Examen mécanique analytique 2019-2020

L'examen dure 2 heures, les documents sont interdits. Il est attendu un rendu sur copies d'examen.

Vous maximiserez votre note en étant clair, précis et explicatif dans vos réponses. Une réponse fausse peut rapporter des points si le raisonnement est juste.

Partie 1 : questions de cours (3 points)

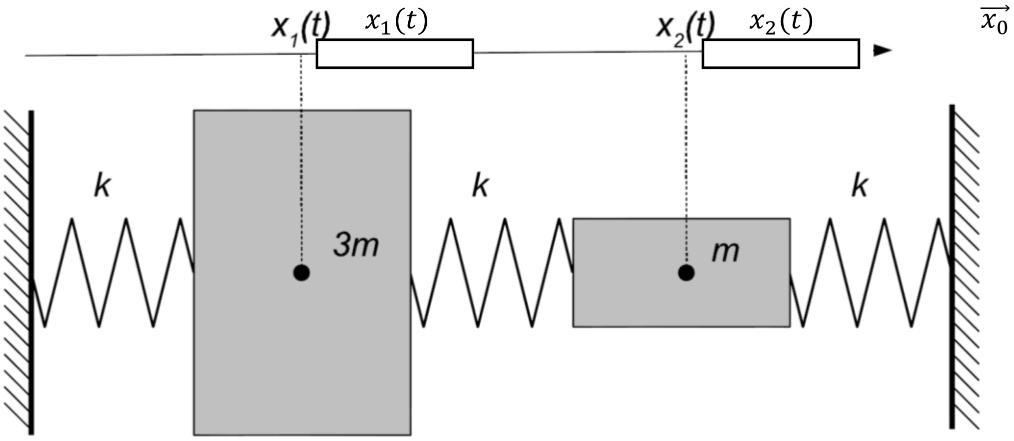
Question 1.1. Expliquer la différence entre une liaison holonôme et une liaison semi-holonôme. Expliciter les conséquences de ces liaisons sur les résolutions de dynamique par la méthode de Lagrange.

Question 1.2. Justifier que les équations de Lagrange pour un système conservatif Σ peuvent s'écrire

$\frac{d}{dt}\frac{\partial T(\Sigma/\mathrm{R}_0)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T(\Sigma/\mathrm{R}_0)}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p(\Sigma/\mathrm{R}_0)}{\partial q_i} = 0$ pour tout q_i paramètre de Σ

Partie 2 : système masse ressort (5 points)

Soit le système suivant :



Système masse ressort.
On perturbe son équilibre en modifiant les positions et vitesses initiales des deux degrés de liberté. $x_1$et x_2 sont les variations de position des masses $3m$ et m autour de la position d'équilibre. On considère la pesanteur comme négligeable. Les masses m et $3m$ sont supposées en liaison glissière d'axe $\overrightarrow{x_0}$ par rapport au bâti.

Question 2.1. Justifier le paramétrage. Combien de degrés de liberté ce système a-t-il ?

Question 2.2. Ecrire l'énergie cinétique du système.

Question 2.3. Ecrire l'énergie potentielle élastique associée aux ressorts.

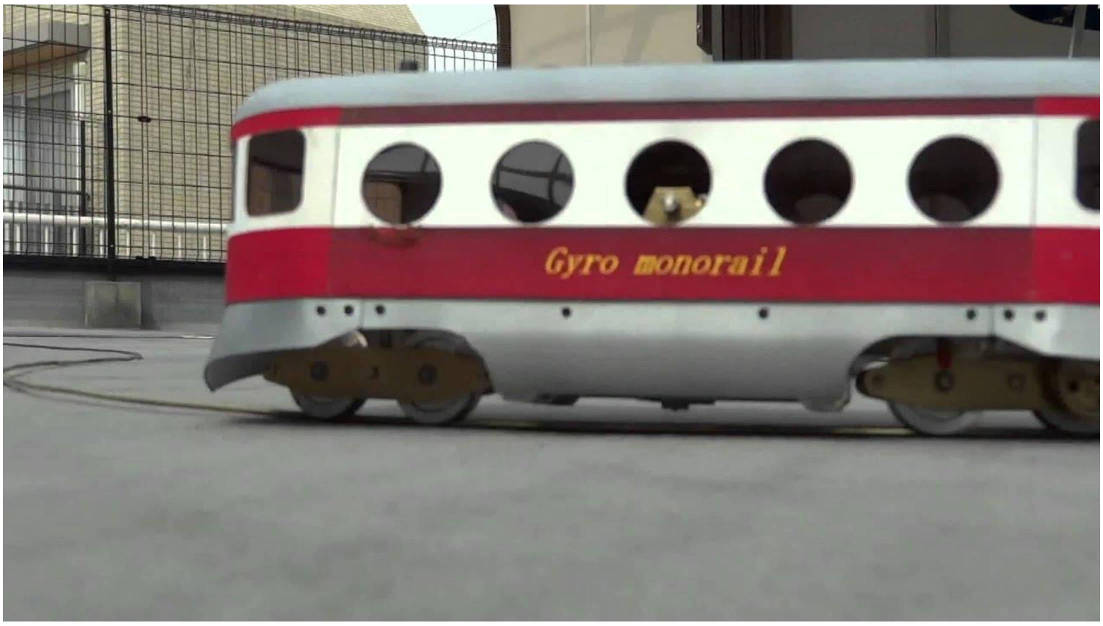
Question 2.4. Mettre en équations ce système discret à l'aide des équations de Lagrange. Mettre le système d'équations sous la forme :

$M[\ddot{x}] + K[x] = [0]$

Partie 3 : Train monorail (12 points)

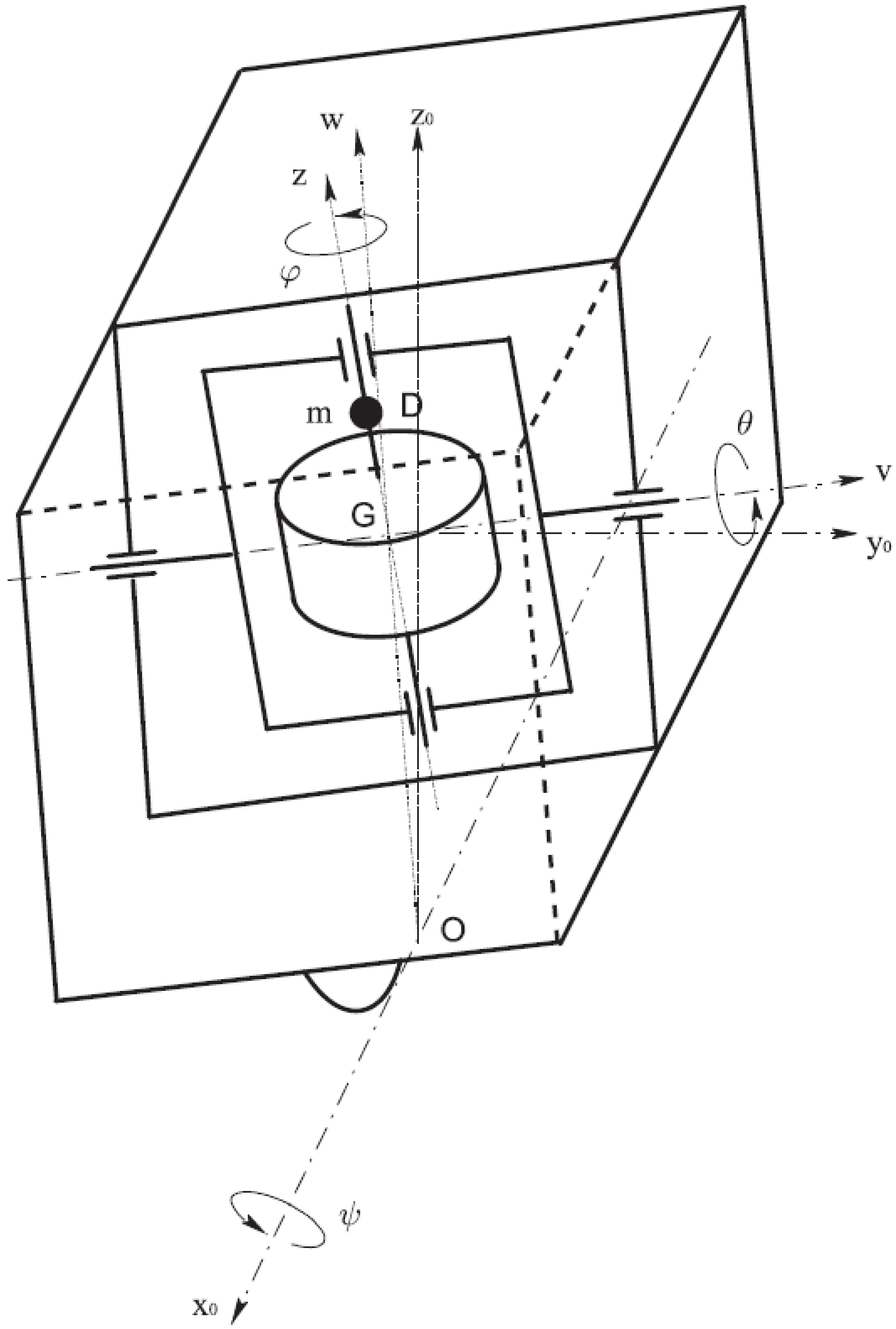
Monorail de Moscou.

On cherche à étudier la faisabilité d'un système de monorail stabilisé par gyroscope. Contrairement au monorail ci-dessus (monorail à 2 ornières), le monorail est posé sur un rail unique comme sur l'exemple ci-dessous, et donc stabilisé par un gyroscope actionné par un moteur.



Prototype de monorail SNCF.

Pour étudier la faisabilité d'un tel système, on va chercher à mettre en équations sa dynamique.



Modélisation du wagon monorail.

Repérage

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au rail

$R_1(O, \vec{x}_0, \vec{v}, \vec{w})$ lié au wagon

$R_2(G, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ lié au cadre

$R_3(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au gyroscope

Paramétrage

Translation du wagon le long du rail $\overrightarrow{O_0O} = x\vec{x}_0$

Inclinaison du wagon $\psi = (\vec{y}_0, \vec{v}) = (z_0, \vec{w})$

Rotation du cadre $\theta = (\vec{w}, \vec{z}) = (\vec{x}_0, \vec{u})$

Rotation propre du gyroscope $\varphi = (u, \vec{x}) = (\vec{v}, \vec{y})$

Le wagon monorail W a son centre de gravité G à une hauteur h au-dessus du rail ($\overrightarrow{OG} = h\vec{w}$). Il est stabilisé par un gyroscope S, centré sur G, de masse m_s et dont la matrice d'inertie est donnée par

$$\bar{\bar{I}}(G,S) = \begin{bmatrix} A & & \\ & A & \\ & & C \end{bmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{z})}$$

Le gyroscope porte une masse ponctuelle (surcharge) axiale m située en D ($\overrightarrow{GD} = a\vec{z}$).

Le gyroscope est monté sur un cadre mobile S' de masse négligeable, en rotation autour de l'axe $(G, \vec{v})$.

On considère que le wagon est de masse M et de matrice d'inertie

$$\bar{\bar{I}}(O,W) = \begin{bmatrix} I & & \\ & * & \\ & & * \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{v},\vec{w})}$$

On considère que le wagon est entrainé par un moteur de force propulsive

$$\{\tau(\bar{S} \to W)\} = \begin{Bmatrix} F\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

On considère que le gyroscope est entrainé par un couple

$$\{\tau(S' \to S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \tau\vec{z} \end{Bmatrix}_G$$

On considère que la pesanteur g est orientée selon $-\vec{z}_0$.

Question 3.1. Combien de degrés de liberté a ce système ? Est-il holonôme ?

Question 3.2. Ecrire l'énergie cinétique et potentielle de ce système.

Question 3.3. Calculer les coefficients énergétiques Q_i associés aux efforts s'appliquant sur le système.

Question 3.4. Ecrire les équations de Lagrange du système.

On considère que le wagon est stabilisé dans son fonctionnement. On a alors les relations suivantes :

$$\dot{x} = cste = v_0$$

$$\dot{\varphi} = cste = \omega$$

Question 3.5. Comment qualifiez-vous les contraintes écrites ci-dessus ? Quelles sont les conséquences sur le paramétrage du problème, le champ virtuel associé et sa résolution ? Réécrire les équations de Lagrange avec ce nouveau paramétrage.

On cherche à présent à connaitre les actions de liaison verticales entre le rail et le wagon afin d'en dimensionner les roues.

Question 3.6. Proposer un nouveau paramétrage, ainsi que les contraintes associées, permettant d'obtenir la composante verticale de l'action de liaison entre le wagon et le rail. Il n'est pas demandé d'aller au bout de la démarche.