Simulation des systèmes de solides rigides polyarticulés

2- PFD et Lagrange

Charles Pontonnier

Rappels de mécanique générale

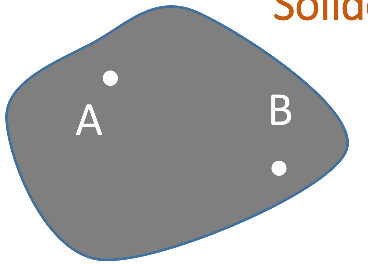
On cherche à simuler le comportement dynamique de systèmes polyarticulés de solides rigides

On sait classiquement obtenir les équations du mouvement de ce type de système à l'aide du principe fondamental de la dynamique ou bien du principe des puissances virtuelles

⇒ Cette présentation est un bref rappel de ces principes et de leur mise en oeuvre

Généralités

Solides



$\|\overrightarrow{AB}\| = constante$

Référentiel

Tout est relatif…on se place dans un repère « fixe » par rapport aux mouvements étudiés. La Terre est souvent un référentiel suffisamment fixe pour les étudier la mécanique des corps se déplaçant sur celle-ci.

Conservation de la masse

Σ est à masse conservative si tout sous ensemble E de Σ
$m(E) = constante$

$$\Rightarrow \forall \vec{f} \quad \frac{d}{dt}\int \vec{f}(M)dm = \int \left(\frac{d\vec{f}(M)}{dt}\right) dm$$

Torseurs Confer polycopié

PFD

Principe Fondamental de la dynamique (pour un ensemble de solides rigides)

Il existe au moins un repère R_g appelé repère galiléen tel que pour tout solide ou système de solides S soumis aux seules actions mécaniques extérieures $\{T_{ext/S}\}$:

$$\{D_{S/R_g}\}=\{T_{ext/S}\}$$

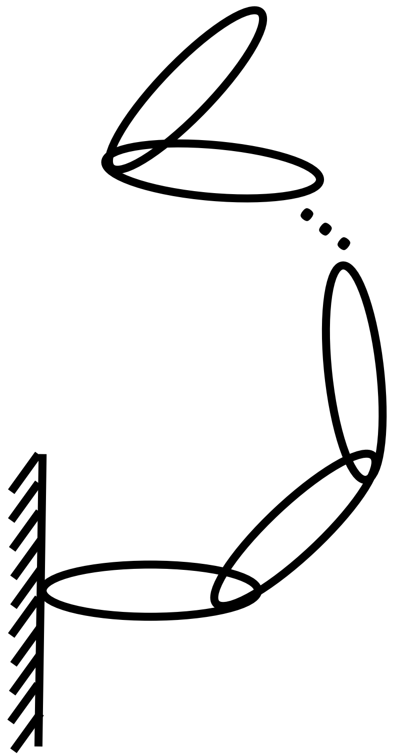
soit

$$_A\begin{Bmatrix} m.\vec{\Gamma}_{G,S/R_g} \\ \vec{\delta}_{A,S/R_g} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{F}_{ext/S} \\ \vec{M}_{A,ext/S} \end{Bmatrix}$$

Le torseur dynamique d'un système de solides rigides S se calculant comme:

$$\{D_{S/R_g}\}=\{D_{S_1/R_g}\}+\{D_{S_2/R_g}\}+\ldots+\{D_{S_n/R_g}\}$$

PFD



Problème: pour étudier un système quelconque de n_b solides à n_q degrés de liberté, il est necessaire d'isoler de manière intelligente les solides en question afin de ne retenir que les équations « utiles ». En fonction des équations retenues, on pourra donc:

1. Déterminer les équations du mouvement, c'est-à-dire les équations définissant le mouvement du système de solides , au nombre de n_q
2. Déterminer les équations permettant de déterminer les inconnues de liaison, au nombre de I_s

Pour rappel, un système de $\boldsymbol{n_b}$ solides en mouvement fournit $\boldsymbol{6n_b}$ équations dynamiques distinctes et pour un système isostatique $\boldsymbol{n_q = 6n_b - I_s}$

Soit un système de n_b solides polyarticulés avec n_q liaisons

➡ Le PFD demande de l'intuition pour être appliqué à un système quelconque

Principe des puissances virtuelles (d’Alembert 1743)

Principe des puissances virtuelles

$$P_{qda}^* = P_e^* + P_i^* \quad \forall V^*$$

La puissance virtuelle des quantités d’acceleration du système materiel E par rapport à un repère galiléen est dans une transformation virtuelle égale la somme des puissances virtuelles de toutes les actions mécaniques extérieures et intérieures appliquées au système materiel E

Principe d’objectivité

$P_i^* = 0 \quad \forall V^*$ rigidifiant

La puissance virtuelle des actions mécaniques intérieures appliquées au système materiel E est nulle pour une transformation V^* rigidifiante

Principe des puissances virtuelles (d'Alembert 1743)

Comment exprimer ce principe dans le cas de la mécanique générale ?

$$P_{qda}^{*} = P_e^{*} + P_i^{*} \quad \forall V^{*}$$

Il faut configurer le système étudié afin de pouvoir exprimer les quantités précédentes

Vitesse et petit déplacement réel

Soit un système $\sum$ de solides rigides (défini par son espace de configuration):

$$\forall M \in \sum \qquad \overrightarrow{OM} = \vec{f}(q_i, t)$$

Un petit déplacement ou une vitesse s'exprime alors:

$$\vec{V}(M) = \sum_i \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial t} dt$$

$$\overrightarrow{\delta M} = \sum_i \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial t}$$

Vitesse et petit déplacement virtuel

Soit un système $\sum$ de solides rigides (défini par son espace de configuration):

$$\forall M \in \sum \qquad \overrightarrow{OM} = \vec{f}(q_i, t)$$

Un petit **déplacement virtuel** ou une **vitesse virtuelle** s'exprime alors:

$$\vec{V}^*(M) = \sum_i \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \dot{q}_i^*$$

$$\overrightarrow{\delta M}^* = \sum_i \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \delta q_i^*$$

Un petit **déplacement virtuel** ou une **vitesse virtuelle** sont dits arbitraires: Ils ne dependent plus explicitement du temps et peuvent donc prendre n'importe quelle valeur au cours du temps.

Un petit **déplacement virtuel** ou une **vitesse virtuelle** sont dits rigidifiants si ce champ obéit à la formule du changement de point

$$\vec{V}^*(M) = \vec{V}^*(N) + \overrightarrow{MN} \wedge \vec{\Omega}$$

Puissance virtuelle des quantités d'accélération

Soit Σ un système de n_b solides polyarticulés avec n_q paramètres du mouvement. Soit M un point quelconque de ce système. La puissance virtuelle des quantités d'accélération d'un tel système s'exprime de la manière suivante:

$$P^*_{qda} = \int_{\Sigma} \overrightarrow{\Gamma(M)}\,\overrightarrow{V^*(M)}dm$$

Sachant que $\vec{V}^*(M) = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i}\overrightarrow{OM}\,\dot{q}_i^*$

On peut écrire $P^*_{qda} = \sum_i \dot{q}_i^* \underbrace{\int_{\Sigma} \overrightarrow{\Gamma(M)}\frac{\partial}{\partial q_i}\overrightarrow{OM}dm}_{P_i} = \sum_i P_i\dot{q}_i^*$ ⇒ Que vaut P_i ?

Expression des P_i

$P_i = \int_\Sigma \ \overrightarrow{\Gamma(M)} \frac{\partial}{\partial q_i} \overrightarrow{OM} dm$ or $\overrightarrow{\Gamma(M)} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{V(M)}$

D'où $P_i = \int_\Sigma \ \frac{d}{dt} \overrightarrow{V(M)} \frac{\partial}{\partial q_i} \overrightarrow{OM} dm$ or $\frac{d}{dt} \int_\Sigma \ \overrightarrow{V(M)} \frac{\partial}{\partial q_i} \overrightarrow{OM} dm = \int_\Sigma \ \frac{d}{dt} \overrightarrow{V(M)} \frac{\partial}{\partial q_i} \overrightarrow{OM} dm + \int_\Sigma \ \overrightarrow{V(M)} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_i} \overrightarrow{OM} dm$

D'où $P_i = \frac{d}{dt} \int_\Sigma \ \overrightarrow{V(M)} \frac{\partial}{\partial q_i} \overrightarrow{OM} dm - \int_\Sigma \ \overrightarrow{V(M)} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_i} \overrightarrow{OM} dm$

or $\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_i} \overrightarrow{OM} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} = \frac{\partial}{\partial q_i} \overrightarrow{V(M)}$

Et $\overrightarrow{V(M)} = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \overrightarrow{OM} \, \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{OM}$ d'où $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \overrightarrow{V(M)} = \frac{\partial}{\partial q_i} \overrightarrow{OM}$

En remplaçant ces deux quantités dans P_i

$$P_i = \frac{d}{dt} \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \overrightarrow{V(M)} \, \overrightarrow{V(M)} dm - \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial q_i} \overrightarrow{V(M)} \, \overrightarrow{V(M)} dm$$

Avec l’énergie cinétique

Par définition $T(\Sigma/R_g) = \frac{1}{2}\int_\Sigma \overrightarrow{V(M)}\,\overrightarrow{V(M)}\,dm = \frac{1}{2}\sum_j \{C(S_j/R_g)\} \otimes \{V(S_j/R_g)\}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} T(\Sigma/R_g) = \frac{1}{2}\int_\Sigma 2\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\overrightarrow{V(M)}\,\overrightarrow{V(M)}\,dm = \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\overrightarrow{V(M)}\,\overrightarrow{V(M)}\,dm$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial q_i} T(\Sigma/R_g) = \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial q_i}\overrightarrow{V(M)}\,\overrightarrow{V(M)}\,dm$$

En remplaçant ces deux quantités dans P_i

$$P_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} T(\Sigma/R_g) - \frac{\partial}{\partial q_i} T(\Sigma/R_g)$$

Et

$$P^*_{qda} = \sum_i P_i \dot{q}_i^*$$

Puissance virtuelle des efforts extérieurs

La puissance virtuelle des efforts extérieurs d'un tel système s'exprime de la manière suivante:

$$P_e^* = \int_\Sigma \overrightarrow{f(M)}\,\overrightarrow{V^*(M)}dv + \int_{\partial\Sigma} \overrightarrow{F(M)}\,\overrightarrow{V^*(M)}dS$$

Avec $\vec{f}$ ensemble des actions volumiques s'appliquant sur Σ
Et $\vec{F}$ ensemble des actions surfaciques s'appliquant sur $\partial\Sigma$

$$P_e^* = \int_\Sigma \overrightarrow{f(M)}\left[\overrightarrow{V^*(A)} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega^*}\right] dv + \int_{\partial\Sigma} \overrightarrow{F(M)}\left[\overrightarrow{V^*(A)} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega^*}\right] dS$$

$$P_e^* = \overrightarrow{V^*(A)}\left[\int_\Sigma \overrightarrow{f(M)}\,dv + \int_{\partial\Sigma} \overrightarrow{F(M)}dS\right] + \overrightarrow{\Omega^*}\left[\int_\Sigma \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{f(M)}dv + \int_{\partial\Sigma} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F(M)}dS\right]$$

$$P_e^* = \overrightarrow{V^*(A)}\,\overrightarrow{R_f} + \overrightarrow{\Omega^*}\,\underbrace{\overrightarrow{M_{f,F}(A)}}$$

Moment des forces extérieures au point A

Revient à écrire le co-moment entre le torseur des actions extérieures et le torseur des vitesses virtuelles

Puissance virtuelle des efforts extérieurs

$$P_e^* = \sum_{\Sigma} \{\tau(\bar{S} \to S)\} \otimes \{V^*(S/R_g)\}$$

Or $\overrightarrow{V(M)} = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \overrightarrow{OM} \dot{q}_i$ d'où $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \overrightarrow{V(M)} = \frac{\partial}{\partial q_i} \overrightarrow{OM}$

On peut alors définir le **torseur de Lagrange** $\{V_{q_i}(S/R_g)\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \overrightarrow{\Omega(M)} \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \overrightarrow{V(M)} \end{Bmatrix}$ tel que $\overrightarrow{V^*(M)} = \sum_i \{V_{q_i}(S/R_g)\} \dot{q}_i^*$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs devient alors:

$$P_e^* = \sum_i \underbrace{\sum_{\Sigma} \{\tau(\bar{S} \to S)\} \otimes \{V_{q_i}(S/R_g)\}}_{Q_i} \dot{q}_i^* = \sum_i Q_i \, \dot{q}_i^*$$

Cas des inter-efforts (efforts de liaison)

$$P_l^* = \sum_{\Sigma} \{\tau(S_j \rightarrow S_k)\} \otimes \{V^*(S_k/S_j)\}$$

A l'aide des torseurs de Lagrange cette expression devient:

$$P_l^* = \sum_i \sum_{\Sigma} \{\tau(S_j \rightarrow S_k)\} \otimes \{V_{q_i}(S_k/S_j)\}\, \dot{q}_i^*$$

Si les liaisons sont parfaites et que le champ des vitesses virtuelles est compatible avec ces liaisons, ces puissances sont nulles !

Dans le cas d'un robot sériel actionné par des moteurs, le couple moteur génère une puissance des inter-efforts entre deux solides (ce qui rend simple son intervention dans les équations de Lagrange).

Fonctions de force

Les forces dérivant d'une fonction de force U (typiquement: forces conservatives dérivant d'un potentiel, par exemple la pesanteur) permettent d'écrire les coefficients énergétiques de la manière suivante:

$$Q_i\left(\bar{S} \rightarrow S/R_g\right) = \frac{\partial}{\partial q_i} U(\bar{S} \rightarrow S/R_g)$$

Une force à laquelle on peut associer une énergie potentielle E_p implique que la puissance associée soit de la forme

$$P\left(\bar{S} \rightarrow S/R_g\right) = -\frac{d}{dt} E_p\left(\bar{S} \rightarrow S/R_g\right)$$

$$= -\left[\sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} E_p\left(\bar{S} \rightarrow S/R_g\right)\dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial t} E_p\left(\bar{S} \rightarrow S/R_g\right)\right]$$

L'existence d'une énergie potentielle E_p entraine l'existence d'une fonction de force telle que $U = -E_p$. La réciproque n'est pas vraie !

Retour au PPV

$$P^*_{qda} = P^*_e + P^*_i \quad \forall V^* \qquad \text{et} \qquad P^*_i = 0 \quad \forall V^* \text{ rigidifiant}$$

Soit

$$\sum_i P_i \, \dot{q}_i^{\,*} = \sum_i Q_i \, \dot{q}_i^{\,*} \qquad \forall V^* \text{ rigidifiant}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1 = Q_1 \\ P_2 = Q_2 \\ \vdots \\ P_i = Q_i \\ \vdots \\ P_{n_q} = Q_{n_q} \end{cases}$$

n_q équations du mouvement (équations de Lagrange)

Energie potentielle

- Puisque $U = -E_p$, il est également possible d'exploiter l'énergie mécanique totale plutôt que d'exprimer les coefficients énergétiques associés à l'énergie potentielle du système.
- Dans ce cas on exploite le Lagrangien du système qui est tout simplement la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle : $L = T(\Sigma/R_g) + E_p(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_g)$
- Ce qui mène à considérer directement l'énergie potentielle dans le membre de gauche des équations de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}L - \frac{\partial}{\partial q_i}L = Q_i'$$

n_q équations du mouvement (équations de Lagrange)

Ou encore

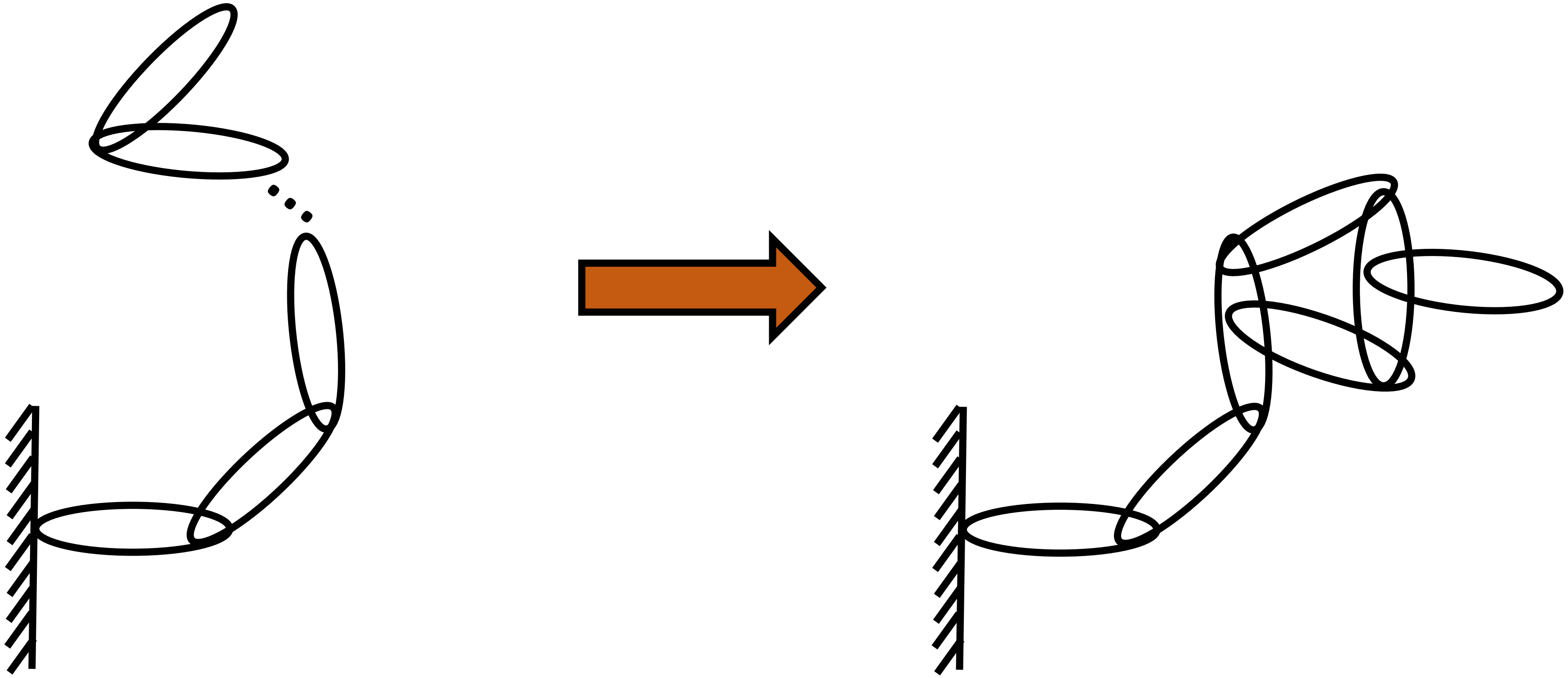
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}T - \frac{\partial}{\partial q_i}T + \frac{\partial}{\partial q_i}E_p = \underbrace{Q_i'}_{\text{Forces non conservatives uniquement}}$$

Cette relation se montre facilement à partir de la relation $U = -E_p$

Problématique

Structure ouverte

Fermetures cinématiques
= contraintes



Dynamique contrainte

- Contraintes holonômes : lient les paramètres du mouvement entre eux. Par dérivation par rapport au temps, elles permettent de lier également les vitesses articulaires

$$\left.\begin{aligned} & f_j\left(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_{n_q}, t\right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial q_1} f_j \dot{q}_1 + \frac{\partial}{\partial q_2} f_j \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial q_{n_q}} f_j \dot{q}_{n_q} + \frac{\partial}{\partial t} f_j = 0 \leftrightarrow \sum_i a_{ji}(q_k, t)\dot{q}_i = b_j(q_k, t) \end{aligned}\right\} \quad \text{Pour } j = 1 \dots n_h$$

- Contraintes non-holonômes: lient les paramètres du mouvement et les vitesses associées. Dans le cas où cette équation n'est pas intégrable, on conserve le paramètre associé et on le « fait travailler » virtuellement

$$f_j\left(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_{n_q}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_{n_q}, t\right) = 0 \leftrightarrow \sum_i a_{ji}(q_k, t)\dot{q}_i = b_j(q_k, t) \qquad \text{Pour } j = 1 \dots n_k$$

⇒ Les contraintes virtualisées perdent leur dépendance explicite au temps : $\sum_i a_{ji}(q_k, t)\dot{q}_i^* = 0$ Pour $j = 1 \dots n_k$

Résolution

4 solutions

Multiplicateurs de Lagrange

On cherche à résoudre $\sum_i P_i \, \dot{q}_i^{\,*} = \sum_i Q_i \, \dot{q}_i^{\,*} \quad \forall(\dot{q}_i^{\,*}, i = 1 \dots n_q)$ respectant $\sum_i a_{ji}(q_k, t)\dot{q}_i^* = 0$ pour $j = 1 \dots n_k$

$\forall \dot{q}_i^{\,*}$ implique que ces équations sont combinaison linéaire. On introduit donc k multiplicateurs linéaires λ_j permettant d'écrire:

$$\sum_i P_i \, \dot{q}_i^{\,*} = \sum_i Q_i \, \dot{q}_i^{\,*} + \sum_j \lambda_j \sum_i a_{ji}(q_k, t)\dot{q}_i^* \qquad \forall(\dot{q}_i^{\,*}, i = 1 \dots n_q)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_1 = Q_1 + \sum_j \lambda_j a_{j1}(q_k, t) \\ \vdots \\ P_i = Q_i + \sum_j \lambda_j a_{ji}(q_k, t) \\ \vdots \\ P_{n_q} = Q_{n_q} + \sum_j \lambda_j a_{jn_q}(q_k, t) \end{array} \right.$$

$\boldsymbol{n_q}$ équations du mouvement (équations de Lagrange)

Réécriture du PPV

Ce qui implique l'écriture de n_q équations de Lagrange sous la forme

$$\begin{cases} P_1 = Q_1 + \sum_j \lambda_j a_{j1}(q_k, t) \\ \vdots \\ P_i = Q_i + \sum_j \lambda_j a_{ji}(q_k, t) \\ \vdots \\ P_{n_q} = Q_{n_q} + \sum_j \lambda_j a_{jn_q}(q_k, t) \end{cases}$$

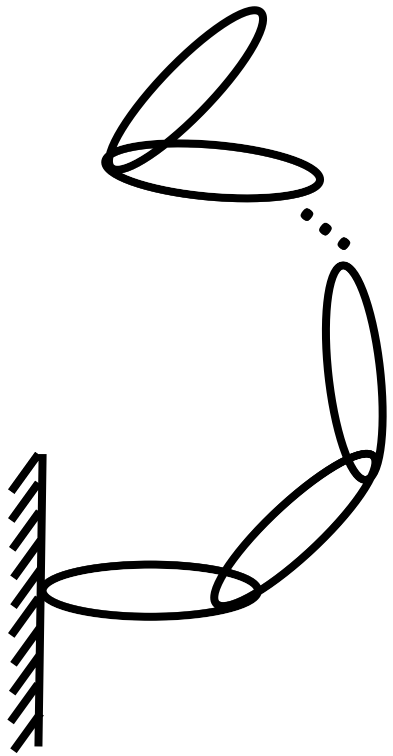
$\boldsymbol{n_q}$ équations du mouvement (équations de Lagrange)

Auxquelles on adjoint $\boldsymbol{n_k}$ contraintes réelles $\sum_i a_{ji}(q_k, t)\dot{q}_i = b_j(q_k, t)$ Pour $j = 1 \ldots n_k$

Les nouvelles inconnues du problème sont:

- n_q paramètres du mouvement q_i
- n_k multiplicateurs de Lagrange λ_j

Les structures arborescentes



Soit un système de n_b
solides polyarticulés avec n_q liaisons

On peut montrer que pour ce type de structure

$$H(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + G(\boldsymbol{q}) = E(\boldsymbol{q})\boldsymbol{f_e} + B(\boldsymbol{q})\boldsymbol{f_a}$$

$\Rightarrow$ Voir slides suivantes

Bibliographie

- Pommier, S., & Berthaud, Y. (2010). *Mécanique générale: cours et exercices corrigés*. Dunod.
- Bône, J. C., Morel, J., Boucher, M., & Boucher, M. (1984). *Mécanique générale: cours et applications*. Dunod.