Formulaire de mécanique générale

Soit O un point fixe, A un point quelconque d'un solide S et G le centre de masse de ce même solide. On considère que l'on se trouve dans un repère galiléen R_g (un solide en équilibre est soit immobile, soit en translation uniforme dans ce repère).

Cinématique

Torseur cinématique

$$\{V(S/R_g)\} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \\ \overrightarrow{V(A \in S/R_g)} \end{pmatrix}_A$$

Transport de vitesse

$$\overrightarrow{V(A \in S/R_g)} = \overrightarrow{V(G \in S/R_g)} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Omega(S/R_g)}$$

Dérivée en base mobile

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{R_g} \vec{u} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{S} \vec{u} + \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \vec{u}$$

Masses et inerties

Centre de gravité

Soit S un système matériel à masse conservative, déformable ou non, de masse m. On appelle « centre de masse », « centre d'inertie » ou (dans le cas d'un champ de pesanteur uniforme) « centre de gravité » le point G tel que :

$$m \cdot \overrightarrow{AG} = \int_S \overrightarrow{AM} \cdot dm$$

Opérateur d'inertie

On note $\mathcal{I}_{A,S}$ et on appelle « opérateur d'inertie du système S au point A » la fonction défini sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\mathcal{I}_{A,S} : \vec{u} \to \mathcal{I}_{A,S}(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot dm$$

Cet opérateur est :

Linéaire : $\mathcal{I}_{A,S}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda \cdot \mathcal{I}_{A,S}(\vec{u}) + \mu \cdot \mathcal{I}_{A,S}(\vec{v})$

Autoadjoint : $\vec{u} \cdot \mathcal{I}_{A,S}(\vec{v}) = \mathcal{I}_{A,S}(\vec{u}) \cdot \vec{v}$

Il est donc représentable par une matrice symétrique $\mathbb{I}_{A,S} = [a_{ij}]$, appelée « matrice d'inertie du système S au point A » telle que, dans une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$:

$$a_{ij} = \overrightarrow{e_i} \cdot \mathcal{I}_{A,S}(\overrightarrow{e_j})$$

Si $\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{e_1} + y \cdot \overrightarrow{e_2} + z \cdot \overrightarrow{e_3}$, alors on obtient :

$$\mathbb{I}_{A,S} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ * & B & -D \\ * & * & C \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})} = \begin{pmatrix} \int_S (y^2+z^2)\cdot dm & -\int_S xy\cdot dm & -\int_S xz\cdot dm \\ * & \int_S (x^2+z^2)\cdot dm & -\int_S yz\cdot dm \\ * & * & \int_S (x^2+y^2)\cdot dm \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})}$$

Théorème de Huygens

Soit $\mathcal{R}_S(G,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ un repère lié au système S, et A le point de coordonnées (a,b,c) dans le repère $\mathcal{R}_S$. Alors :

$$\mathbb{I}_{A,S} = \mathbb{I}_{G,S} + \mathbb{I}_{A,(m,G)}$$

Avec :

$$\mathbb{I}_{A,(m,G)} = \begin{pmatrix} m\cdot(b^2+c^2) & -m\cdot ab & -m\cdot ac \\ * & m\cdot(a^2+c^2) & -m\cdot bc \\ * & * & m\cdot(a^2+b^2) \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})}$$

Cinétique

Torseur cinétique

$$\{\mathcal{C}_{S/0}\} = \begin{Bmatrix} \int_S \overrightarrow{v_{M\in S/0}}\cdot dm \\ \int_S \overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{v_{M\in S/0}}\cdot dm \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} m\cdot\overrightarrow{v_{G\in S/0}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A\in S/0}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} Quantité\ de\ mouvement\ de\ S/0 \\ Moment\ cinétique\ de\ S/0\ en\ A \end{Bmatrix}_A$$

Relation avec l'opérateur d'inertie

$$\overrightarrow{\sigma_{A\in S/0}} = m\cdot\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{v_{I\in S/0}} + m\cdot\overrightarrow{AI}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega_{S/0}}\wedge\overrightarrow{IG}\right) + \mathbb{I}_{I,S}\overrightarrow{\Omega_{S/0}}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\sigma_{A\in S/0}} &= \int_S \overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{v_{M\in S/0}}\cdot dm \\
&= \int_S \overrightarrow{AM}\wedge\left(\overrightarrow{v_{I\in S/0}} + \overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/0}}\right)\cdot dm \\
&= \int_S \overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{v_{I\in S/0}}\cdot dm + \int_S \overrightarrow{AM}\wedge\left(\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/0}}\right)\cdot dm \\
&= \int_S \overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{v_{I\in S/0}}\cdot dm + \int_S \overrightarrow{AI}\wedge\left(\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/0}}\right)\cdot dm + \int_S \overrightarrow{IM}\wedge\left(\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/0}}\right)\cdot dm \\
&= \left(\int_S \overrightarrow{AM}\cdot dm\right)\wedge\overrightarrow{v_{I\in S/0}} + \overrightarrow{AI}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega_{S/0}}\wedge\int_S \overrightarrow{IM}\cdot dm\right) + \int_S \overrightarrow{IM}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega_{S/0}}\wedge\overrightarrow{IM}\right)\cdot dm
\end{aligned}$$

$$= m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{v_{I\in S/0}} + m \cdot \overrightarrow{AI} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/0}} \wedge \overrightarrow{IG}\right) + \mathbb{I}_{I,S}\overrightarrow{\Omega_{S/0}}$$

Lorsque l'on définit l'opérateur d'inertie au point A, on obtient :

$$\overrightarrow{\sigma_{A\in S/0}} = \mathbb{I}_{A,S}\overrightarrow{\Omega_{S/0}} + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{v_{A\in S/0}}$$

En particulier :

En G, centre de gravité du système : $\overrightarrow{\sigma_{G\in S/0}} = \mathbb{I}_{G,S}\overrightarrow{\Omega_{S/0}}$

En A, point fixe dans $\mathcal{R}_0$: $\overrightarrow{\sigma_{A\in S/0}} = \mathbb{I}_{A,S}\overrightarrow{\Omega_{S/0}}$

Energie cinétique

$$2E_c(S/R_g) = \{C(S/R_g)\} \otimes \{V(S/R_g)\} = m\overrightarrow{V(G\in S/R_g)}.\overrightarrow{V(G\in S/R_g)} + (\overline{\overline{I(G,S)}}\,\overrightarrow{\Omega(S/R_g)}).\overrightarrow{\Omega(S/R_g)}$$

Dynamique

Torseur dynamique

$$\{\mathcal{D}_{S/0}\} = \begin{Bmatrix} \displaystyle\int_S \overrightarrow{a_{M\in S/0}} \cdot dm \\ \displaystyle\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{a_{M\in S/0}} \cdot dm \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} m \cdot \overrightarrow{a_{G\in S/0}} \\ \overrightarrow{\delta_{A\in S/0}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} Résultante\ dynamique\ de\ S/0 \\ Moment\ dynamique\ de\ S/0\ en\ A \end{Bmatrix}_A$$

Relation avec le torseur cinétique

$$\overrightarrow{\delta_{A\in S/0}} = \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/0}}}{dt}\right)_0 + m \cdot \overrightarrow{v_{A\in S/0}} \wedge \overrightarrow{v_{G\in S/0}}$$

En effet :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/0}}}{dt}\right)_0 = \frac{d}{dt}\left(\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v_{M\in S/0}} \cdot dm\right)_0$$

$$= \int_S \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v_{M\in S/0}}\right)_{\mathcal{R}_0} \cdot dm$$

$$= \int_S \left(\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{v_{M\in S/0}} \cdot dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{v_{M\in S/0}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} \cdot dm$$

$$= \int_S \left[\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} - \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0}\right] \wedge \overrightarrow{v_{M\in S/0}} \cdot dm + \overrightarrow{\delta_{A\in S/0}}$$

$$= \int_S \left[\overrightarrow{v_{M\in S/0}} - \overrightarrow{v_{A\in S/0}}\right] \wedge \overrightarrow{v_{M\in S/0}} \cdot dm + \overrightarrow{\delta_{A\in S/0}}$$

$$= -\overrightarrow{v_{A\in S/0}} \wedge \int_S \overrightarrow{v_{M\in S/0}} \cdot dm + \overrightarrow{\delta_{A\in S/0}}$$

$$= -m \cdot \overrightarrow{v_{A\in S/0}} \wedge \overrightarrow{v_{G\in S/0}} + \overrightarrow{\delta_{A\in S/0}}$$

En particulier :

En G, centre de gravité du système : $\overrightarrow{\delta_{G\in S/0}} = \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G\in S/0}}}{dt}\right)_0$

En A, point fixe dans $\mathcal{R}_0$: $\overrightarrow{\delta_{A\in S/0}} = \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/0}}}{dt}\right)_0$

Principe fondamental de la dynamique

$\{D(S/R_g)\} = \sum_i \{\tau_i(\overline{S} \to S)\}$

Théorème de l'énergie cinétique

$\left.\frac{d}{dt}\right|_{R_g} E_c\left(\frac{S}{R_g}\right) = P_{int} + P_{ext}$