$ du solide

$$\boldsymbol{T(S_i/R_0) = \frac{1}{2}\dot{q}^t H_i(q)\dot{q}}$$

$$\boldsymbol{H_i(q) = J_{\bar{r}_i}^t(q) m_i J_{\bar{r}_i}(q) + J_{\omega i}^t(q)\bar{\bar{I}}(\bar{r}_i, S_i) J_{\omega i}(q)}$$

L'expression précédente est valable au centre de masse (il est nécessaire d'ajouter le terme de non collocation dans le cas contraire)

Energie cinétique 2.0

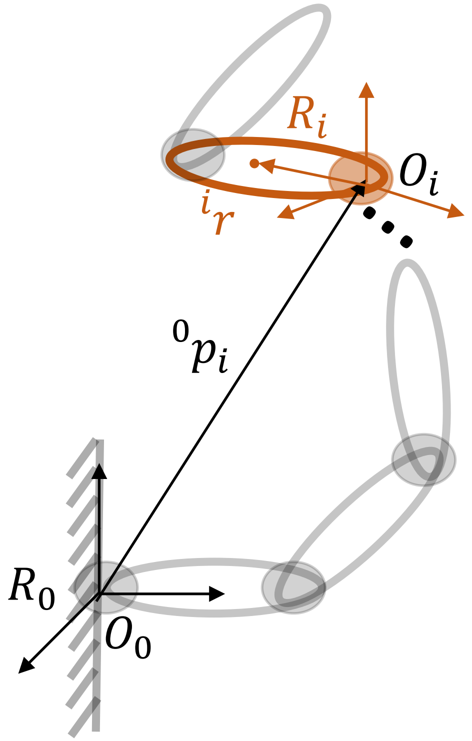


Pour l'ensemble du système Σ

$$\boldsymbol{T(\Sigma/R_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\dot{q}^t H_i(q)\dot{q} = \frac{1}{2}\dot{q}^t \sum_{i=1}^{n} H_i(q)\dot{q} = \frac{1}{2}\dot{q}^t H(q)\dot{q}}$$

$H(q)$ est alors la matrice de masse généralisée du système Σ

Energie potentielle (de pesanteur) 2.0

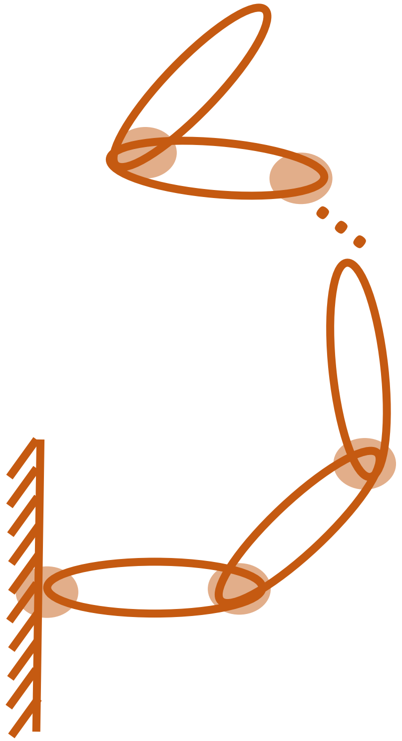


Pour un solide S_i, l'énergie potentielle s'écrit par définition

$$E_p(S_i/R_0) = g m_i \, {}^0\bar{r}_{iz}$$

Altitude du centre de masse du solide S_i

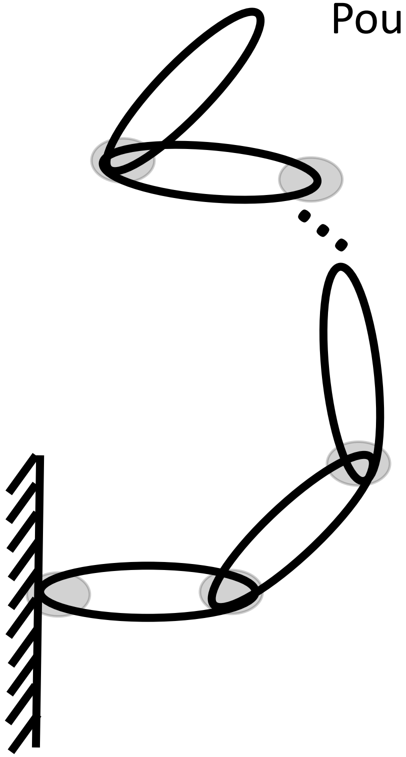
Energie potentielle (de pesanteur) 2.0



Pour l'ensemble du système Σ

$$E_p(\Sigma/R_0) = \sum_{i=1}^{n} E_p(S_i/R_0) = \sum_{i=1}^{n} g m_i \, {}^0\bar{r}_{iz}$$

Equations du mouvement



Pour $i = 1 \dots n$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q'_i$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T(\Sigma/R_0)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\boxed{\frac{1}{2}\dot{q}^t H(q)\dot{q}} = \boxed{\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} H_{ij}(q)\dot{q}_j}$$

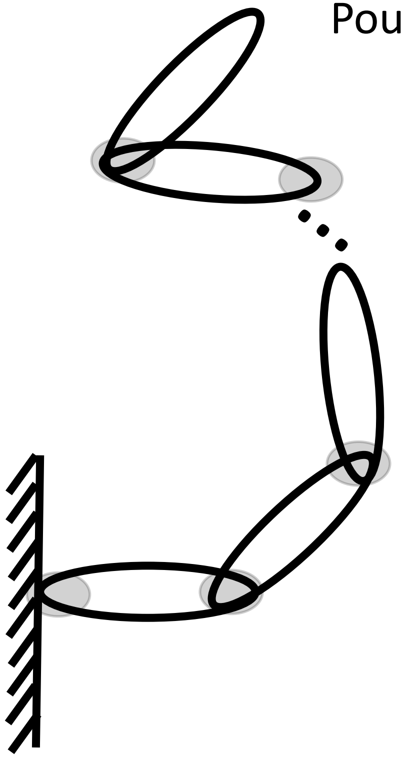
$$\frac{1}{2}(H_{11}\dot{q}_1^2 + \cdots + 2H_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \cdots + H_{nn}\dot{q}_n^2)$$

$$(H_{i1}\dot{q}_1 + \cdots + H_{ij}\dot{q}_j + \cdots + H_{in}\dot{q}_n)$$

$$\frac{d}{dt}H_{i1}\dot{q}_1 = H_{i1}\ddot{q}_1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H_{i1}}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_1$$

D'où $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T(\Sigma/R_0)}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n} H_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j$$

Equations du mouvement



Pour $i = 1 \dots n$

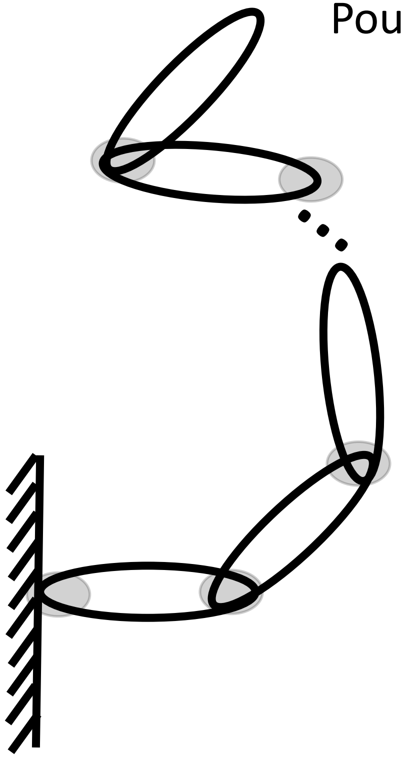
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \boxed{\frac{\partial T}{\partial q_i}} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q'_i$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial H_{11}}{\partial q_i}\dot{q}_1^2 + \cdots + 2\frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_k + \cdots + \frac{\partial H_{nn}}{\partial q_i}\dot{q}_n^2\right)$$

D'où

$$\frac{\partial T(\Sigma/R_0)}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

Equations du mouvement



Pour $i = 1 \dots n$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i'$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} H_{ij}(q)\ddot{q}_j} + \boxed{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_k}$$

En intervertissant les symboles k et j

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i}\right)}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

Symbole de Christoffel de première espèce Γ_{ijk}

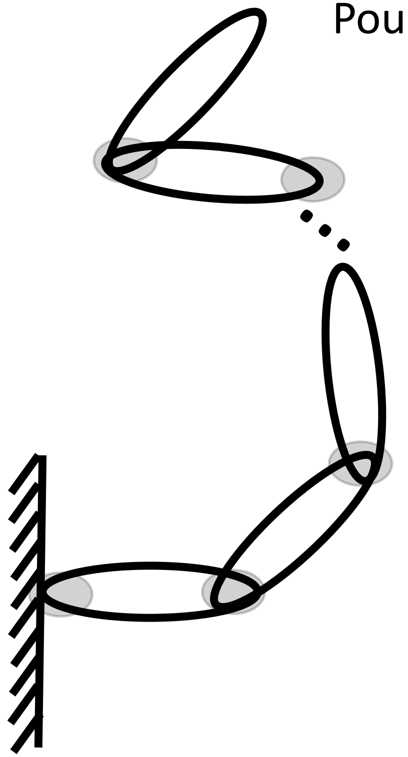
Obtenir $H(q)$ depuis $T(\Sigma/R_0)$

$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2}\left(H_{11}\dot{q}_1^2 + \cdots + 2H_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \cdots + H_{nn}\dot{q}_n^2\right)$$

$$\vec{\nabla}(T(\Sigma/R_0),\dot{q}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial T(\Sigma/R_0)}{\partial \dot{q}_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial T(\Sigma/R_0)}{\partial \dot{q}_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial T(\Sigma/R_0)}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}\dot{q}_1 + H_{12}\dot{q}_2 + \cdots + H_{1n}\dot{q}_n \\ \vdots \\ H_{i1}\dot{q}_1 + H_{i2}\dot{q}_2 + \cdots + H_{in}\dot{q}_n \\ \vdots \\ H_{n1}\dot{q}_1 + H_{n2}\dot{q}_2 + \cdots + H_{nn}\dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$J(\vec{\nabla}(T(\Sigma/R_0),\dot{q}),\dot{q}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\dfrac{\partial T(\Sigma/R_0)}{\partial \dot{q}_1}\right) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_n}\left(\dfrac{\partial T(\Sigma/R_0)}{\partial \dot{q}_1}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\dfrac{\partial T(\Sigma/R_0)}{\partial \dot{q}_n}\right) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_n}\left(\dfrac{\partial T(\Sigma/R_0)}{\partial \dot{q}_n}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \cdots & H_{nn} \end{bmatrix} = H(q)$$

Equations du mouvement



Pour $i = 1 \dots n$

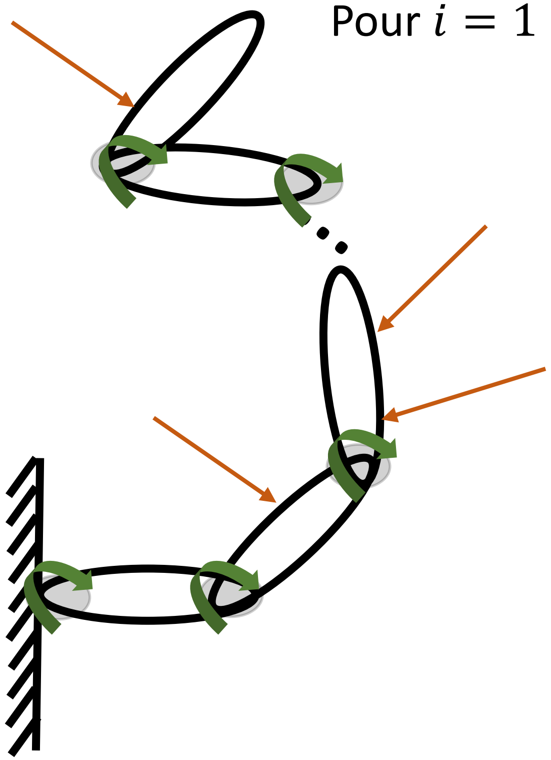
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \boxed{\frac{\partial E_p}{\partial q_i}} = Q'_i$$

$$\frac{\partial E_p(\Sigma/R_0)}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{j=1}^{n} g m_i\ {}^0\bar{r}_{jz}$$

d'où

$$\boldsymbol{\frac{\partial E_p(\Sigma/R_0)}{\partial q_i} = g m_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\ {}^0\bar{r}_{jz}}{\partial q_i}}$$

Equations du mouvement



Pour $i = 1 \dots n$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = \boxed{Q'_i}$$

Efforts non conservatifs: on distingue les efforts extérieurs f_e (glisseurs) des actions des actionneurs f_a (couples)

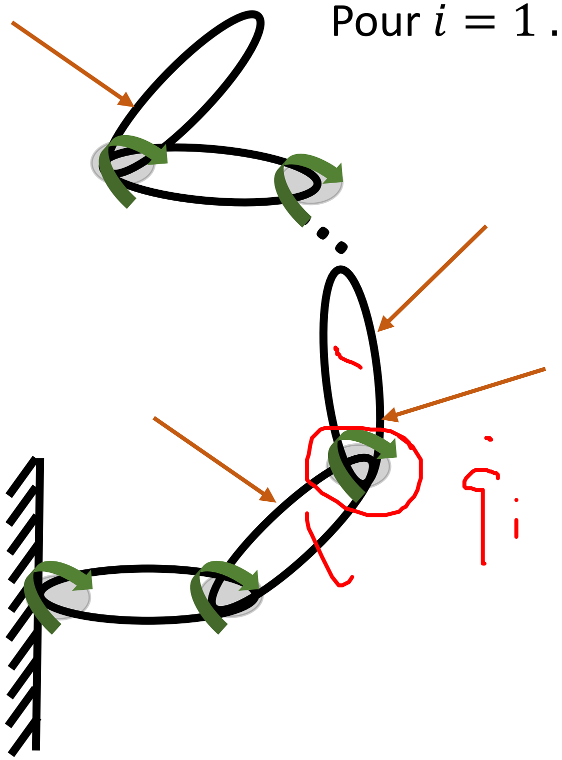
Pour un effort f_e s'appliquant en r_e sur le solide S_j

$$Q_i^{f_e} = \begin{Bmatrix} f_e \\ 0 \end{Bmatrix}_{r_e} \otimes \{V_{q_i}(S/R_g)\} = \begin{Bmatrix} f_e \\ 0 \end{Bmatrix}_{r_e} \otimes \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \omega_j}{\partial \dot{q}_i} \\ \dfrac{\partial \dot{r}_e}{\partial \dot{q}_i} \end{Bmatrix} = f_e \frac{\partial \dot{r}_e}{\partial \dot{q}_i}$$

Comme $\dot{r}_e = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_e}{\partial q_j} \dot{q}_j$ on a $\frac{\partial \dot{r}_e}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial r_e}{\partial q_i}$

$$\boldsymbol{Q_i^{f_e} = f_e \frac{\partial r_e}{\partial q_i}}$$

Equations du mouvement



Pour $i = 1 \ldots n$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = \boxed{Q'_i}$$

Efforts non conservatifs: on distingue les efforts extérieurs f_e (glisseurs) des actions des actionneurs f_a (couples)

Pour un couple f_{a_i} s'appliquant entre le solide S_{i-1} et S_i (inter-effort)

$$Q_i^{f_{a_i}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{a_i} \end{Bmatrix}_{r_e} \otimes \underbrace{\{V_{q_i}(S_i/S_{i-1})\}}_{\text{torseur de lagrange !}} = f_{a_i}\frac{\partial \omega_{ii-1}}{\partial \dot{q}_i}$$

D'où, dans l'immense majorité des cas $\boxed{Q_i^{f_{a_i}} = f_{a_i}}$

Réécriture des équations sous forme matricielle

i^{eme} équation (i^{eme} ligne des matrices et vecteurs composant ces équations)

$$\sum_{j=1}^{n} H_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k + gm_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\, {}^0\bar{r}_{jz}}{\partial q_i} = E_i(q)f_e + B_i(q)f_{a_i}$$

$$[H_{i1} \quad \dots \quad H_{ij} \quad \dots \quad H_{in}]\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \vdots \\ \ddot{q}_j \\ \vdots \\ \ddot{q}_n\end{bmatrix}$$

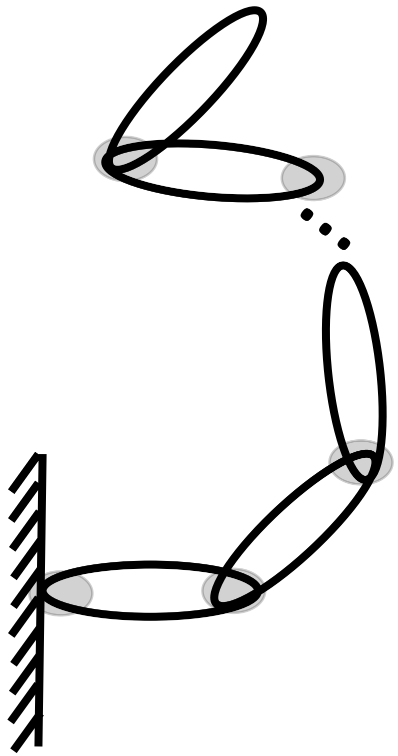
$$[\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{i1k}\dot{q}_k \quad \dots \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ijk}\dot{q}_k}_{\boldsymbol{C_{ij}(q,\dot{q})}} \quad \dots \quad \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ink}\dot{q}_k]\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \vdots \\ \dot{q}_j \\ \vdots \\ \dot{q}_n\end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k$$

Equations du mouvement

$$\underbrace{H(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}}_{\text{Matrice de masse}} + \underbrace{C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}}_{\text{Coriolis/centrifuge}} + \underbrace{G(\boldsymbol{q})}_{\text{Gravité}} = \underbrace{E(\boldsymbol{q})\boldsymbol{f_e}}_{\text{Efforts extérieurs}} + \underbrace{B(\boldsymbol{q})\boldsymbol{f_a}}_{\text{Efforts des actionneurs}}$$

Les $\boldsymbol{n}$ équations peuvent prendre la forme suivante



Soit un système de n_b
solides polyarticulés avec n_q liaisons
Chaine arborescente simple: $n_b = n_q = n$

Bibliographie

- Cours en ligne d'Alessandro de Luca (2010). http://www.diag.uniroma1.it/~deluca
- Westervelt, E. R. (2003). *Toward a coherent framework for the control of planar biped locomotion* (Doctoral dissertation, University of Michigan) http://web.eecs.umich.edu/~grizzle/westervelt_thesis/publications/westervelt_thesis_june_2003_single_sided.pdf
- Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2006). *Robot modeling and control* (Vol. 3, pp. 187-227). New York: Wiley