Mécanique Analytique

Examen 2018-2019

Sujet

Un héliostat (de helios, mot grec signifiant Soleil, et stat, racine de stationnaire) est un dispositif permettant de suivre la course du Soleil, généralement pour orienter toute la journée les rayons solaires vers un point ou une petite surface fixe, à l'aide de miroirs. On retrouve ce type de dispositif dans des centrales solaires thermiques à concentration, permettant ainsi de chauffer un fluide caloporteur générant de l'électricité.

L'architecture de l'héliostat étudié aujourd'hui est constituée de deux degrés de liberté actionnés par des moteurs électriques permettant de poursuivre la course du soleil au cours de la journée.

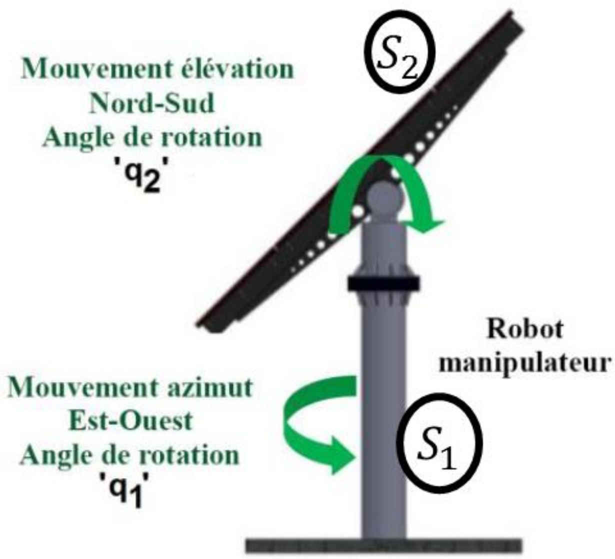

Figure 1 : héliostat parabolique

Un tel système a besoin d'une commande efficace lui permettant à la fois de suivre de manière précise la course du soleil au cours du temps mais également de s'adapter aux conditions climatiques. C'est pourquoi dans la suite de cette étude nous allons nous intéresser à l'établissement du modèle dynamique du système.

Le système peut être paramétré et schématisé comme présenté figure 2. Pour la suite de l'étude, on exploitera le paramétrage suivant :

- **Sol :** Solide S_0 fixe dans le référentiel galiléen associé à l'étude R_0.
- **Arbre de support :** Solide S_1 de masse m_1, centre de la liaison pivot entre S_0 et S_1 O_1 défini tel que $\overrightarrow{O_0O_1} = l_1\overrightarrow{z_0}$. Le repère associé à ce solide est le repère R_1. La rotation entre les repères R_0 et R_1 est une rotation d'un angle q_1 autour de $\overrightarrow{z_1}$. Son centre de masse G_1 est considéré confondu avec O_1.
- **Miroir :** Solide S_2 de masse m_2, centre de la liaison pivot entre S_0 et S_1 O_2 défini tel que $\overrightarrow{O_1O_2} = l_2\overrightarrow{z_1}$. Le repère associé à ce solide est le repère R_2. Son centre de masse G_2 est défini tel que $\overrightarrow{O_2G_2} = e\overrightarrow{z_2}$. La rotation entre les repères R_1 et R_2 est une rotation d'un angle q_2 autour de $\overrightarrow{y_2}$.

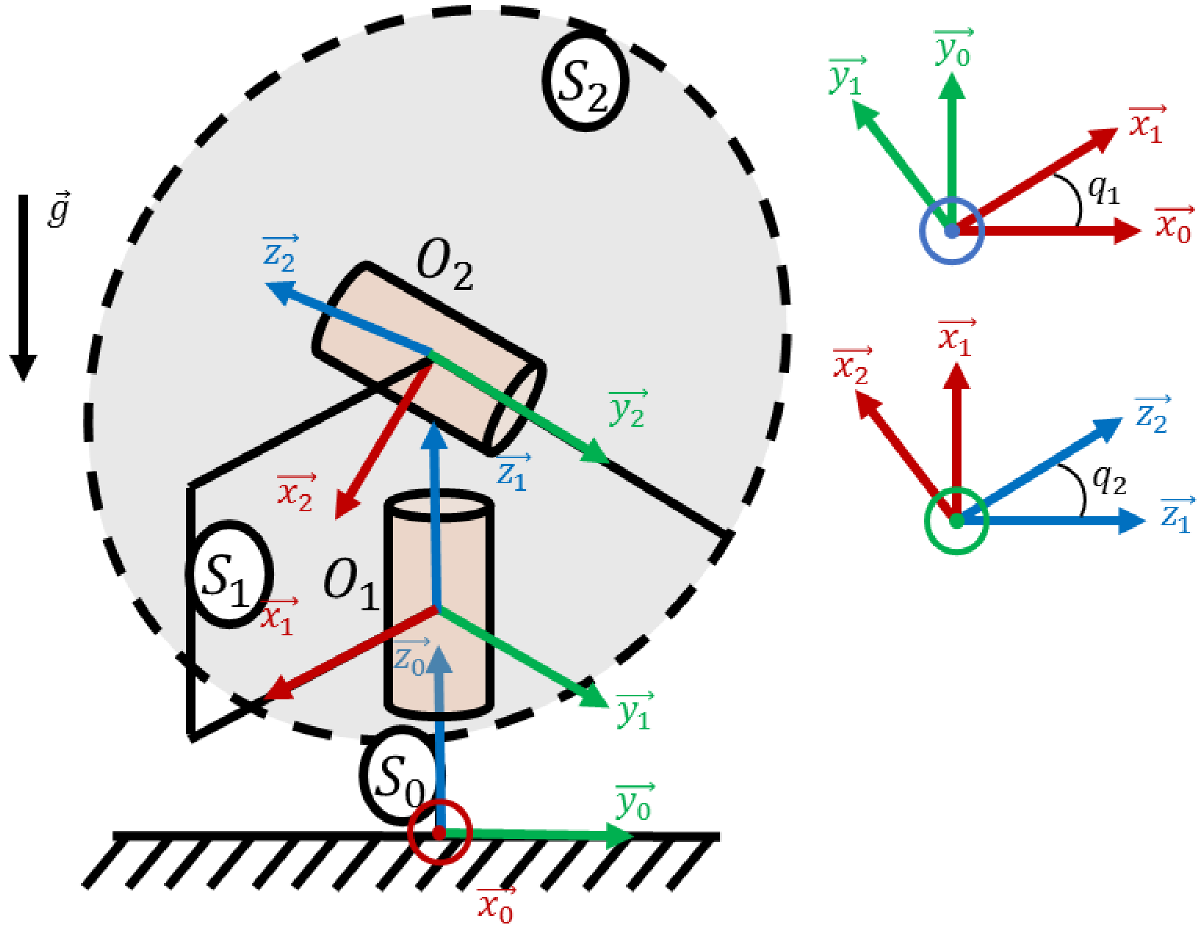

Figure 2 : repérage et paramétrage de l'héliostat

Inertie du miroir

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à la définition de la matrice d'inertie du miroir S_2, fondamentale pour pouvoir réaliser un modèle dynamique précis de l'héliostat. En première approximation, on estime que le miroir peut être considéré comme un disque d'épaisseur non nulle $\boldsymbol{2e}$, de rayon $\boldsymbol{R}$ et de densité homogène $\boldsymbol{\rho}$.

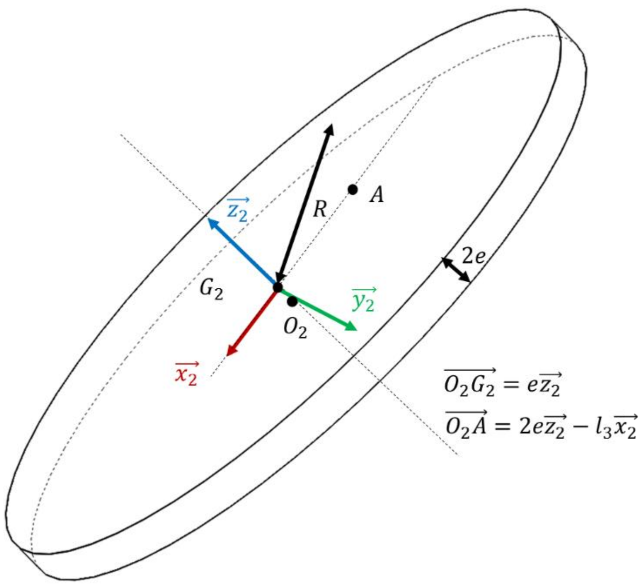

Figure 3 : miroir

Question 1 : Déterminer la matrice d'inertie du solide S_2 exprimée au point O_2 dans la base B_2, $\bar{\bar{I}}(O_2, S_2)_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$ en fonction de la densité, de la masse et des paramètres géométriques définis ci-dessus. Justifier la forme de la matrice au vu de la géométrie du miroir.

Pour la suite de l'étude, et quel que soit le résultat que vous aurez obtenu à la question précédente, on considérera les inerties suivantes pour les solides S_1 et S_2 :

$$\begin{cases} \bar{\bar{I}}(O_1, S_1) = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})} \\ \bar{\bar{I}}(O_2, S_2) = \begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})} \end{cases}$$

Modèle dynamique de l'héliostat

Nous allons à présent déterminer le modèle dynamique de l'héliostat afin de pouvoir concevoir sa commande. On considère pour la suite le système mécanique $\Sigma = \{S_1 \cup S_2\}$.
L'héliostat est soumis à quatre actions mécaniques différentes :

- **Gravité** : définie telle que $\vec{g} = -g\vec{z}_0$
- **Actions mécaniques des moteurs de poursuite :** couples exercés aux centres des liaisons pivots.

$$\begin{cases} \left\{\tau(S_0 \xrightarrow{mot} S_1)\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \tau_1 \overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_{O_1} \\ \left\{\tau(S_1 \xrightarrow{mot} S_2)\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \tau_2 \overrightarrow{y_2} \end{Bmatrix}_{O_2} \end{cases}$$

- **Action du vent sur le miroir :** glisseur de résultante dirigée selon $\overrightarrow{y_0}$ appliquée au point A (voir figure 3)

$$\left\{\tau(\bar{S} \xrightarrow{vent} S_2)\right\} = \begin{Bmatrix} F_v \overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

Question 2 : Justifier que le paramétrage défini en préambule est pertinent pour obtenir les équations du mouvement de l'héliostat. Combien d'équations de Lagrange ce paramétrage va-t-il vous donner ?

Question 3 : Etablir l'expression de l'énergie cinétique du système $T(\Sigma/\mathrm{R}_0)$.

Question 4 : Etablir l'énergie potentielle de pesanteur du système $E_p(\Sigma/\mathrm{R}_0)$ en considérant nulle l'énergie potentielle au niveau du sol.

Question 5 : Calculer, pour l'ensemble des efforts s'appliquant sur le système, les coefficients énergétiques associés aux paramètres du mouvement. Justifier vos choix méthodologiques.

Question 6 : Etablir les équations de Lagrange du système en justifiant votre démarche méthodologique.

Généralement, un modèle dynamique de commande s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$H(q_1, q_2)\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + C(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + G(q_1, q_2) + E(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

Avec $H(q_1, q_2)$ matrice de masse, $C(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$ matrice des effets Coriolis/Centrifuges, $G(q_1, q_2)$ vecteur des actions de gravité, et $E(q_1, q_2)$ vecteur des actions extérieures au système.

Question 7 : Mettre le système d'équations obtenu à la question 6 sous cette forme matricielle.

Vérification du dimensionnement de la liaison entre S_1 et S_2

On désire à présent vérifier le niveau d'efforts dans la liaison entre S_1 et S_2 dans la direction $\overrightarrow{x_1}$. Pour cela, on va exploiter la méthode de Lagrange afin d'obtenir l'équation supplémentaire nécessaire.
On définit les actions de liaison entre S_1 et S_2 de la manière suivante :

$$\left\{\tau(S_1 \xrightarrow{liaison} S_2)\right\} = \left\{\begin{matrix} R_x\overrightarrow{x_1} + R_y\overrightarrow{y_1} + R_z\overrightarrow{z_1} \\ M_x\overrightarrow{x_1} + M_z\overrightarrow{z_1} \end{matrix}\right\}_{O_2}$$

Question 8 : Expliciter la méthode permettant d'obtenir la valeur de R_x à l'aide de la méthode de Lagrange. De combien de paramètres supplémentaires avez-vous besoin ? Comment les choisissez-vous ? Quelles contraintes associez-vous à ce nouveau paramétrage ?

Question 9 : En reprenant les résultats des questions précédentes, réécrire l'énergie cinétique et l'énergie potentielle à l'aide de votre nouveau paramétrage.

Question 10 : En reprenant les résultats des questions précédentes, réécrire les coefficients énergétiques associés aux actions mécaniques s'exerçant sur et à l'intérieur du système. Qu'est ce qui change dans vos équations ?

Question 11 : Etablir à l'aide de l'équation de Lagrange associée la valeur de R_x. Quelles sont les grandeurs prépondérantes dans cette expression ?