Mécanique Analytique

Rappels sur les torseurs

Définitions

Un champ est une application, qui à tout point d'un domaine géométrique associe une grandeur, scalaire ou vectorielle par exemple. On définit ainsi des champs de pression (grandeur scalaire), de température (scalaire), de déplacement (vectoriel), d'accélération (vectoriel), magnétique (vectoriel)…

Les champs permettent de caractériser l'état d'un système étudié.

En tout point P du domaine d'étude, repéré par un repère (origine + base) et un système de coordonnées (cartésiennes, cylindriques, sphériques, …) est associé un vecteur.

Un torseur est un champ de vecteur équiprojectif, dit champ de moment.

Un **champ de vecteur équiprojectif** est un champ qui vérifie la relation suivante :

$$\forall A, B \in \mathcal{E}, \vec{F}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{F}(B) \cdot \overrightarrow{AB}$$

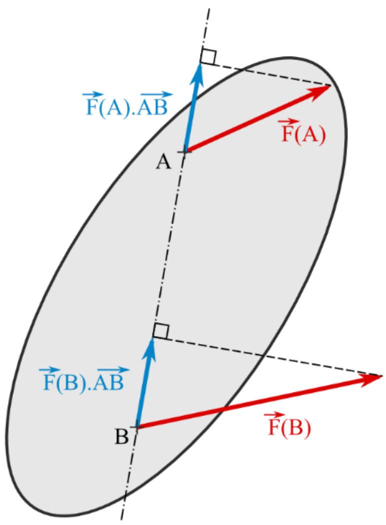

Figure 1 : illustration de la propriété d'équiprojectivité.

Cette propriété d'équiprojectivité conduit à l'existence d'un vecteur unique $\vec{R}$, que l'on pourrait noter plus justement $\vec{R}(\vec{F})$, appelé **résultante du torseur**, qui vérifie la relation suivante :

$$\begin{aligned} \vec{F}(B) &= \vec{F}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= \vec{F}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} \end{aligned}$$

Cette relation, dite « de Varignon », ou de manière mnémotechnique « BABAR », est parfois appelée « relation de transport du moment ». Il n'y a en fait aucun transport : on ne fait qu'exprimer la valeur du champ en un point B à partir de sa connaissance au point A.

En conséquence, un torseur est entièrement défini par la donnée :

- ***de sa résultante,***
- ***de sa valeur en un point, quelconque mais connu.***

D'où la notation $\vec{F} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{F}(A) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \text{Résultante} \\ \text{Moment au point particulier} \end{Bmatrix}_{\text{Point particulier}}$

Cependant, l'habitude est prise :

- de différencier la fonction de sa valeur en un point particulier, par exemple $\mathcal{F}$ ou $\{\mathcal{F}\}$ au lieu de $\vec{F}$,
- de noter différemment la valeur de la fonction en un point : $\overrightarrow{m}_A$ au lieu de $\vec{F}(A)$.

D'où les notations : $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{m}_A \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} F_z \cdot \vec{z} \\ 3 \cdot \vec{x} + 2 \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \\ F_z & 0 \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

D'autre part, $\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{m}_A \end{Bmatrix}_A$ et $\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{m}_A + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB} \end{Bmatrix}_B$ représentent bien un même champ vectoriel, et donc un même torseur.

Propriétés

Si un torseur n'est pas uniforme (voir section suivante), il existe une droite, appelée **axe central** telle que :

- sa direction est celle de la résultante $\vec{R}$,
- en tout point A de l'axe, le moment est colinéaire à la résultante : $\overrightarrow{m}_A = \lambda \cdot \vec{R}$,
- en tout point A de l'axe, $\|\overrightarrow{m}_A\|$ est minimale,
- si le moment en nul en un point, alors ce point appartient à l'axe central.

La projection des moments sur l'axe est un invariant. Pour tous points A et B :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{m}_B \cdot \vec{R} &= \left(\overrightarrow{m}_A + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}\right) \cdot \vec{R} \\ &= \overrightarrow{m}_A \cdot \vec{R} + \left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}\right) \cdot \vec{R} \\ &= \overrightarrow{m}_A \cdot \vec{R} \end{aligned}$$

La projection perpendiculaire I, sur l'axe central du torseur, d'un point A vérifie :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{m}_A}{\vec{R}^2}$$

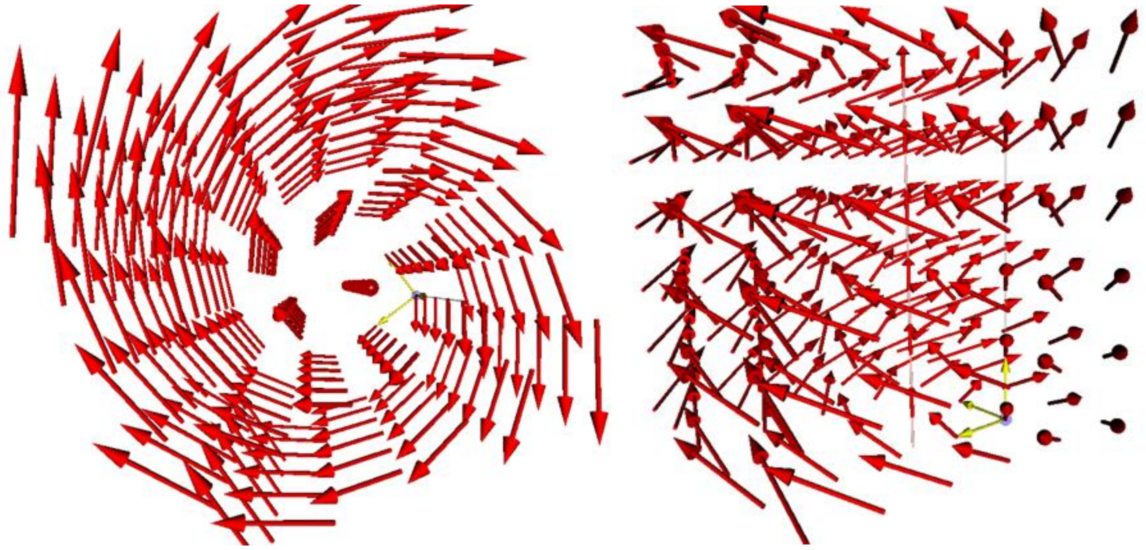

Figure 2 : illustration du champ de moment $\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} 0{,}5 \cdot \vec{z} \\ 0{,}5 \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_A$.

Torseurs spécifiques

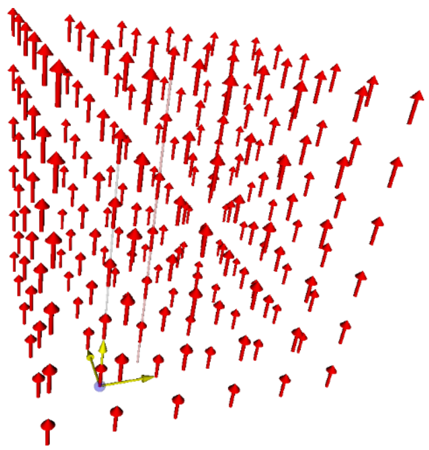

Figure 3 : illustration du champ de moment $\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} 0{,}5 \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$.

Un **torseur glisseur** $\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ est un torseur de moment nul sur son axe central. Les moments sont perpendiculaires à la résultante et à l'axe central.

S'il existe un point A de moment nul, le torseur est un torseur glisseur dont l'axe passe par A.

Si, en un point, le moment est perpendiculaire à la résultante, le torseur est un torseur glisseur.

Un **torseur couple** $\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C} \end{Bmatrix}_*$ est un champ de moment uniforme de valeur $\vec{C}$. La résultante d'un torseur couple est nulle.

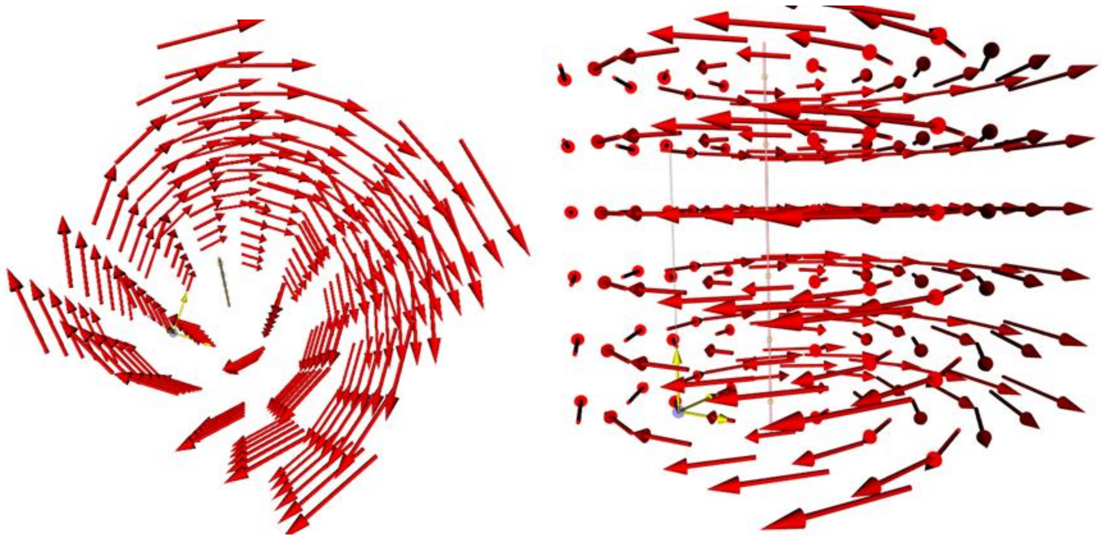

Figure 4 : illustration du champ de moment $\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ 0{,}5 \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_*$.

Opérations

MULTIPLICATION PAR UN REEL

Soit un réel λ et un torseur $\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{m}_A \end{Bmatrix}_A$. Leur produit est le torseur :

$$\lambda\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} \lambda \cdot \vec{R} \\ \lambda \cdot \overrightarrow{m}_A \end{Bmatrix}_A$$

SOMME

Soit deux torseurs $\mathcal{F}_1 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \overrightarrow{m}_{1,A} \end{Bmatrix}_A$ et $\mathcal{F}_2 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{m}_{2,B} \end{Bmatrix}_B$. Leur somme est le torseur :

$$\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{m}_{1,A} + \overrightarrow{m}_{2,A} \end{Bmatrix}_A$$

Attention, par définition, l'addition des moments se fait en un seul et même point !

EGALITE

Soit deux torseurs $\mathcal{F}_1 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \overrightarrow{m}_{1,A} \end{Bmatrix}_A$ et $\mathcal{F}_2 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{m}_{2,B} \end{Bmatrix}_B$.

Ces deux torseurs sont égaux si $\forall P \in \mathcal{E}, \overrightarrow{m}_{1,P} = \overrightarrow{m}_{2,P}$.

Cette condition est vérifiée si et seulement si :

- les résultantes sont identiques : $\vec{R}_1 = \vec{R}_2$
- les moments sont égaux en un même point : $\overrightarrow{m}_{1,A} = \overrightarrow{m}_{2,A}$

COMOMENT

Soit deux torseurs $\mathcal{F}_1 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{m}_{1,A} \end{Bmatrix}_A$ et $\mathcal{F}_2 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{m}_{2,B} \end{Bmatrix}_B$.

Le **comoment** est la grandeur scalaire suivante (calculée en un seul et même point) :

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \vec{R}_1 \cdot \vec{m}_{2,A} + \vec{R}_R \cdot \vec{m}_{1,A}$$

DECOMPOSITION

Tout torseur est la somme d'un torseur couple et d'un torseur glisseur.

L'axe du torseur glisseur et le torseur couple sont colinéaires.

En un point A de l'axe du torseur, $\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} R \cdot \vec{u} \\ m_A \cdot \vec{u} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} R \cdot \vec{u} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ m_A \cdot \vec{u} \end{Bmatrix}_*$

Un exercice simple

Soient :

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \overrightarrow{OJ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\mathcal{V}_1 = \begin{Bmatrix} \Omega\vec{x} \\ V_x\vec{x} + V_y\vec{y} \end{Bmatrix}_I \quad \mathcal{V}_2 = \begin{Bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(J,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

1) Quelle est la direction de l'axe central de $\mathcal{V}_1$?
2) Quelle condition sur Ω, V_x ou V_y doit-on imposer pour que $\mathcal{V}_1$ soit un torseur couple ?
3) Quelle condition sur Ω, V_x ou V_y doit-on imposer pour que $\mathcal{V}_1$ soit un torseur glisseur ?
4) Déterminer $\vec{V}_{1,J}$, valeur du champ $\mathcal{V}_1$ en J.
5) Déterminer $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$.
6) Déterminer Ω, V_x et V_y pour que $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$.